

成都七中高 2019 届 10 月阶段性测试 数学试题（文科）

答案：

ADBAB CADDA DB

13. $-2\sqrt{3}$ 14. 2 15. $\frac{5}{3}$ 16. $\frac{4\pi}{3}$.

17.

解析：(1) 根据题意列出 2×2 列联表如下：

手机品牌 \ 红包个数	优	非优	合计
甲品牌（个）	3	2	5
乙品牌（个）	2	3	5
合计	5	5	10

$$K^2 = \frac{10 \times (9 - 4)^2}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = 0.4 < 2.072,$$

所以没有 85% 的理由认为抢到红包个数与手机品牌有关.6 分

(2) 枚举出 10 种结果，给到 9 分，得到答案 $\frac{3}{5}$ 给到 12 分

18. 解：(I) 当 $n \geq 2$ 时， $S_n - S_{n-1} = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}$,2 分

$$S_{n-1} - S_n = 2S_n S_{n-1} \cdot \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2,$$

从而 $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 构成以 1 为首项，2 为公差的等差数列.6 分

(II) 由 (1) 可知， $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{S_1} + (n-1) \times 2 = 2n-1$, $\therefore S_n = \frac{1}{2n-1}$8 分

$$\therefore \frac{S_n}{2n+1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \quad \text{.....10 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{S_1}{3} + \frac{S_2}{5} + \dots + \frac{S_n}{2n+1} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

19. 解：(I) 在菱形 ABCD 中， $AB \parallel CD$,

$\because CD \subset \text{面 } CDPN, AB \not\subset \text{面 } CDPN,$

$\therefore AB \parallel \text{面 } CDPN.$ 3 分

又 $AB \subset \text{面 } ABPN, \text{面 } ABPN \cap \text{面 } CDPN = PN,$

$\therefore AB \parallel PN.$ 6 分

(II)

19. (I) 取 CD , AB 中点 M 和 N .

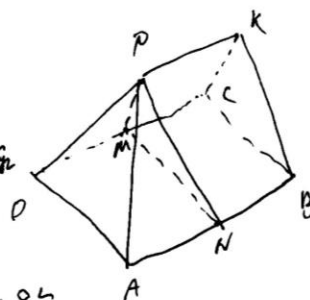
记四棱锥 $POAN$ 体积为 V_1 , 三棱锥 $PMN-OCK$ 体积为 V_2 , 总体积为 V . $V = V_1 + V_2$

$$\therefore V_1 = \frac{2}{3} V_2$$

$$\therefore V = \frac{3}{2} V_1 + V_1 = \frac{5}{2} V_1$$

$$\therefore V_1 = \frac{1}{3} \cdot |PA| \cdot \frac{1}{2} S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore V = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$



----- 8分

----- 12分

20. (本小题满分 12 分)

解: (I) 由题意: $b=1$, 右焦点 $(c,0)(c>0)$ 到直线 $x-y+2\sqrt{2}=0$ 的距离为

$$d = \frac{|c+2\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 3, \quad \text{----- 1 分}$$

$$\therefore c = \sqrt{2} \quad \text{----- 2 分}$$

$$\text{又} \because a^2 - b^2 = c^2, \therefore a = \sqrt{3}, \quad \text{----- 3 分}$$

又 $\because$ 椭圆 E 的焦点在 x 轴上, $\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ ----- 4 分

20 (II) 1. 当 k 不存在时, $|AB| = 2$.

----- 5分

2. 当 k 存在时, 设 $y = kx - 1$.

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx - 1 \\ x^2 + 3y^2 = 3 \end{cases}, \text{得 } (1+3k^2)x^2 - 6kx = 0$$

$$x_A = 0, \quad x_B = \frac{6k}{1+3k^2}$$

----- 6分

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{6|k|}{1+3k^2}, \quad |AB|^2 = \frac{6^2 \cdot k^2 (1+k^2)}{1+3k^2}$$

----- 7分

$$\text{令 } t = 1+3k^2 \in (1, +\infty).$$

$$\text{则 } |AB|^2 = 4 \left[-2\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{t} + 1 \right]$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{4}, \text{ 即 } k^2 = 1 \text{ 时, } |AB|_{\max}^2 = \frac{9}{2}, \text{ 即 } |AB|_{\max} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

----- 10分

$$\text{此时方程 } y = x - 1 \text{ 或 } y = -x - 1$$

----- 12分

(设 $B(x_2, y_2)$, 用类似方法求 $|AB|_{\max}$ 的得分)

21. (本小题满分 12 分)

解: (I) $g'(x) = e^x - a$,

①当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

②当 $a > 0$ 时, 由 $g'(x) = e^x - a = 0$ 得 $x = \ln a$,

$\therefore x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$; 当 $a > 0$ 时, 函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(\ln a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, \ln a)$4 分

(III) 解: 设 $p(x) = \frac{e}{x} - \ln x, q(x) = e^{x-1} + 2 - \ln x$,

$\therefore p'(x) = -\frac{e}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$, $\therefore p(x)$ 在 $x \in [e, +\infty)$ 上为减函数, 又 $p(e) = 0$,

$\therefore$ 当 $x > e$ 时, $p(x) < 0$.

$\therefore q'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$, $\therefore q'(x)$ 在 $x \in [e, +\infty)$ 上为增函数, 又 $q'(e) > 0$,

$\therefore x \in [e, +\infty)$ 时, $q'(x) > 0$, $\therefore q(x)$ 在 $x \in [e, +\infty)$ 上为增函数,

$\therefore q(x) \geq q(e) = e^{e-1} + 1 > 0$8 分

当 $x > e$ 时, $|p(x)| - |q(x)| = -p(x) - q(x) = -\frac{e}{x} + 2 \ln x - e^{x-1} - 2 < 2 \ln x - e^{x-1} - 2$,

设 $n(x) = 2 \ln x - e^{x-1} - 2$, 则 $n'(x) = \frac{2}{x} - e^{x-1}$,

$\therefore n'(x)$ 在 $x > e$ 时为减函数, $\therefore n'(x) < n'(e) = \frac{2}{e} - e^{e-1} < 0$,

$\therefore n(x)$ 在 $x > e$ 时为减函数, $\therefore n(x) < n(e) = -e^{e-1} < 0$, 11 分

$\therefore |p(x)| < |q(x)|$, $\therefore \frac{e}{x}$ 比 $e^{x-1} + 2$ 更接近 $\ln x$ 12 分

22. 解 (1) 由 $\begin{cases} x = 3 \cos \alpha, \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ 消去参数 α , 得 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$,

即 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

由 $\rho \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}$, 得 $\rho \sin \theta - \rho \cos \theta = 2$, (*)

将 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 代入(*), 化简得 $y = x + 2$,

所以直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$.

(2) 由(1)知, 点 $P(0, 2)$ 在直线 l 上, 可设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \cos \frac{\pi}{4}, \\ y = 2 + t \sin \frac{\pi}{4} \end{cases} (t \text{ 为参数}),$

$$\text{即} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数}),$$

代入 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 并化简, 得 $5t^2 + 18\sqrt{2}t + 27 = 0$,

$$\Delta = (18\sqrt{2})^2 - 4 \times 5 \times 27 = 108 > 0,$$

设 A, B 两点对应的参数分别为 t_1, t_2 ,

$$\text{则 } t_1 + t_2 = -\frac{18\sqrt{2}}{5} < 0, \quad t_1 t_2 = \frac{27}{5} > 0, \quad \text{所以 } t_1 < 0, \quad t_2 < 0,$$

$$\text{所以 } |PA| + |PB| = |t_1| + |t_2| = -(t_1 + t_2) = \frac{18\sqrt{2}}{5}.$$

$$23. \text{解: (1) } f(x) = \begin{cases} -x-4, & x < -1 \\ 3x, & -1 \leq x < 2 \\ x+4, & x \geq 2 \end{cases} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x < -1, -x-4 > 2, x < -6, \therefore x < -6$$

$$\text{当 } -1 \leq x < 2, 3x > 2, x > \frac{2}{3}, \therefore \frac{2}{3} < x < 2$$

$$\text{当 } x \geq 2, x+4 > 2, x > -2, \therefore x \geq 2$$

$$\text{综上所述 } \left\{ x \mid x > \frac{2}{3} \text{ 或 } x < -6 \right\}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 易得 } f(x)_{\min} = f(-1) = -3, \text{ 若 } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq t^2 - \frac{11}{2}t \text{ 恒成立,}$$

$$\text{则只需 } f(x)_{\min} = -3 \geq t^2 - \frac{7}{2}t \Rightarrow 2t^2 - 7t + 6 \leq 0 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq t \leq 2,$$

$$\text{综上所述 } \frac{3}{2} \leq t \leq 2. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$