

数学试题 (理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

(1) 设集合 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, $B = \{x | x^2 + x - 2 > 0\}$, 则 $A \cap B =$

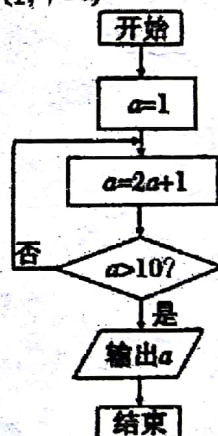
- (A) $(2, 3)$ (B) $(1, 3)$ (C) $(-\infty, -2) \cup (1, 3)$ (D) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

(2) 复数 $z = -i(1 + 2i)$ 的共轭复数为

- (A) $2 + i$ (B) $2 - i$ (C) $-2 + i$ (D) $-2 - i$

(3) 执行如图所示的程序框图,输出的结果是

- (A) 13 (B) 14
(C) 15 (D) 17

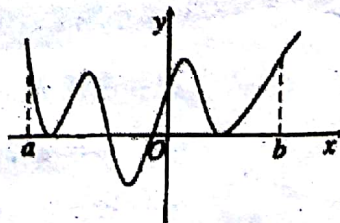


(4) 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-1 \leq 0 \\ x-y-1 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x - y$ 的最大值为

- (A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(5) 已知函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图所示, 则函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内的极小值点的个数为

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4



(6) 已知函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 在 $x = \theta$ 时取得最大值, 则 $\cos(2\theta + \frac{\pi}{4}) =$

(A) $-\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(7) 已知函数 $f(x) = x^3 - ax$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围为

(A) $(1, +\infty)$

(B) $[3, +\infty)$

(C) $(-\infty, 1]$

(D) $(-\infty, 3]$

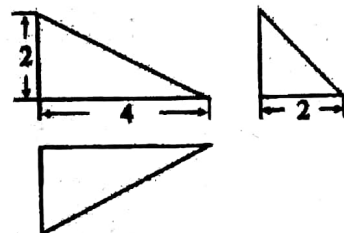
(8) 如图, 一个三棱锥的三视图均为直角三角形. 若该三棱锥的顶点都在同一个球面上, 则该球的表面积为

(A) 4π

(B) 16π

(C) 24π

(D) 25π



(9) 小明在花店定了一束鲜花, 花店承诺将在第二天早上 7:30~8:30 之间将鲜花送到小明家. 若小明第二天离开家去公司上班的时间在早上 8:00~9:00 之间, 则小明在离开家之前能收到这束鲜花的概率是

(A) $\frac{1}{8}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{7}{8}$

(10) 下列判断正确的是

(A) 若事件 A 与事件 B 互斥, 则事件 A 与事件 B 对立

(B) 函数 $y = \sqrt{x^2 + 9} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的最小值为 2

(C) 若直线 $(m+1)x + my - 2 = 0$ 与直线 $mx - 2y + 5 = 0$ 互相垂直, 则 $m = 1$

(D) “ $p \wedge q$ 为真命题”是“ $p \vee q$ 为真命题”的充分不必要条件

(11) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2\sqrt{3}(\sin^2 A - \sin^2 C) = (a - b) \sin B$,

$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $\sqrt{3}$. 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为

(A) $\frac{3}{8}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{9\sqrt{3}}{8}$

(D) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

(12) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = f(1+x)$, 且当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = \ln x$.

则直线 $x - 5y + 3 = 0$ 与曲线 $y = f(x)$ 的交点个数为 (参考数据: $\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10$)

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6



二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

(13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\sin x) dx =$ _____.

(14) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2} = 1 (a > 0)$ 和抛物线 $y^2 = 8x$ 有相同的焦点，则双曲线的离心率为 _____.

(15) 已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2018，公比为 2018 的等比数列，设数列 $\left\{ \frac{1}{\log_{2018} a_n \cdot \log_{2018} a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则 $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot \dots \cdot S_{2018} =$ _____.

(16) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 P 在曲线 $\Gamma: y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} (x \geq 0)$ 上，曲线 Γ 与 x 轴相交于点 B ，与 y 轴相交于点 C ，点 $D(2, 1)$ 和点 $E(1, 0)$ 满足 $\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{CE} + \mu \overrightarrow{OP}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)，则 $\lambda + \mu$ 的最小值为 _____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17). (本小题满分 10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ， $a_1 = -1$ ，

$b_1 = 1$ ， $a_2 + b_2 = 2$.

(1) 若 $a_3 + b_3 = 5$ ，求 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $T_3 = 21$ ，求 S_3 .

(18) (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$ 在 $x = 1$ 处有极值 4.

(I) 求实数 a, b 的值；

(II) 当 $a > 0$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-2, f(-2))$ 处的切线方程.



某医疗科研项目对5只实验小白鼠体内的A,B两项指标数据进行收集和分析,得到的数据如下表:

指标	1号小白鼠	2号小白鼠	3号小白鼠	4号小白鼠	5号小白鼠
A	5	7	6	9	8
B	2	2	3	4	4

(I)若通过数据分析,得知A项指标数据与B项指标数据具有线性相关关系.试根据上表,求B项指标数据 y 关于A项指标数据 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$;

(II)现要从这5只小白鼠中随机抽取3只,求其中至少有一只B项指标数据高于3的概率.

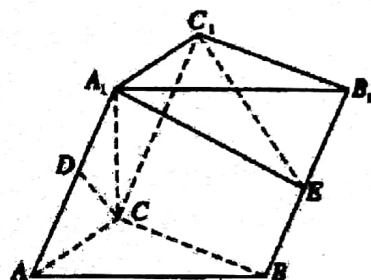
$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

(20)(本小题满分12分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 ABC , $AB \perp AC$, $AA_1 = 2\sqrt{2}$, $A_1C = CA = AB = 2$.

(I)若D是 AA_1 的中点,求证: $CD \perp$ 平面 ABB_1A_1 ;

(II)若E是侧棱 BB_1 上的点,且 $\sqrt{3}EB_1 = BB_1$,求二面角 $E-A_1C_1-A$ 的大小.



(21)(本小题满分12分)

在平面直角坐标系 xOy 中,已知 $\triangle ABC$ 的两个顶点A,B的坐标分别为 $(-1,0)$, $(1,0)$,且AC,BC所在直线的斜率之积等于 -2 ,记顶点C的轨迹为曲线E.

(I)求曲线E的方程;

(II)设直线 $y=kx+2$ ($0 < k < 2$)与 y 轴相交于点P,与曲线E相交于不同的两点Q,R(点R在点P和点Q之间),且 $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{PR}$,求实数 λ 的取值范围.

(22)(本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + a}{x}$, $a \in \mathbb{R}$.

(I)求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II)设函数 $g(x) = (x-k)e^x + k$, $k \in \mathbb{Z}$, $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数.当 $a=1$ 时,若 $\exists x_1 \in (0, +\infty)$, $\forall x_2 \in (0, +\infty)$,不等式 $5f(x_1) + g(x_2) > 0$ 成立,求 k 的最大值.

