

成都七中高 2019 届 10 月阶段性测试 数学试题（理科）

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试时间 120 分钟
一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,满分 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$, $B = \{x | 2x - 3 > 0\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $(\frac{3}{2}, 3)$ B. $(1, \frac{3}{2})$ C. $(-3, \frac{3}{2})$ D. $(-3, -\frac{3}{2})$

2. 复数 $\frac{1-3i}{i^3}$ 的共轭复数是 ()

- A. $-3+i$ B. $-3-i$ C. $3+i$ D. $3-i$

3. 下列曲线中离心率是 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 的是 ()

- A. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{10} = 1$

4. 已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 则 $\log_4 f(2)$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. 2 D. -2

5. 已知 $a \in \{-2, 0, 1, 3, 4\}$, $b \in \{1, 2\}$, 则函数 $f(x) = (a^2 - 2)x + b$ 为增函数的概率是 ()

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{10}$

6. 某赛季, 甲、乙两名篮球运动员都参加了 11 场比赛, 他们每场比赛得分的情况用如图所示的茎叶图表示, 则甲、乙两名运动员的中位数分别为 ()

- A. 19、13 B. 13、19
C. 20、18 D. 18、20

甲					乙		
6	9	8	0		7	8	5
5	7	9	1		1	1	3
3	4	6	2		2	0	
			2		3	1	0
			1		4	0	

7. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ x-y \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x + 4y$ 的最小值为 ()

- A. -14 B. -15 C. -16 D. -17

8. 已知 AO 为平面 α 的一条斜线, O 为斜足, OB 为 OA 在平面 α 内的射影, 直线 OC 在平面 α 内, 且 $\angle AOB = \angle BOC = 45^\circ$, 则 $\angle AOC$ 的大小为 ()

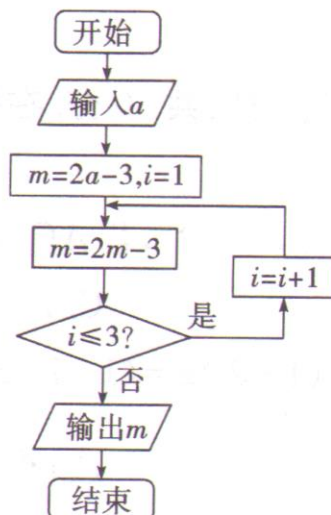
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

9. 执行如图所示的程序框图, 若输出 m 的值为 35, 则输入 a 的值为 ()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

10. 若二项式 $(x^4 - \frac{1}{x^3\sqrt{x}})^n, n \in N$ 的展开式中含有常数项, 则 n 的最小值等于

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 8



11. 抛物线 $E: x^2 = 4y$ 与圆 $M: x^2 + (y-1)^2 = 16$ 交于 A、B 两点，圆心 $M(0,1)$ ，点 P 为劣弧 AB 上不同于 A、B 的一个动点，平行于 y 轴的直线 PN 交抛物线于点 N，则 $\triangle PMN$ 的周长的取值范围是 ()

- A. (6,12) B. (8,10) C. (6,10) D. (8,12)

12. 若对 $\forall x, y \in [0, +\infty)$ ，不等式 $4ax \leq e^{x+y-2} + e^{x-y-2} + 2$ 恒成立，则实数 a 的最大值是 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

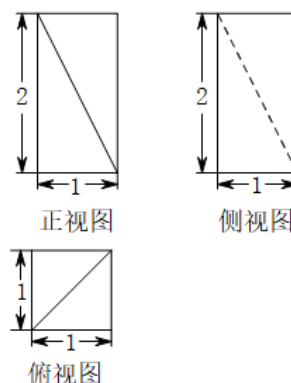
二、选择题 (本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分)

13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = -2$ ， $a_6 = -6$ ，则 $a_4 =$ _____.

14. 已知 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ， $|\vec{b}| = 1$ ， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 45° ，若 $t\vec{b} - \vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，则实数 $t =$ _____

15. 某几何体为长方体的一部分，其三视图如图，则此几何体的体积为_____;

16. 已知 $\triangle ABC$ 三个内角 A、B、C 的对边分别是 a 、 b 、 c ， $a = 2$ ，且 $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$ ，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.



三、解答题: (共 70 分)

17. (本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ，其前 n 项的和为 S_n ，且满足

$$a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1} \quad (n \geq 2).$$

(I) 求证: 数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列;

(II) 证明: $\frac{S_1}{3} + \frac{S_2}{5} + \dots + \frac{S_n}{2n+1} < \frac{1}{2}$

18. (本小题满分 12 分) 微信红包是一款可以实现收发红包、查收记录和提现的手机应用. 某网络运营商对甲、乙两个品牌各 5 种型号的手机在相同环境下抢到的红包个数进行统计，得到如表数据:

手机品牌 \ 型号	I	II	III	IV	V
甲品牌(个)	4	3	8	6	12
乙品牌(个)	5	7	9	4	3

手机品牌 \ 红包个数	优	非优	合计
甲品牌(个)			
乙品牌(个)			
合计			

(I) 如果抢到红包个数超过 5 个的手机型号为“优”，否则“非优”，请完成上述 2×2 列联表，据此判断是否有 85% 的把握认为抢到的红包个数与手机品牌有关?

(II) 如果不考虑其它因素，要从甲品牌的 5 种型号中选出 3 种型号的手机进行大规模宣传销售. 以 X 表示选中的手机型号中抢到的红包超过 5 个的型号种数，求随机变量 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

下面临界值表供参考:

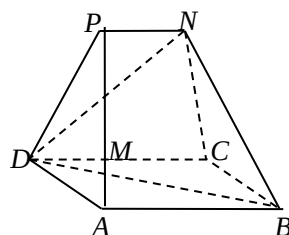
$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$ 。

19. (本小题满分 12 分) 如图, 在五面体 $ABCDPN$ 中, 棱 $PA \perp$ 面 $ABCD$, $AB = AP = 2PN$, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$.

(I) 求证: $PN \parallel AB$

(II) 求 NC 与平面 BDN 所成角的正弦值.



20. (本小题满分 12 分) 已知椭圆 E 的一个顶点为 $A(0, -1)$, 焦点在 x 轴上, 若椭圆的右焦点到直线 $x - y + 2\sqrt{2} = 0$ 的距离是 3.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 设直线 $l: y = kx + m (k \neq 0)$ 与该椭圆交于不同的两点 B, C , 若坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle BOC$ 面积的最大值.

21. (本小题满分 12 分)

若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = e^x - a(x-1)$, $a \in \mathbf{R}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若 x, y, m 满足 $|x-m| \leq |y-m|$, 则称 x 比 y 更接近 m . 当 $a \geq 2$ 且 $x \geq 1$ 时, 试比较 $\frac{e}{x}$ 和 $e^{x-1} + a$ 哪个更接近 $\ln x$, 并说明理由.

选做题：请考生在 22, 23 三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), 在以原点为极点,

x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

(1) 求曲线 C 的普通方程和 l 的倾斜角;

(2) 设点 $P(0, 2)$, l 和 C 交于 A 、 B 两点, 求 $|PA| + |PB|$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

设函数 $f(x) = |2x + 2| - |x - 2|$.

(I) 求不等式 $f(x) > 2$ 的解集;

(II) 若 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq t^2 - \frac{7}{2}t$ 恒成立, 求实数 t 的取值范围.