



参 考 答 案

第一章 空间向量与立体几何

1.1 空间向量及其运算

§ 1.1.1(1) 空间向量及其加减运算

三、典型例题

例 1 答案 C

解析 ①假命题,两个向量相等不一定起点相同终点相同;

②假命题.根据向量相等的定义,要保证两向量相等,不仅模要相等,而且方向还要相同,但②中向量 a 与 b 的方向不一定相同;

③真命题,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{A_1C_1}$ 模相等且方向相同;

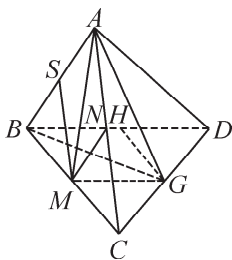
④假命题.空间中任意两个单位向量模均为 1,但方向不一定相同,故不一定相等.

⑤真命题

变式 1 答案 ABC

解析 由题可知单位向量 $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{B_1B}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{C_1C}, \overrightarrow{DD_1}, \overrightarrow{D_1D}$, 共 8 个,故 A 正确;与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{D_1C_1}, \overrightarrow{DC}$, 共 3 个,故 B 正确;向量 $\overrightarrow{AA_1}$ 的反向量有 $\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{B_1B}, \overrightarrow{C_1C}, \overrightarrow{D_1D}$, 共 4 个,故 C 正确;因为 $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1}$, 向量 $\overrightarrow{A_1D_1}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{AA_1}$ 有一个公共点 A_1 , 而点 A_1, B_1, D_1 都在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内,点 A 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 外,所以向量 $\overrightarrow{A_1D_1}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{CC_1}$ 不共面,故 D 错误. 故选 ABC.

例 2 解 (1) 如图所示, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.



(2) $\because M, G, H$ 分别为 BC, CD, BD 的中点,

$\therefore$ 四边形 $BMGH$ 为平行四边形.

$$\therefore \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BG},$$

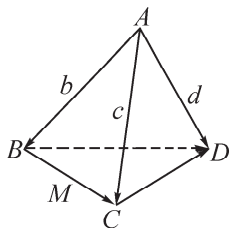
从而 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$.

(3) 分别取 AB, AC 的中点 S, N , 连接 SM, AM, MN , 则四边形 $ASMN$ 为平行四边形,

$$\therefore \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM},$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MG}.$$

变式 2 解 如图所示



$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = d - b,$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = c - b,$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = d - c.$$

例 3 证明 设 E, E_1 分别是平行六面体的面 $ABCD$ 与 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心, 于是有 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) + (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}) = 2\overrightarrow{PE} + 2\overrightarrow{PE} = 4\overrightarrow{PE}$

同理可证: $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{PC_1} + \overrightarrow{PD_1} = 4\overrightarrow{PE_1}$,

又 $\because$ 因为平行六面体对角线的交点 O 是 $\overline{EE_1}$ 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PE_1} = 2\overrightarrow{PO},$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{PC_1} + \overrightarrow{PD_1} = 4\overrightarrow{PE} + 4\overrightarrow{PE_1} = 8\overrightarrow{PO}.$$

变式 3 证明 连结 BG , 延长交 CD 于 E ,

由 G 为重心知 $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$.

$\because E$ 为 CD 的中点.

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD},$$



$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} [(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})] = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).\end{aligned}$$

四、备选题

例 1 答案 24, 3, 4, 24, 8

解 观察知, 在以正方体顶点为端点的向量中, 每条棱对应 2 个单位向量, 故单位向量有 24 个; 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有 3 个; 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 互为相反向量的向量有 4 个; 模长为 $\sqrt{2}$ 的向量有 24 个; 模长为 $\sqrt{3}$ 的向量有 8 个.

例 2 答案 B

解 特例考查不妨设 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 五点共线, 且 $|\overrightarrow{A_1A_2}| = |\overrightarrow{A_2A_3}| = |\overrightarrow{A_3A_4}| = |\overrightarrow{A_4A_5}|$, 则满足题意的点 M 恰为 $\overrightarrow{A_1A_5}$ 的中点, 存在. 反证法证明唯一性: 假设满足条件的点除了 M 外还有点 N , 那么 $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} + \overrightarrow{MA_5} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{NA_1} + \overrightarrow{NA_2} + \overrightarrow{NA_3} + \overrightarrow{NA_4} + \overrightarrow{NA_5} = \mathbf{0}$, 得 $5\overrightarrow{MN} = \mathbf{0}$, 所以 $\overrightarrow{MN} = \mathbf{0}$, 则点 M 与点 N 重合, 与假设矛盾, 所以满足条件的点只有一个.

五、小结反思

略

练习

基础巩固

1. 答案 A

解析 对于 A, 因为空间向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为相反向量, 所以其长度相等, 故 A 正确; 对于 B, 将空间任意方向上的单位向量平移到一个起点, 则它们的终点构成一个球面, 故 B 错误; 对于 C, 空间向量可以用空间中一条有向线段表示, 但空间向量不是有向线段, 故 C 错误; 对于 D, 两个空间向量不相等, 它们的模可能相等, 也可能不相等, 故 D 错误. 故选 A.

2. 答案 D

解析 由向量加法可知选 D.

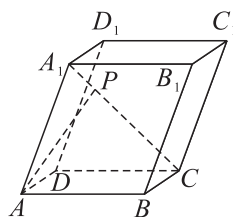
3. 答案 D

解析 由题图, $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 而 $\overrightarrow{AB} =$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MA} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA}, \text{ 所以 } \overrightarrow{NM} = \\ &= -\frac{1}{3} \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{2}{3} \overrightarrow{OA} - \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3} \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{b} - \frac{1}{2} \mathbf{c}.\end{aligned}$$

4. 答案 A

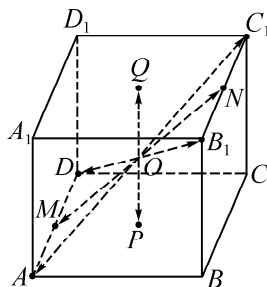
解析 如图,



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{4} \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{4} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1}) \\ &= \frac{3}{4} \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4} \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \\ &= \frac{1}{4} \overrightarrow{AD}, \text{ 所以 } x = \frac{3}{4}, y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{4}, \text{ 所以 } x + y + z = \\ &= \frac{5}{4}, \text{ 故选 C}.\end{aligned}$$

5. 答案 ABC

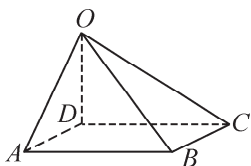
解析 对于 A 选项, 取 AD, B_1C_1 的中点 M, N , 则: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = 2\overrightarrow{ON}$, 两者不是一对相等向量; 对于 B 选项, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{D_1A_1}$, 两者是一对相等向量; 对于 C 选项, $\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{C_1C}$, 两者是一对相反向量; 对于 D 选项, 设底面 $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ 的中心分别为 P, Q , 则: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} = 4\overrightarrow{OQ}$, 两者是一对相反向量.



6. 答案 $\overrightarrow{AD}$

7. 答案 0

解析 如图,



$$a-b=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}, c-d=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC},$$

$$\text{故 } a-b+c-d=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}.$$

8. 答案 ①③

9. 解 (1) $3(2a-b-4c)-4(a-2b+3c)$
 $=6a-3b-12c-4a+8b-12c$
 $=2a+5b-24c$

(2) $\overrightarrow{OA}-[\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})]$
 $=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$
 $=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$

10. 解 (1) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1P}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}+\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}.$

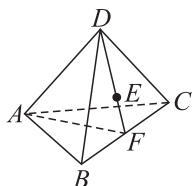
(2) $\overrightarrow{A_1N}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}.$

(3) $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NC_1}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})+(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=\frac{3}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{3}{2}\mathbf{c}.$

提升探究

11. 答案 C

解析 如图,取 BC 的中点 F ,则 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BF}$. 因为 E 为 $\triangle BCD$ 的重心,即线段 DE 上靠近点 F 的三等分点,所以 $\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DF}$,则 $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FD}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}=\mathbf{0}$. 故选 C.



12. 证明 $\because$ 平行六面体的六个面均为平行四边形,
 $\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'},$
 $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'},$
 $\therefore \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}),$

又由于 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'},$

$$\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'},$$

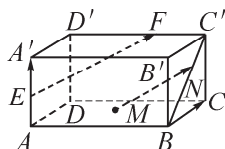
$$\therefore \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}=2\overrightarrow{AC'}.$$

13. 解 (1) 如图,取 $\overrightarrow{AA'}$ 的中点为 E ,则 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{EA'}$,

又 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{D'C'}$, 取 F 为 $D'C'$ 的一个三等分点使 $\overrightarrow{D'F}=\frac{2}{3}\overrightarrow{D'C'}$, 则 $\overrightarrow{D'F}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,

$$\text{所以 } \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'F}=\overrightarrow{EF}$$

(说明:表示法不唯一).



(2) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})+\frac{3}{4}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'})$$

$$=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})$$

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AA'},$$

$$\text{所以 } \alpha=\frac{1}{2}, \beta=\frac{1}{4}, \gamma=\frac{3}{4}.$$

§ 1.1.1(2) 空间向量的数乘运算

三、典型例题

例 1 答案 BCD

解析 (1) 当 $\lambda=1$ 时, $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$, 所以 $\overrightarrow{CP}=\mu\overrightarrow{BB_1}$, 则 $\overrightarrow{CP}\parallel\overrightarrow{BB_1}$, 即点 P 在棱 CC_1 上, 故 A 错误; 同理当 $\mu=1$ 时, $\overrightarrow{B_1P}\parallel\overrightarrow{BC}$, 故点 P 在棱 B_1C_1 上, 故 B 正确; 当 $\lambda+\mu=1$ 时, $\mu=1-\lambda$, 所以 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+(1-\lambda)\overrightarrow{BB_1}$, 即 $\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{B_1C}$, 故点 P 在线段 B_1C 上, 故 C 正确; 当 $\lambda=\mu$ 时, $\overrightarrow{BP}=\lambda(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1})=\lambda\overrightarrow{BC_1}$, 故点 P 在线段 BC_1 上, 故 D 正确. 故选 BCD.

变式 1 证明 设 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}, \overrightarrow{AD}=\mathbf{b}, \overrightarrow{AA_1}=\mathbf{c}.$

$$\therefore \overrightarrow{A_1E}=2\overrightarrow{ED_1}, \overrightarrow{A_1F}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FC},$$

$$\therefore \overrightarrow{A_1E}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1D_1}, \overrightarrow{A_1F}=\frac{2}{5}\overrightarrow{A_1C}.$$



$$\therefore \overrightarrow{A_1E} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \mathbf{b}, \overrightarrow{A_1F} = \frac{2}{5} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1}) = \frac{2}{5} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}) = \frac{2}{5} \mathbf{a} + \frac{2}{5} \mathbf{b} - \frac{2}{5} \mathbf{c}.$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{A_1F} - \overrightarrow{A_1E} = \frac{2}{5} \mathbf{a} - \frac{4}{15} \mathbf{b} - \frac{2}{5} \mathbf{c} = \frac{2}{5} \left(\mathbf{a} - \frac{2}{3} \mathbf{b} - \mathbf{c} \right).$$

$$\text{又 } \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA_1} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3} \mathbf{b} - \mathbf{c} + \mathbf{a} = \mathbf{a} - \frac{2}{3} \mathbf{b} - \mathbf{c},$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{2}{5} \overrightarrow{EB}. \therefore E, F, B \text{ 三点共线}.$$

例2 答案 B

解析 由 $6 \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2 \overrightarrow{OB} + 3 \overrightarrow{OC}$, 得 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) + 3(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP})$, 即 $\overrightarrow{AP} = 2 \overrightarrow{PB} + 3 \overrightarrow{PC}$, 所以 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ 共面. 因为 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ 有公共点 P , 所以 P, A, B, C 四点共面. 故选 B.

变式2 答案 A

例3 证明 (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD},$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OE} = k \cdot \overrightarrow{OC} - k \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = k \overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OE} \\ &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}, \end{aligned}$$

$\therefore E, F, G, H$ 共面.

$$(2) \because \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k \overrightarrow{AB},$$

$$\text{又 } \because \overrightarrow{EG} = k \cdot \overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG} \parallel \overrightarrow{AC},$$

所以, 平面 $AC \parallel$ 平面 EG .

变式3 答案 $\frac{2}{5}$

解析 因为 $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \overrightarrow{BC} = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \overrightarrow{CD} = \mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2$, 所以 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$. 因为 A, C, D 三点共线, 所以 $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{CD}$, 所以 $2 - 5k = 0$, 所以 $k = \frac{2}{5}$.

四、备选例题

例1 分析 由共线向量定理, 知要判断 $\overrightarrow{CE}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ 是否共线, 即看能否找到 λ , 使 $\overrightarrow{CE} = \lambda \overrightarrow{MN}$ 成立.

解 $\because M, N$ 分别是 AC, BF 的中点, 而四边形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 都是平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} + \frac{1}{2} \overrightarrow{FB} =$$

$$\frac{1}{2} (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2} (-\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BE}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}) =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{CE}.$$

$\therefore \overrightarrow{CE} \parallel \overrightarrow{MN}$, 即 $\overrightarrow{CE}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ 共线.

例2 解 连接 BD, BG ,

因为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$, 且 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,

所以 $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$,

因为 $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC}$,

所以 $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$,

因为 $\frac{PH}{HC} = \frac{1}{2}$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PH} = \frac{1}{3} \overrightarrow{PC} = \frac{1}{3} (-\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD})$$

$$= -\frac{1}{3} \overrightarrow{PA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{PB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{PD}$$

又因为 $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{PH} - \overrightarrow{PA}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AH} = -\frac{4}{3} \overrightarrow{PA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{PB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{PD}$$

因为 $\frac{AG}{AH} = m$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AG} = m \overrightarrow{AH} = -\frac{4m}{3} \overrightarrow{PA} + \frac{m}{3} \overrightarrow{PB} + \frac{m}{3} \overrightarrow{PD}$$

因为 $\overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AG}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{BG} = \left(1 - \frac{4m}{3}\right) \overrightarrow{PA} + \left(\frac{m}{3} - 1\right) \overrightarrow{PB} + \frac{m}{3} \overrightarrow{PD}$$

又 G, B, P, D 四点共面, 所以 $1 - \frac{4m}{3} = 0$, 解得 $m = \frac{3}{4}$

小结反思

本课概念密集, 注意体验从平面向量拓展到空间向量的过程. 检验一下是否达成了学习目标.

练习

基础巩固

1. 答案 A

解析 根据共面向量的概念, 知只要三个向量在一个平面内, 或者与同一个平面平行即可, ①错误; ②根据共线向量的概念, 以及零向量的性质可知零向量与任意向量共线, ②正确; 若 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则不存在实数 λ , 使得 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, ③错误; ④需加条件 O 不在直线 AB 上, 否则点 P 在直线 AB 上未必有 $\overrightarrow{OP} = (1 -$



$t) \cdot \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB}$ 或 $\overrightarrow{OP} = x \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB}$ (其中 $x + y = 1$), ④错误.

2. 答案 A

解析 由 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, 所以直线 BD, AC 重合或互相平行,

因此 A, B, C, D 四点共面,

当 $ABCD$ 是平行四边形时, 显然 A, B, C, D 四点共面, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ 显然不成立.

3. 答案 A

解析 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} = 2(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$.

4. 答案 D

解析 $\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}) = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$. 故选 D.

5. 答案 ACD

解析 对于 A, 若 $AB \parallel CD$, 则一定有 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, 故 A 正确; 对于 B, 由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 反向共线, 可得 $||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, 故 B 错误; 对于 C, 由 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$, 得 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (\frac{1}{4}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}) + (\frac{1}{4}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OA})$, 即 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, 所以 P, A, B, C 四点共面, 故 C 正确; 对于 D, 因为 P, A, B, C 为空间四点, 且有 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PB} + \mu \overrightarrow{PC}$ ($\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ 不共线) 当 $\lambda + \mu = 1$, 即 $\mu = 1 - \lambda$ 时, 可得 $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC} = \lambda(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC})$, 即 $\overrightarrow{CA} = \lambda \overrightarrow{CB}$, 所以 A, B, C 三点共线, 反之也成立, 即 $\lambda + \mu = 1$ 是 A, B, C 三点共线的充要条件, 故 D 正确. 故选 ACD.

6. 答案 0

解析 由共面向量基本定理可知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面时, $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}$ 必有 $x = y = z = 0$, $\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

7. 答案 $\frac{1}{2}$

解析 在正方体中, $\overrightarrow{D_1B} = \overrightarrow{D_1A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D_1A} + \overrightarrow{D_1C_1}$. 设 $D_1F = \lambda FC_1$, 又 $D_1E = \frac{1}{3}EB$, 所以 $4\overrightarrow{D_1E} = \overrightarrow{D_1A} + \frac{\lambda+1}{\lambda}\overrightarrow{D_1F}$, 即 $\overrightarrow{D_1E} = \frac{1}{4}\overrightarrow{D_1A} + \frac{\lambda+1}{4\lambda}\overrightarrow{D_1F}$. 因为

A, E, F 三点共线, 所以 $\frac{1}{4} + \frac{\lambda+1}{4\lambda} = 1$, 解得 $\lambda = \frac{1}{2}$, 即

$$D_1F = \frac{1}{2}FC_1.$$

8. 答案 ①②③

解析 ①正确, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, 则 A, B 重合; ② $3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = 5\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$, 由 $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$ 知其正确; ③ P 与不共线三点 A, B, C 共面, 且 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ ($x, y, z \in \mathbf{R}$), 则 $x + y + z = 1$, 得 $\lambda = -2$, 故正确.

故正确命题的序号是①②③.

9. 解 (1) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$, 得 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OM}$,

$$\therefore \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}),$$

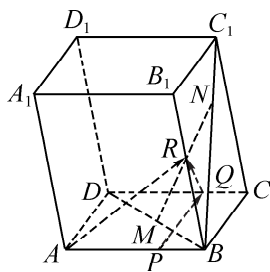
$$\text{即 } \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 共面.

(2) 由 (1) 知向量 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 共面, 三个向量中又有公共点 M , $\therefore M, A, B, C$ 共面. 即点 M 在平面 ABC 内.

10. 解 (1) 在 AB 上截取 $AP = \frac{2}{3}AB$, 过点 P 作 $PQ \parallel BC$, 交 CD 于点 Q , 再过点 Q 作 $QR \parallel CC_1$, 且 $QR = \frac{1}{2}CC_1$, 连接 AR , 如图, 则 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$, 所以 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AR}$,

在图中表示如下:



(2) 因为 M 是底面 $ABCD$ 的中心, N 是侧面 BCC_1B_1 对角线 BC_1 上的点, 且 $C_1N = \frac{1}{4}C_1B$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) + \frac{3}{4}(\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} +$$



$$\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1},$$

$$\text{又 } \overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD} + \gamma\overrightarrow{AA_1},$$

$$\text{所以 } \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{3}{4}.$$

提升探究

11. 答案 A

解析 因为 $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + 2y\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, 点 D 在 $\triangle ABC$ 确定的平面内, 所以 $x + 2y - 1 = 1$, 即 $x = 2 - 2y$. 所以 $x^2 + y^2 = (2 - 2y)^2 + y^2 = 5y^2 - 8y + 4 = 5\left(y - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5}$, 所以当 $y = \frac{4}{5}$ 时, $x^2 + y^2$ 取得最小值 $\frac{4}{5}$. 故选 A.

12. 答案 A

$$\text{解析 因为 } \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC},$$

$$\text{所以 } 12\overrightarrow{OD} = 6\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC},$$

$$\text{所以 } 6(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = 4(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}), \text{ 即}$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC},$$

所以 A, B, C, D 四点共面, 所以充分性成立; 但当 A, B, C, D 四点共面时, 存在 $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$, 则必要性不成立. 故选 A.

$$13. \text{解 } \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PB_1} + 7\overrightarrow{BA} + 6\overrightarrow{AA_1} + 4\overrightarrow{A_1D_1}$$

$$= \overrightarrow{PB_1} - \overrightarrow{AA_1} + 7(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}) + 4\overrightarrow{A_1D_1}$$

$$= \overrightarrow{PB_1} - \overrightarrow{BB_1} + 7\overrightarrow{BA_1} + 4\overrightarrow{A_1D_1}$$

$$= \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{B_1B} + 7\overrightarrow{BA_1} + 4\overrightarrow{A_1D_1}$$

$$= \overrightarrow{PB} + 7\overrightarrow{BA_1} + 4\overrightarrow{A_1D_1}$$

$$= \overrightarrow{PB} + 7(\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PA_1}) + 4(\overrightarrow{A_1P} + \overrightarrow{PD_1})$$

$$= -6\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PA_1} + 4\overrightarrow{PD_1},$$

由 $-6 + 3 + 4 = 1$, 得 M, B, A_1, D_1 四点共面, 故 M 点在平面 BA_1D_1 内.

§ 1.1.2 空间向量的数量积运算

二、知识要点

(1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ 吗? 举例说明.

(2) 若 $a \cdot b = a \cdot c$, 则 $b = c$ 吗? 举例说明.

(3) 若 $a \cdot b = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$ 吗? 为什么?

三、典型例题

例 1 答案 60°

解析 由题意可得

$$\begin{cases} (a+3b) \cdot (7a-5b) = 0 \\ (a-4b) \cdot (7a-2b) = 0 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} 7a^2 - 15b^2 + 16a \cdot b = 0 \\ 7a^2 + 8b^2 - 30a \cdot b = 0 \end{cases},$$

上述两式相减可得 $23b^2 - 46a \cdot b = 0$,

$$\text{即 } a \cdot b = \frac{1}{2}b^2,$$

$$\text{同理可得 } a \cdot b = \frac{1}{2}a^2,$$

$$\text{所以 } |a| = |b|,$$

$$\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \langle a, b \rangle = 60^\circ,$$

所以向量 a 与 b 的夹角为 60° .

变式 1 解 $\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC} \rangle - |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot$$

$$\cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB} \rangle$$

$$= 8 \times 4 \times \cos 135^\circ - 8 \times 6 \times \cos 120^\circ$$

$$= 24 - 16\sqrt{2}$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{24 - 16\sqrt{2}}{8 \times 5} =$$

$$\frac{3 - 2\sqrt{2}}{5},$$

所以, OA 与 BC 的夹角的余弦值为 $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{5}$.

说明: 由图形求向量的夹角时易出错, 如 $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC} \rangle = 135^\circ$ 易错写成 $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC} \rangle = 45^\circ$, 切记!

例 2 解 由于 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

$$\text{故 } |\overrightarrow{AC}|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA'}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} = 4^2 + 3^2 + 5^2 + 2 \times 0 + 2 \times \frac{15}{2} + 2 \times 10 = 85.$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{85}.$$

变式 2 答案 C

解析 由已知得 $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC},$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{PC}|^2 = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 = |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$$

$$2^2 + 1^2 + 3^2 + 2 \times 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \times 2 \times 3 \times$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \times 1 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3,$$



所以 $|\overrightarrow{PC}| = \sqrt{3}$. 故选 C.

例 3 证明 在 α 内作不与 m, n 重合的任一直线 g , 在 l, m, n, g 上取非零向量 $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{g}$, $\because m, n$ 相交,

$\therefore$ 向量 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ 不平行, 由共面定理可知, 存在唯一有序实数对 (x, y) , 使 $\boldsymbol{g} = x\boldsymbol{m} + y\boldsymbol{n}$,

$$\therefore \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{g} = x\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{m} + y\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n},$$

$$\text{又 } \because \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{m} = 0, \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n} = 0,$$

$$\therefore \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{g} = 0, \therefore \boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{g}, \text{ 即 } \boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{g},$$

所以, 直线 l 垂直于平面 α 内的任意一条直线, 即得 $l \perp \alpha$.

变式 3 证明 连接 ON , 设 $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = \theta$.

设 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}, \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$, 则 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}|$.

$$\text{又 } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{4}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}), \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) = \frac{1}{4}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} -$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) = \frac{1}{4}(|\boldsymbol{a}|^2 \cos \theta -$$

$$|\boldsymbol{a}|^2 \cos \theta - |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{a}|^2) = 0,$$

所以 $\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{BC}$, 即 $OG \perp BC$.

四、备选例题

例 1 解 由题意知 $|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{2}, |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{2}$,

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC},$$

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$,

$$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

$$\because AB \perp AD, \therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} = 0,$$

$$\because AB \perp BC, \therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = 1,$$

$$\text{又 } \because |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{2}, |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{2},$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{DC} \rangle = \frac{\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{DC}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \langle \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{DC} \rangle \in [0, \pi], \therefore \langle \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{DC} \rangle = \frac{\pi}{3},$$

$\therefore$ 异面直线所成的角为锐角或直角,

$$\therefore PB \text{ 与 } CD \text{ 所成的角为 } \frac{\pi}{3}.$$

例 2 解 因为 $\angle ACD = 90^\circ$, 所以 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$,

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$. 因为 AB 与 CD 成 60° 角,

所以 $\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD} \rangle = 60^\circ$ 或 $\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD} \rangle = 120^\circ$.

因为 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$,

$$\text{所以 } |\overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD},$$

$$\text{则 } |\overrightarrow{BD}|^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 + 2^2 + 0 + 2 \times 2 \times 2 \times \cos \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD} \rangle + 0 = 10 + 8 \cos \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD} \rangle.$$

$$\text{当 } \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD} \rangle = 60^\circ \text{ 时, } |\overrightarrow{BD}|^2 = 10 + 8 \cos \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD} \rangle = 10 + 8 \times \cos 60^\circ = 14,$$

$$\text{即 } |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{14};$$

$$\text{当 } \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD} \rangle = 120^\circ \text{ 时, } |\overrightarrow{BD}|^2 = 10 + 8 \cos \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD} \rangle = 10 + 8 \times \cos 120^\circ = 6,$$

$$\text{即 } |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{6}.$$

综上, 可知 B, D 之间的距离为 $\sqrt{14}$ 或 $\sqrt{6}$.

小结反思

本小节涉及的向量方法非常丰富, 既有空间向量数量积运算, 又有空间向量数量积性质的应用: 求解空间距离、角度, 证明垂直关系等. 学习时要注重分析题意, 寻求解题思路, 构建这类问题的算法流程. 一般可按以下算法流程思考.

第一步: 弄清几何问题的条件, 考虑如何把已知的几何条件转化为向量表示 (如取直线的方向向量等);

第二步: 挖掘图形中蕴含的向量运算结构, 考虑能否用已知向量表示未知的向量;

第三步: 弄清几何问题的结论, 考虑如何对已经表示出来的向量进行运算, 获得所需要的结论.

练习

基础巩固

1. 答案 B

2. 答案 B

解析 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 > 0,$$

$$\therefore \cos \angle CBD = \cos \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} > 0.$$

$\therefore \angle CBD$ 为锐角, 同理, $\angle BCD$ 与 $\angle BDC$ 均为锐角,

$\therefore \triangle BCD$ 为锐角三角形.

3. 答案 C

解析 如图, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}), \overrightarrow{EF} =$