

成都七中高 2019 届 10 月阶段性测试 数学试题（理科）

答案：

ADBAB ABCAB BD

13. $-2\sqrt{3}$ 14. 2 15. $\frac{5}{3}$ 16. $\sqrt{3}$.

17. 解：（I）当 $n \geq 2$ 时， $S_n - S_{n-1} = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}$,2 分

$$S_{n-1} - S_n = 2S_n S_{n-1} \cdot \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2,$$

从而 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 构成以 1 为首项，2 为公差的等差数列.6 分

（II）由（I）可知， $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{S_1} + (n-1) \times 2 = 2n-1$, $\therefore S_n = \frac{1}{2n-1}$8 分

$$\therefore \frac{S_n}{2n+1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \quad \text{.....10 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{S_1}{3} + \frac{S_2}{5} + \dots + \frac{S_n}{2n+1} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

18.

解析：（1）根据题意列出 2×2 列联表如下：

手机品牌 \ 红包个数	优	非优	合计
甲品牌（个）	3	2	5
乙品牌（个）	2	3	5
合计	5	5	10

$$K^2 = \frac{10 \times (9-4)^2}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = 0.4 < 2.072,$$

所以没有 85% 的理由认为抢到红包个数与手机品牌有关.6 分

②随机变量 X 的所有可能取值为 1, 2, 3, 7 分

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}; P(X=2) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5}; P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}. \quad \text{..... 10 分}$$

故 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$\therefore \text{数学期望 } E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5}. \quad \text{..... 12 分}$$

19. 解：（I）在菱形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$,

$\therefore CD \subset \text{面 } CDPN, AB \not\subset \text{面 } CDPN,$

$\therefore AB \parallel \text{面 } CDPN$3 分
 又 $AB \subset \text{面 } ABPN$, 面 $ABPN \cap \text{面 } CDPN = PN$,
 $\therefore AB \parallel PN$6 分

(II) 作 CD 的中点 M , 则由题意知 $AM \perp AB$,

$\therefore PA \perp \text{面 } ABCD$,

$\therefore PA \perp AB, PA \perp AM$.

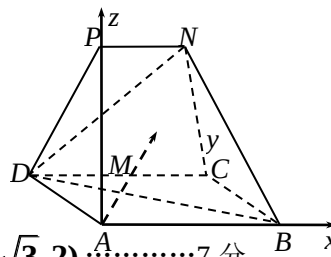
如图, 以 A 点为原点, 建立空间直角坐标系 $A-xyz$,

设 $AB=2$,

则 $B(2, 0, 0), C(1, \sqrt{3}, 0), D(-1, \sqrt{3}, 0)$,

$N(1, 0, 2)$,

$\therefore \overrightarrow{DB} = (3, -\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{NB} = (1, 0, -2), \overrightarrow{CN} = (0, -\sqrt{3}, 2)$7 分



设平面 BDN 的一个法向量为 $n_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

则由 $n_1 \cdot \overrightarrow{DB} = 0, n_1 \cdot \overrightarrow{NB} = 0$, 得
$$\begin{cases} 3x_1 - \sqrt{3}y_1 = 0, \\ x_1 - 2z_1 = 0, \end{cases}$$

令 $x_1=2$, 则 $y_1=2\sqrt{3}, z_1=1$, 即 $n_1=(2, 2\sqrt{3}, 1)$,9 分

设 NC 与平面 BDN 所成角为 θ

则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{CN}, n_1 \rangle| = \frac{|\overrightarrow{CN} \cdot n_1|}{|\overrightarrow{CN}| \cdot |n_1|} = \frac{4\sqrt{119}}{119}$,11 分

即 NC 与平面 BDN 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{119}}{119}$12 分

20. (本小题满分 12 分)

解: (I) 由题意: $b=1$, 右焦点 $(c, 0)(c > 0)$ 到直线 $x - y + 2\sqrt{2} = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|c + 2\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 3, \quad \text{.....1 分}$$

$$\therefore c = \sqrt{2} \quad \text{.....2 分}$$

$$\text{又} \because a^2 - b^2 = c^2, \therefore a = \sqrt{3}, \quad \text{.....3 分}$$

又 $\because$ 椭圆 E 的焦点在 x 轴上, $\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 4 分

(II) 设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 则联立直线 l 与椭圆方程有

$$\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 3y^2 = 3 \end{cases}, \text{ 得 } (3k^2 + 1)x^2 + 6mkx + 3m^2 - 3 = 0 \quad \text{.....5 分}$$

$$\text{又 } |BC| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{\sqrt{(1+k^2)} \sqrt{12(3k^2 - m^2 + 1)}}{3k^2 + 1},$$

$$\text{平方得 } |BC|^2 = \frac{12(1+k^2)(3k^2 - m^2 + 1)}{(3k^2 + 1)^2}, \quad \text{①} \quad \text{.....6 分}$$

$$\text{由 } O \text{ 到直线 } l \text{ 的距离为 } \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 得 } m^2 = \frac{3}{4}(k^2 + 1) \quad \text{.....7 分}$$

$$\text{代入①式得: } |BC|^2 = \frac{3(9k^4 + 10k^2 + 1)}{9k^4 + 6k^2 + 1} = 3\left(1 + \frac{4}{9k^2 + \frac{1}{k^2} + 6}\right), \quad \text{.....8 分}$$

当且仅当 $k^2 = \frac{1}{3}$ 时, $9k^2 + \frac{1}{k^2} \geq 6$, $|BC|$ 有最大值 2.10 分

$$\therefore (S_{\triangle BOC})_{\max} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \triangle BOC \text{ 面积的最大值为 } \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (本小题满分 12 分)

解: (I) $g'(x) = e^x - a$,

①当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

②当 $a > 0$ 时, 由 $g'(x) = e^x - a = 0$ 得 $x = \ln a$,

$\therefore x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$; 当 $a > 0$ 时, 函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(\ln a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, \ln a)$4 分

(III) 解: 设 $p(x) = \frac{e}{x} - \ln x, q(x) = e^{x-1} + a - \ln x$,

$\therefore p'(x) = -\frac{e}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$, $\therefore p(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上为减函数, 又 $p(e) = 0$,

$\therefore$ 当 $1 \leq x \leq e$ 时, $p(x) \geq 0$, 当 $x > e$ 时, $p(x) < 0$.

$\therefore q'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}, q''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$,

$\therefore q'(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上为增函数, 又 $q'(1) = 0$,

$\therefore x \in [1, +\infty)$ 时, $q'(x) \geq 0$, $\therefore q(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上为增函数,

$\therefore q(x) \geq q(1) = a + 2 > 0$6 分

①当 $1 \leq x \leq e$ 时, $|p(x)| - |q(x)| = p(x) - q(x) = \frac{e}{x} - e^{x-1} - a$,

设 $m(x) = \frac{e}{x} - e^{x-1} - a$, 则 $m'(x) = -\frac{e}{x^2} - e^{x-1} < 0$, $\therefore m(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上为减函数,

$\therefore m(x) \leq m(1) = e - 1 - a$,

$\therefore a \geq 2$, $\therefore m(x) < 0$, $\therefore |p(x)| < |q(x)|$, $\therefore \frac{e}{x}$ 比 $e^{x-1} + a$ 更接近 $\ln x$9 分

②当 $x > e$ 时, $|p(x)| - |q(x)| = -p(x) - q(x) = -\frac{e}{x} + 2\ln x - e^{x-1} - a < 2\ln x - e^{x-1} - a$,

设 $n(x) = 2\ln x - e^{x-1} - a$, 则 $n'(x) = \frac{2}{x} - e^{x-1}$, $n''(x) = -\frac{2}{x^2} - e^{x-1} < 0$,

$\therefore n'(x)$ 在 $x > e$ 时为减函数, $\therefore n'(x) < n'(e) = \frac{2}{e} - e^{e-1} < 0$,

$\therefore n(x)$ 在 $x > e$ 时为减函数, $\therefore n(x) < n(e) = 2 - a - e^{e-1} < 0$,

$\therefore |p(x)| < |q(x)|$, $\therefore \frac{e}{x}$ 比 $e^{x-1} + a$ 更接近 $\ln x$.

综上: 在 $a \geq 2, x \geq 1$ 时, $\frac{e}{x}$ 比 $e^{x-1} + a$ 更接近 $\ln x$ 12 分

22. 解 (1) 由 $\begin{cases} x = 3\cos \alpha, \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ 消去参数 α , 得 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$,

即C 的普通方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

由 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, 得 $\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=2$, (*)

将 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 代入(*), 化简得 $y=x+2$,

所以直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$.

(2)由(1) 知点 $P(0, 2)$ 在直线 l 上,

可设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=t\cos\frac{\pi}{4}, \\ y=2+t\sin\frac{\pi}{4} \end{cases}$ (t 为参数),

即 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数),

代入 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 并化简, 得 $5t^2+18\sqrt{2}t+27=0$,

$\Delta=(18\sqrt{2})^2-4\times 5\times 27=108>0$,

设 A, B 两点对应的参数分别为 t_1, t_2 ,

则 $t_1+t_2=-\frac{18\sqrt{2}}{5}<0$, $t_1t_2=\frac{27}{5}>0$, 所以 $t_1<0, t_2<0$,

所以 $|PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=- (t_1+t_2)=\frac{18\sqrt{2}}{5}$.

23.解: (1) $f(x)=\begin{cases} -x-4, & x<-1 \\ 3x, & -1\leq x<2 \\ x+4, & x\geq 2 \end{cases}$ 2 分

当 $x<-1, -x-4>2, x<-6, \therefore x<-6$

当 $-1\leq x<2, 3x>2, x>\frac{2}{3}, \therefore \frac{2}{3}<x<2$

当 $x\geq 2, x+4>2, x>-2, \therefore x\geq 2$

综上所述 $\left\{x \mid x>\frac{2}{3} \text{ 或 } x<-6\right\}$ 5 分

(2) 易得 $f(x)_{\min}=f(-1)=-3$, 若 $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)\geq t^2-\frac{11}{2}t$ 恒成立,

则只需 $f(x)_{\min}=-3\geq t^2-\frac{7}{2}t\Rightarrow 2t^2-7t+6\leq 0\Rightarrow \frac{3}{2}\leq t\leq 2$,

综上所述 $\frac{3}{2}\leq t\leq 2$10 分