



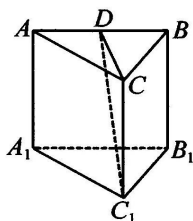
§ 1.4.2 用空间向量研究距离、 夹角问题

§ 1.4.2(1) 空间向量与空间距离

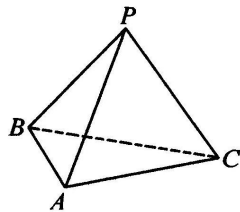
■ 基础巩固

一、选择题

1. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 是 AB 的中点, CD 等于 $\sqrt{3}$, 则顶点 A_1 到平面 CDC_1 的距离为 ()



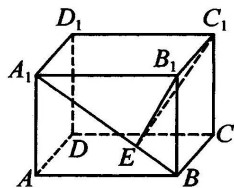
- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{2}$
2. 在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是 AA_1 的中点, 则点 A_1 到平面 MBD 的距离是 ()
- A. $\frac{\sqrt{6}}{6}a$ B. $\frac{\sqrt{30}}{6}a$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}a$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}a$
3. 已知四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, E, F 分别是 AB, AD 的中点, GC 垂直于正方形 $ABCD$ 所在平面, 且 $GC=2$, 求点 B 到平面 EFG 的距离为 ()
- A. 3 B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{11}}{11}$ D. $\frac{2\sqrt{11}}{11}$
4. (2021 · 福建模拟) 三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=6, AC=8, \angle BAC=90^\circ$, 若 $PA=PB=PC=5\sqrt{2}$, 则点 B 到平面 PAC 的距离为 ()



- A. $3\sqrt{2}$ B. $\frac{30\sqrt{41}}{41}$ C. $\frac{15\sqrt{34}}{17}$ D. 6
5. (多选) 已知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 为线段 AB 的中点, 点 F 在棱 AD 上移动(含端点), 则下列结论成立的是 ()
- A. 当 F 是棱 AD 的中点时, 直线 B_1C 与 EF 所成的角为 60°
- B. 直线 B_1C 与 EF 可能垂直
- C. 直线 B_1C 与 EF 可能平行
- D. 异面直线 B_1C 与 EF 所成最小角 θ 的余弦值是 $\frac{\sqrt{10}}{5}$

二、填空题

6. 如图在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=\sqrt{2}, AD=1, AA_1=1$, 已知 $B_1E \perp A_1B$, 则点 C_1 到直线 A_1B 的距离为 _____, 点 B_1 到直线 C_1E 的距离为 _____.



7. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 为 BB_1 的中点, 则点 C_1 到平面 A_1ED 的距离是 _____.
8. (2021 · 齐齐哈尔市) 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为线段 A_1B_1 的中点, F 为线段 AB 的中点, 则直线 FC 到平面 AEC_1 的距离为 _____.

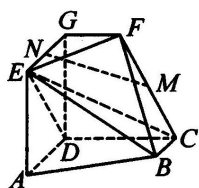


三、解答题

9. (2018 · 天津, 改编) 如图, $AD \parallel BC$ 且 $AD = 2BC$, $AD \perp CD$, $EG \parallel AD$ 且 $EG = AD$, $CD \parallel FG$ 且 $CD = 2FG$, $DG \perp$ 平面 $ABCD$, $DA = DC = DG = 2$.

(1) 若 M 为 CF 的中点, N 为 EG 的中点, 求证: $MN \parallel$ 平面 CDE ;

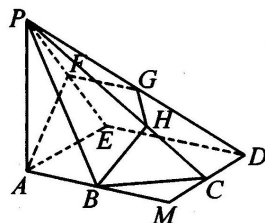
(2) 若点 P 在线段 DG 上, 且直线 BP 与平面 $ADGE$ 所成的角为 60° , 求线段 DP 的长.



10. 如图, 正方形 $AMDE$ 的边长为 2, B, C 分别为 AM, MD 的中点. 在五棱锥 $P-ABCDE$ 中, F 为棱 PE 的中点, 平面 ABF 与棱 PD, PC 分别交于点 G, H .

(1) 求证: $AB \parallel FG$;

(2) 若 $PA \perp$ 底面 $ABCDE$, 且 $PA = AE$, 求直线 BC 与平面 ABF 所成角的大小, 并求线段 PH 的长.

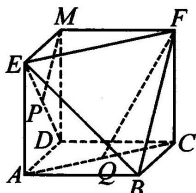




提升探究

11. 如图所示, 已知四边形 $ABCD$ 、 $EADM$ 和 $MDCF$ 都是边长为 a 的正方形, 点 P 、 Q 分别是 ED 和 AC 的中点, 求:

- (1) P 点到平面 EFB 的距离;
- (2) 异面直线 PM 与 FQ 的距离.



12. 已知 $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2)$, $c = (x_3, y_3, z_3)$, 定义一种运算: $(a \times b) \cdot c = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1$. 在平行六面体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 中, $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 2)$, $\overrightarrow{AA_1} = (1, -1, 1)$.

(1) 证明: 平行六面体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 是直四棱柱;

(2) 计算 $|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AA_1}|$, 并求该平行六面体的体积, 说明 $|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AA_1}|$ 的值与平行六面体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 体积的关系.

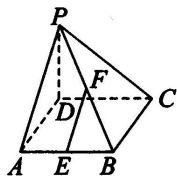




13. 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PD=DC$, E, F 分别是棱 AB, PB 的中点.

(1) 求证: $EF \perp CD$;

(2) 在平面 PAD 内求一点 G , 使 $GF \perp$ 平面 PCB .



§ 1.4.2(2) 空间向量与空间角(一)

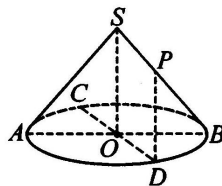
■ 基础巩固

一、选择题

1. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, M, N 分别为 PA, PB 的中点, 且侧面与底面所成二面角的正切值为 $\sqrt{2}$, 则异面直线 DM 与 AN 所成角的余弦值为 ()

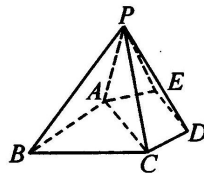
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{12}$

2. 如图, 在圆锥 SO 中, AB, CD 为底面圆的两条直径, $AB \cap CD = O$, 且 $AB \perp CD$, $SO = OB = 2$, P 为 SB 的中点, 则异面直线 SA 与 PD 所成角的正切值为 ()



A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

3. 如图, 在五棱锥 $P-ABCDE$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCDE$, $AB \parallel CD$, $AC \parallel ED$, $AE \parallel BC$, $\angle ABC = 45^\circ$, $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 2AE = 4$. $\triangle PAB$ 是等腰三角形, 则直线 PB 与平面 PCD 所成角为 ()

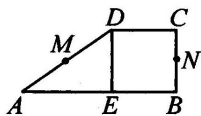


A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$

4. 如图所示, M, N 是直角梯形 $ABCD$ 两腰的中点, $DE \perp AB$ 于 E , 现将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 使二面角 $A-DE-B$ 为 45° , 此时点



A 在平面 $BCDE$ 内的射影恰为点 B , 则 M , N 的连线与 AE 所成的角的大小为 ()



A. 45° B. 90° C. 135° D. 150°

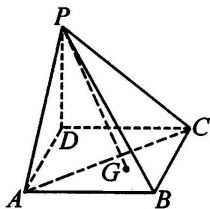
5. (多选) 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = AA_1 = 1$, 点 P 满足 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{BB_1}$, 其中 $\lambda \in [0, 1], \mu \in [0, 1]$, 则 ()

- A. 当 $\lambda=1$ 时, $AP+PB_1$ 的最小值为 $\sqrt{5}$
- B. 当 $\mu=1$ 时, 三棱锥 $P-A_1AB$ 的体积为定值
- C. 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时, 存在两个点 P , 使得 $A_1P \perp BP$
- D. 当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时, 有且仅有一个点 P , 使得 $A_1B \perp$ 平面 AB_1P

二、填空题

6. 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都是 1, 且 $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle BAD = 60^\circ$, 则 AA_1 与底面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 .

7. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $ABCD$ 为正方形, 且 $PD=AB=1$, G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则 PG 与底面所成的角 θ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



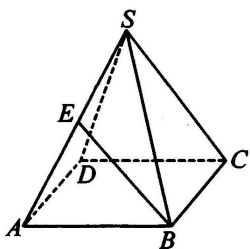
8. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等, A_1 在底面 ABC 上的射影为 BC 的中点, 则异面直线 AB 与 CC_1 所成的角的余弦值为 $\frac{1}{2}$.

三、解答题

9. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=a$, $BC=b$, $AA_1=c$, 求异面直线 BD_1 和 B_1C 所成角的余弦值.



10. 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧棱长为 $\sqrt{2}$, 底面的边长为 $\sqrt{3}$, E 是 SA 的中点, 求异面直线 BE 和 SC 所成的角.

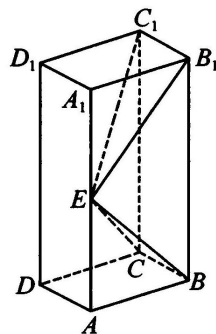


提升探究

11. (2019 · 全国 II 卷(理)) 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, 点 E 在棱 AA_1 上, $BE \perp EC_1$.

(1) 证明: $BE \perp$ 平面 EB_1C_1 .

(2) 若 $AE = A_1E$, 求二面角 $B-EC-C_1$ 的正弦值.



12. (2021 · 山东高三) 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $\angle BCD = 90^\circ$, $BC = CD = 1$, $\angle ACB = \angle ACD = \theta$.

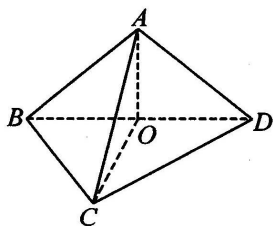
(1) 证明: $AC \perp BD$;

(2) 有三个条件: ① $\theta = 60^\circ$;

② 直线 AC 与平面 BCD 所成的角为 45° ;

③ 二面角 $A-CD-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

请你从中选择一个作为条件, 求直线 BC 与平面 ACD 所成的角的正弦值.



13. 在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 外作等边 $\triangle BCQ$ (如图 1), 将 $\triangle BCQ$ 沿 BC 折起到 $\triangle PBC$ 处, 使得 $PD = 2\sqrt{2}$, 得到四棱锥 $P-ABCD$, E 为棱 AB 的中点 (如图 2).

(1) 求证: 平面 $PDE \perp$ 平面 PCD ;

(2) 求二面角 $E-PD-A$ 的正弦值

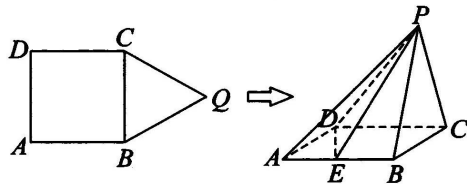


图 1

图 2



§2.4.2(3) 空间向量与空间角(二)

■ 基础巩固

一、选择题

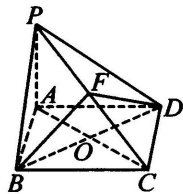
1. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB = \sqrt{2}BB_1$, 则 AB_1 与 C_1B 所成角的大小为

()

A. 60° B. 75° C. 105° D. 90°

2. 如图所示, 已知点 P 为菱形 $ABCD$ 外一点, 且 $PA \perp$ 面 $ABCD$, $PA = AD = AC$, 点 F 为 PC 中点, 则二面角 $C-BF-O$ 的正切值为

()

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. (2021 · 江西模拟) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 和空间任意直线 l , 若直线 l 与直线 AB 所成的角为 α_1 , 与直线 CC_1 所成的角为 α_2 , 与平面 $ABCD$ 所成的角为 β_1 , 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 β_2 , 则 ()

A. $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ B. $\alpha_1 + \alpha_2 \geq \frac{\pi}{2}$ C. $\beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{2}$ D. $\beta_1 + \beta_2 \geq \frac{\pi}{2}$

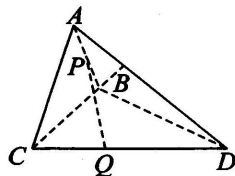
4. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面为棱长为 1 的正三角形, 侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 ABC , 点 D 在棱 BB_1 上, 且 $BD = 1$, 若 AD 与平面 AA_1C_1C 所成的角为 α , 则 $\sin \alpha$ 的值是

()

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

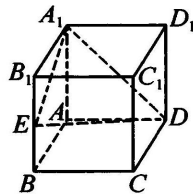
5. (多选) 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 平面 $ABC \perp$ 平面 BCD , $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 均为

等腰直角三角形, 且 $\angle BAC = \angle BCD = 90^\circ$, $BC = 2$, P 是线段 AB 上的动点 (不包括端点). 若线段 CD 上存在点 Q , 使得异面直线 PQ 与 AC 成 30° 的角, 则线段 PA 的长度可能为 ()

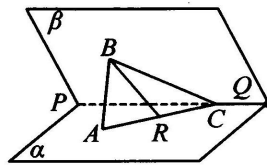
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题

6. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 为 BB_1 的中点, 则平面 A_1ED 与平面 $ABCD$ 所成的锐二面角的余弦值为 _____.



7. 已知二面角 $\alpha-PQ-\beta$ 为 $\frac{\pi}{3}$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $C \in PQ$, R 为线段 AC 的中点, $\angle ACP = \angle BCP = \frac{\pi}{6}$, $CA = CB = 2$, 则直线 BR 与平面 α 所成角的大小为 _____.



8. (2022 · 河南南阳) 如图一副直角三角板, 现将两三角板拼成直二面角, 得到四面体 $ABCD$, 则下列叙述正确的是 _____.

①平面 BCD 的法向量与平面 ACD 的法向量垂直;

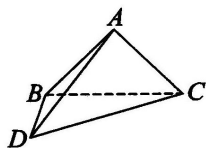
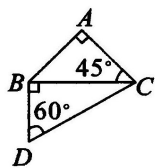
②异面直线 BC 与 AD 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$;





③四面体 $ABCD$ 有外接球且该球的半径等于棱 BD 长;

④直线 DC 与平面 ABC 所成的角为 30° .

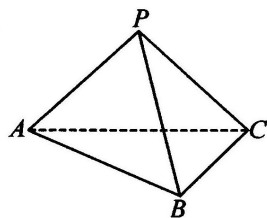


三、解答题

9. 如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA=PB=PC=AC=4$, $AB=BC=2\sqrt{2}$.

(1)求证:平面 $ABC \perp$ 平面 APC ;

(2)求直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值.



10. 如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle DAB=60^\circ$, $AB=2AD$, $PD \perp$ 底面 $ABCD$.

(1)证明: $PA \perp BD$;

(2)若 $PD=AD$,求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.

