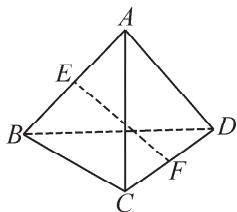


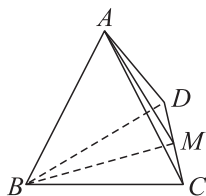


$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AD}^2 = \\ \overrightarrow{AB}^2 &= 1, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}, \text{所以} \\ |\overrightarrow{EF}|^2 &= \frac{1}{4}(1+1+1+1-1-1) = \frac{1}{2}, \text{所以} |\overrightarrow{EF}| = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$



4. 答案 D

解析 如图,取 CD 的中点 M ,连接 AM, BM ,所以 $AM \perp CD, BM \perp CD, AM \cap BM = M$,因为 $AM, BM \subset$ 平面 ABM ,所以 $CD \perp$ 平面 ABM ,又 $AB \subset$ 平面 ABM ,所以 $CD \perp AB$,则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$,故 A 正确; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$,故 B 正确;因为 $AD = AB = CB = CD = 1, \angle DAB = \angle BCD = 60^\circ$,所以 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AB}| \cos \angle BAD = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{CB}| |\overrightarrow{CD}| \cos \angle BCD = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,所以 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$,故 C 正确;因为 $|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|^2 = 4|\overrightarrow{AB}|^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + |\overrightarrow{BC}|^2 = 4 + 4 \times 1 \times 1 \times \cos 120^\circ + 1 = 3$,所以 $|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = \sqrt{3}$,故 D 错误. 故选 D.



5. 答案 AC

解析 在空间四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 的夹角为 60° ,所以 $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = a^2$,故 A 正确; $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DB}$ 的夹角为 120° ,所以 $2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} = 2|\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{DB}| \cos 120^\circ = -a^2$,故 B 错误;因为点 F, G 分别是 AD, DC 的中点,所以 $FG \parallel AC$,且 $FG = \frac{1}{2}AC$,所以 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{FG}$ 的夹角为 0° ,所以 $2\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{AC} = 2|FG| \times |AC| \cos 0^\circ = a^2$,故 C 正确;因为点 E, F 分

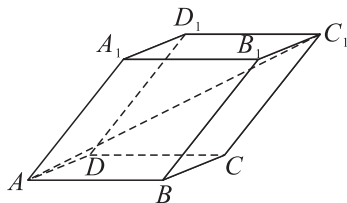
别是 AB, AD 的中点,所以 $EF \parallel BD$,所以 $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CB}$ 的夹角为 120° ,所以 $2\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{CB} = 2 \times |\overrightarrow{EF}| \times |\overrightarrow{CB}| \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}a^2$,故 D 错误. 故选 AC.

6. 答案 2

解析 $\because \mathbf{c} - \mathbf{a} = (0, 0, 1 - x), \therefore (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot 2\mathbf{b} = (0, 0, 1 - x) \cdot (2, 4, 2) = 2 - 2x = -2$,解得 $x = 2$.

7. 答案 $\frac{1}{6}$

解析 如图, $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB}$,



所以 $|\overrightarrow{AC_1}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{AA_1}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 3 + 6\cos \theta = 4$,故 $\cos \theta = \frac{1}{6}$.

8. 答案 $-\frac{3}{2}$

解析 $\because \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \lambda |\mathbf{b}|^2 = 18 + \lambda \times 3\sqrt{2} \times 4 \times \cos 135^\circ + 3\sqrt{2} \times 4 \times \cos 135^\circ + \lambda \times 16 = 6 - 12\lambda + 16\lambda = 6 + 4\lambda$,
 $\therefore \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0 = 6 + 4\lambda, \therefore \lambda = -\frac{3}{2}$.

9. 解 (1)证明:设 $\overrightarrow{VA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{VB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{VC} = \mathbf{c}$,设正四面体的棱长为 1,

$$\text{则 } \overrightarrow{VD} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}), \overrightarrow{AO} = \frac{1}{6}(\mathbf{b} + \mathbf{c} - 5\mathbf{a}).$$

$$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{6}(\mathbf{a} + \mathbf{c} - 5\mathbf{b}), \overrightarrow{CO} = \frac{1}{6}(\mathbf{a} + \mathbf{b} - 5\mathbf{c})$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO} = \frac{1}{36}(\mathbf{b} + \mathbf{c} - 5\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c} - 5\mathbf{b}) =$$

$$\frac{1}{36}(18\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 9|\mathbf{a}|^2) = \frac{1}{36}(18 \times 1 \times 1 \times \cos 60^\circ - 9) = 0, \text{所以 } \overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BO}, \text{即 } AO \perp BO.$$

同理, $AO \perp CO, BO \perp CO$,所以 AO, BO, CO 两两垂直.

$$\begin{aligned}(2) \text{ 因为 } \overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{DV} + \overrightarrow{VM} = -\frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + \frac{1}{2}\mathbf{c} = \\ &= \frac{1}{6}(-2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c})\end{aligned}$$



$$\text{所以 } |\overrightarrow{DM}| = \sqrt{\left[\frac{1}{6}(-2a-2b+c)\right]^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } |\overrightarrow{AO}| = \sqrt{\left[\frac{1}{6}(b+c-5a)\right]^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{1}{6}(-2a-2b+c) \cdot \frac{1}{6}(b+c-5a) = \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AO} \rangle = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{又 } \langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AO} \rangle \in [0, \pi], \text{ 所以 } \langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AO} \rangle = \frac{\pi}{4}.$$

10. 证明 (1) 设 $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{CB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{CC'} = \mathbf{c}$,

根据题意, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$ 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$,

$$\therefore \overrightarrow{CE} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}, \overrightarrow{A'D} = -\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}.$$

$$\therefore \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{A'D} = -\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}b^2 = 0.$$

$$\therefore \overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{A'D}, \text{ 即 } CE \perp A'D.$$

解 (2) $\because |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{2}|\mathbf{a}|$,

$$\text{又 } |\overrightarrow{CE}| = \frac{\sqrt{5}}{2}|\mathbf{a}|,$$

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{CE} = (-\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot \left(\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}\right) = \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}|\mathbf{a}|^2,$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{CE} \rangle = \frac{\frac{1}{2}|\mathbf{a}|^2}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}|\mathbf{a}|^2} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

即异面直线 CE 与 AC' 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

提升探究

11. 答案 $3\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{6}$

解析 因为 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AF}$, 所以 $|\overrightarrow{EF}|^2 = (\overrightarrow{EA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AF})^2 = |\overrightarrow{EA'}|^2 + |\overrightarrow{A'A}|^2 + |\overrightarrow{AF}|^2 + 2\overrightarrow{EA'} \cdot \overrightarrow{A'A} + 2\overrightarrow{EA'} \cdot \overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{AF}$. 又 $AA' \perp a, AA' \perp b$, 则 $2\overrightarrow{EA'} \cdot \overrightarrow{A'A} = 0, 2\overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$. 因为两条异面直线 a, b 所成的角为 60° , 所以 $\langle \overrightarrow{EA'}, \overrightarrow{AF} \rangle = 60^\circ$ 或 120° , 故 $5^2 = 2^2 + |\overrightarrow{A'A}|^2 + 3^2 + 2 \times 2 \times 3 \times \cos \langle \overrightarrow{EA'}, \overrightarrow{AF} \rangle$, 可得 $|\overrightarrow{A'A}| = 3\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{6}$.

12. 答案 ACD

解析 令正方体的棱长为 1. 对于 A, $|\overrightarrow{AB_1} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB_1}| |\overrightarrow{AC}| \sin \frac{\pi}{3} = (\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, |\overrightarrow{AD_1} \times$

$\overrightarrow{D_1B_1}| = |\overrightarrow{AD_1}| |\overrightarrow{D_1B_1}| \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$, 故 A 正确; 对于

B, 由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 构成右手系, 知 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ 方向相反, 即 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, 故 B 错误; 对于 C, 由 $A_1C_1 \perp B_1D_1, A_1C_1 \perp BB_1$, 得 $A_1C_1 \perp$ 平面 BB_1D_1D , 又 $BD_1 \subset$ 平面 BB_1D_1D , 则 $BD_1 \perp A_1C_1$, 同理, $BD_1 \perp A_1D$, 再由右手系, 知 $\overrightarrow{A_1C_1} \times \overrightarrow{A_1D}$ 与 $\overrightarrow{BD_1}$ 共线, 故 C 正确; 对于 D, $|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}| =$

$$|\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{AC}| \sin \frac{\pi}{4} = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1, \text{ 正方体的体积为}$$

1, 故 D 正确. 故选 ACD.

13. 解 设 $\overrightarrow{B_1E} = \lambda \overrightarrow{B_1C_1} (0 \leq \lambda \leq 1)$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1E} = \overrightarrow{AB_1} + \lambda \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \lambda \overrightarrow{B_1C_1}$$

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{AC} + \lambda \overrightarrow{B_1C_1} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times \sqrt{2} \times \cos 45^\circ + \lambda \times 1 \times \sqrt{2} \times \cos 45^\circ = 1 + \lambda$$

$$\therefore \text{向量 } \overrightarrow{AE} \text{ 在向量 } \overrightarrow{AC} \text{ 方向上投影向量的数量 } \frac{1+\lambda}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{又 } \because 0 \leq \lambda \leq 1, \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{1+\lambda}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2}.$$

1.2 空间向量基本定理

三、典型例题

例 1 答案 C

解析 对于 A, 因为 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + 2\mathbf{b}$, 所以 $\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{b}$ 共面, 不能作为空间的一个基底, 故 A 错误; 对于 B, 因为 $\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \mathbf{c}$, 所以 $\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{c}$ 共面, 不能作为空间的一个基底, 故 B 错误; 对于 C, 假设 $\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面, 则可设 $\mathbf{a} + \mathbf{b} =$

$$\lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mu\mathbf{c} (\lambda, \mu \in \mathbf{R}), \text{ 所以 } \begin{cases} \lambda = 1, \\ \lambda = -1, \text{ 方程组无解,} \\ \mu = 0 \end{cases}$$

所以 $\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, 可以作为空间的一个基底, 故 C 正确; 对于 D, 因为 $\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b} = -(\mathbf{a} - \mathbf{c}) - \mathbf{b}$, 所以 $\mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$ 共面, 不能作为空间的一个基底, 故 D 错误. 故选 C.

变式 1 答案 AC

解析 因为 N 是 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{\mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{c}}{2}$, 故 A 正确; $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} = \frac{\mathbf{b}}{2} +$



$\frac{c}{2} - a$, 故 B 错误; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{2}{3}a$,

故 C 正确, D 错误. 故选 AC.

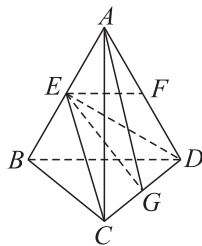
例 2 证明 由题意 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}$, 故 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

即 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$.

所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} = 0$,

$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, 故 $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$. 即 $OC \perp AB$.

变式 2 (1) 证明 如图, 连接 DE.



因为空间四边形 ABCD 的每条边和对角线都等于 1, 且 E, G 分别是 AB, CD 的中点,

所以 $AC = BC$, $BD = AD$, 故 $CE \perp AB$, $DE \perp AB$.

因为 $CE \cap DE = E$, $CE, DE \subset$ 平面 CDE,

所以 $AB \perp$ 平面 CDE.

因为 $CE \subset$ 平面 CDE, 所以 $AB \perp EG$.

(2) 解 由题意得 $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$ 均为等边三角形且边长为 1,

所以 $AG = EC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} +$

$\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}$,

所以 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\mathbf{b}^2 - \frac{1}{4}\mathbf{a} \cdot$

$\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} - \frac{1}{4}\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos 60^\circ +$

$\frac{1}{2}|\mathbf{c}||\mathbf{b}|\cos 60^\circ - \frac{1}{4}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos 60^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} -$

$\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

设异面直线 AG 和 CE 所成的角为 θ , 则 $\cos \theta =$

$$|\cos \langle \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{EC} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC}|}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{EC}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}.$$

例 3 答案 D

解析 由空间中 M, A, B, C 四点共面可知 $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} +$

$\lambda = 1$, 解得 $\lambda = \frac{7}{12}$. 故选 D.

变式 3 答案 -2

解析 因为 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}$, 所以由 $\overrightarrow{BP} = m\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, 得 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = m\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, 即 $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. 因为 O 为空间任意一点, A, B, C, P 满足任意三点不共线, 但四点共面, 所以 $m + 2 + 1 = 1$, 故 $m = -2$.

四、备选例题

例 1 答案 $\frac{2}{5}$

解析 因为 A, E, F, G 四点共面, 所以存在 $m, n \in \mathbf{R}$ 使得 $\overrightarrow{AF} = m\overrightarrow{AE} + n\overrightarrow{AG}$, 所以 $\overrightarrow{PF} - \overrightarrow{PA} = m(\overrightarrow{PE} - \overrightarrow{PA}) + n(\overrightarrow{PG} - \overrightarrow{PA})$, 所以 $\overrightarrow{PF} = m\overrightarrow{PE} + n\overrightarrow{PG} + (1 - m - n)\overrightarrow{PA} = (1 - m - n)\overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}m\overrightarrow{PB} + \frac{1}{2}n\overrightarrow{PD}$. 因为 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, 即 $\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}$, 所以 $\overrightarrow{PC} = -\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$. 因为 $\overrightarrow{PF} = \lambda\overrightarrow{PC}$, 即 $(1 - m - n)\overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}m\overrightarrow{PB} + \frac{1}{2}n\overrightarrow{PD} = -\lambda\overrightarrow{PA} + \lambda\overrightarrow{PB} + \lambda\overrightarrow{PD}$, 所

$$\begin{cases} 1 - m - n = -\lambda \\ \frac{2}{3}m = \lambda, \\ \frac{1}{2}n = \lambda, \end{cases} \quad \text{可得 } 1 - \frac{7}{2}\lambda = -\lambda, \text{ 解入 } \lambda = \frac{2}{5}.$$

例 2 答案 $\frac{15}{8}$

解 原式 $= f(t) = 2t^2 + t + 2 = 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}$ ($t \in$

$\mathbf{R}$) $\Rightarrow f_{\min}(t) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$.

小结反思

(1) 了解空间向量基本定理及其意义;

(2) 能用基底表示空间任意向量;

(3) 理解正交分解与直角坐标系之间的关系, 能求空间中中点的坐标.

练习

基础巩固

1. 答案 C

解析 ①正确. 基底向量必须不共面; ②正确; ③不对, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线. 当 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ 时, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面, 故只有①②正确.



2. 答案 A

解析 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{AO_3}$, 对比 $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AO_1} + y\overrightarrow{AO_2} + z\overrightarrow{AO_3}$ 得 $x=y=z=1$.

3. 答案 A

解析 因为四边形 BCC_1B_1 是平行四边形,

$$\text{所以 } \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}.$$

因为 $\angle A_1AB = \angle A_1AC = 60^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ$, $A_1A = 3$, $AB = AC = 2$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AO}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AA_1}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AA_1}) = \frac{29}{4},$$

所以 $|\overrightarrow{AO}| = \frac{\sqrt{29}}{2}$, 即 $AO = \frac{\sqrt{29}}{2}$. 故选 A.

4. 答案 D

解析 由题意可知, $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OG} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}) = \frac{2}{3}[\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})] = \frac{2}{3}[\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})] = \frac{2}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{9}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{OC}$.

因为 D, E, F, M 四点共面, 所以存在实数 λ, μ , 使 $\overrightarrow{DM} = \lambda\overrightarrow{DE} + \mu\overrightarrow{DF}$.

$$\text{所以 } \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OD} = \lambda(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}) + \mu(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD}),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OM} = (1 - \lambda - \mu)\overrightarrow{OD} + \lambda\overrightarrow{OE} + \mu\overrightarrow{OF} = (1 - \lambda - \mu)k\overrightarrow{OA} + \lambda m\overrightarrow{OB} + \mu n\overrightarrow{OC},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} (1 - \lambda - \mu)k = \frac{2}{9}, \\ \lambda m = \frac{2}{9}, \\ \mu n = \frac{2}{9}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{9}{2}(1 - \lambda - \mu) + \frac{9}{2}\lambda + \frac{9}{2}\mu = \frac{9}{2}. \text{ 故}$$

选 D.

5. 答案 BCD

解析 对于 A, 假设 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{AA_1}$ 共面, 则存在唯一的有序实数对 (x, y) , 使得 $\overrightarrow{BD_1} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AA_1}$, 又 $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AA_1}$, 所以 $\overrightarrow{AD} = (x+1)\overrightarrow{AB} + (y-1)\overrightarrow{AA_1}$, 所以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD}$ 共面, 这与 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD}$ 不共面明显矛盾, 所以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{AA_1}$ 不共面, $\{\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{AB}\}$ 能构成空间的一个基底, 故 A 错误; 对于 B, 因为 $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1}$, 所以 $|\overrightarrow{BD_1}|^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1})^2 = |\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{AA_1}|^2 + |\overrightarrow{A_1D_1}|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AA_1} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{A_1D_1} + 2\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{A_1D_1} = |\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{AA_1}|^2 + |\overrightarrow{A_1D_1}|^2 + 2|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{AA_1}| \cos \frac{3\pi}{4} + 2|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{A_1D_1}| \cos \frac{2\pi}{3} + 2|\overrightarrow{AA_1}| |\overrightarrow{A_1D_1}| \cos \frac{\pi}{4} = 1 + 1 + 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$,

所以 $|\overrightarrow{BD_1}| = \sqrt{2}$, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AA_1} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}| \cos \frac{3\pi}{4} + |\overrightarrow{AA_1}| |\overrightarrow{AD}| \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$,

所以 $BD \perp AA_1$, 所以 $BD \perp AA_1$, 又四边形 $ABCD$ 为菱形, 所以 $BD \perp AC$, 因为 $AA_1 \cap AC = A$, $AA_1, AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 故 C 正确; 对于 D, 因为 $\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{AA_1} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1}) \cdot \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AA_1} + |\overrightarrow{AA_1}|^2 + \overrightarrow{A_1D_1} \cdot \overrightarrow{AA_1} = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{AA_1}| \cos \frac{3\pi}{4} + |\overrightarrow{AA_1}|^2 + |\overrightarrow{A_1D_1}| |\overrightarrow{AA_1}| \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$, 所以 $\cos \langle \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{AA_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{AA_1}}{|\overrightarrow{BD_1}| |\overrightarrow{AA_1}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\langle \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{AA_1} \rangle = \frac{\pi}{4}$, 所以直线 BD_1 与直线 AA_1 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

6. 答案 $x=y=z=0$

解析 若 x, y, z 中存在一个不为 0 的数, 不妨设 $x \neq 0$, 则 $\mathbf{a} = -\frac{y}{x}\mathbf{b} - \frac{z}{x}\mathbf{c}$, $\therefore \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面. 这与 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$



$c\}$ 是基底矛盾,故 $x=y=z=0$.

7. 答案 $60^\circ, 90^\circ$

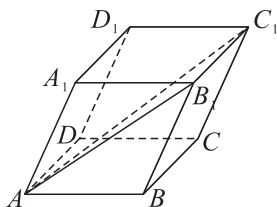
解析 设正方体棱长为 1, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}, \overrightarrow{AD}=\mathbf{b}, \overrightarrow{AA_1}=\mathbf{c}$,
则 $\overrightarrow{A'B}=\mathbf{a}-\mathbf{c}, \overrightarrow{B'C}=\mathbf{b}-\mathbf{c}, \overrightarrow{AC'}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

易知 $|\overrightarrow{A'B}|=|\overrightarrow{B'C}|=\sqrt{2}, \overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{B'C}=\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}-\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}-\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}+\mathbf{c}^2=1$,

故 $\cos\langle\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'C}\rangle=\frac{\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{B'C}}{|\overrightarrow{A'B}| \cdot |\overrightarrow{B'C}|}=\frac{1}{2}$, 即 $A'B$ 与 $B'C$ 的夹角大小为 60° . 又 $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AC'}=\mathbf{a}^2+\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}+\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}-\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}-\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}-\mathbf{c}^2=0$, 故 $A'B$ 与 AC' 所成角的大小为 90° .

8. 答案 $\frac{5}{2} \sqrt{17}$

解析 如图, 连接 AB_1 .



因为 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1G}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$,

所以 $x=1, y=\frac{1}{2}, z=1$, 所以 $x+y+z=\frac{5}{2}$.

因为 $|\overrightarrow{AG}|^2=(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})^2=|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AA_1}|^2+\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1}=2^2+\frac{1}{4} \times 2^2+2^2+2 \times 2 \times \cos 60^\circ+2 \times 2 \times \cos 60^\circ+2 \times 2 \times \cos 60^\circ=17$, 所以 $|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{17}$, 即 $AG=\sqrt{17}$.

9. 解 (1) 因为 $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}=(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1})+(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$,

所以 A, E, C_1, F 四点共面.

(2) 因为 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DD_1}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$,

所以 $x=-1, y=1, z=\frac{1}{3}$,

所以 $x+y+z=\frac{1}{3}$.

10. 证明 连接 ON , 由线段中点公式得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\right] = \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \\ \text{又 } \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}, \\ \therefore \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}^2),\end{aligned}$$

$$\because \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos \angle AOC,$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \angle AOB,$$

$$\text{且 } |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}|, \angle AOB = \angle AOC,$$

$$\therefore \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \therefore OG \perp BC.$$

提升探究

11. 答案 $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c} \quad \frac{11}{4}$

解析 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\mathbf{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD_1}=\mathbf{a}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})=\mathbf{a}+\frac{1}{3}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a})=\frac{2}{3}\mathbf{a}+\frac{1}{3}\mathbf{b}+\frac{1}{3}\mathbf{c}$.

设 $\overrightarrow{C_1G}=\lambda\overrightarrow{C_1C}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, 则 $\overrightarrow{D_1G}=\overrightarrow{D_1C_1}+\lambda\overrightarrow{C_1C}=\mathbf{a}-\lambda\mathbf{c}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{ED_1} + \overrightarrow{D_1G} = \frac{2}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}) + \mathbf{a} - \lambda\mathbf{c} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \\ &= \frac{2}{3}\mathbf{b} + \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)\mathbf{c}.\end{aligned}$$

由题意可知 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = 3 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$, 故

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{D_1G} &= \left[\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b} + \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)\mathbf{c}\right] \cdot (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{c}) = \\ &= \frac{1}{3}\mathbf{a}^2 - \frac{1}{3}\lambda\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \frac{2}{3}\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \frac{2}{3}\lambda\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} - \\ &= \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)\lambda\mathbf{c}^2 = 3 - \frac{1}{3}\lambda \times \frac{9}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{9}{2} - \frac{2}{3}\lambda \times \frac{9}{2} + \\ &= \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) \times \frac{9}{2} - \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)\lambda \times 9 = 9\lambda^2 - 15\lambda + 9 = \\ &= 9\left(\lambda - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{11}{4}, 0 \leq \lambda \leq 1.\end{aligned}$$

当 $\lambda = \frac{5}{6}$ 时, $9\left(\lambda - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{11}{4}$ 取得最小值 $\frac{11}{4}$, 即 $\overrightarrow{EG} \cdot$



$\overrightarrow{D_1G}$ 的最小值为 $\frac{11}{4}$.

12. 解 (1) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$.

(2) 证明: 因为 $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AD}$,

$$\overrightarrow{NB_1} = \overrightarrow{C_1B_1} - \overrightarrow{C_1N} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AD},$$

所以 $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB_1}$, 所以 D, M, B_1, N 四点共面.

(3) 方法 1: 当 $\frac{AA_1}{AB} = 1$ 时, $AC_1 \perp A_1B$. 理由如下:

设 $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$.

因为底面 $ABCD$ 为菱形,

所以当 $\frac{AA_1}{AB} = 1$ 时, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$.

因为 $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$, $\angle A_1AD = \angle A_1AB = \angle DAB = 60^\circ$,

所以 $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1B} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}^2 = 0$, 所以 $AC_1 \perp A_1B$.

方法 2: 设 $\frac{AA_1}{AB} = \lambda$, $AB = 1$, $AA_1 = \lambda$, $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}$, $AC_1 \perp A_1B$, 则 $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0$, 解得 $\lambda = 1$.

1.3 空间向量及其运算的坐标表示

§ 1.3.1 空间直角坐标系

三、典型例题

例 1 解 $\because$ 点 B_1 到 xOy , xOz , yOz 面的距离均等于 2,

所以点 $B_1(2, 2, 2)$.

点 B_1 关于 xOy 面对称的点的坐标为 $(2, 2, -2)$,

点 B_1 关于 xOz 面对称的点的坐标为 $(2, -2, 2)$,

点 B_1 关于 yOz 面对称的点的坐标为 $(-2, 2, 2)$,

规律总结: 点 (x, y, z) 关于 xOy , xOz , yOz 平面对称的点的坐标依次为 $(x, y, -z)$, $(x, -y, z)$, $(-x, y, z)$

变式 1 解 (1) $O'(0, 0, 2)$ $C(0, 4, 0)$

$A'(3, 0, 2)$ $B'(3, 4, 2)$

(2) $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OC} = (0, 4, 0)$

$\overrightarrow{B'B} = -\overrightarrow{OO'} = (0, 0, -2)$

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'O'} + \overrightarrow{O'C'} = (-3, 4, 0)$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CC'} = (-3, 4, 2)$$

例 2 解 易知 $B(1, 1, -2)$, $C(-1, -1, -2)$, 由两点间的距离公式得 $|BC| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$.

规律总结: 空间中, 两点 (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) 的距离公式为

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

与平面上两点间的距离公式类似, 只是从二维推广到了三维.

变式 2 答案 $(-2, -1, -2)$ 6

例 3 解 由空间两点间距离公式有

$$|AB|^2 = 2^2 + 3^2 + 1^2 = 14,$$

$$|AC|^2 = 1^2 + 1^2 + 4^2 = 18,$$

$$|BC|^2 = 1^2 + 4^2 + 3^2 = 26,$$

$$\therefore |AB|^2 + |AC|^2 > |BC|^2.$$

$\therefore \triangle ABC$ 为锐角三角形.

规律总结: 先由两点间的距离公式计算出三边的长度, 再根据余弦定理可以判断三角形的形状.

变式 3 解 只需比较 AB , AC , BC 的距离即可.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-1-1)^2 + (1-2)^2 + (2+1)^2} \\ &= \sqrt{14}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(-1-a)^2 + (1-0)^2 + (2-3)^2} \\ &= \sqrt{(a+1)^2 + 2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(1-a)^2 + (2-0)^2 + (-1-3)^2} \\ &= \sqrt{(a-1)^2 + 20}. \end{aligned}$$

若 $AB = AC$, 则 $(a+1)^2 + 2 = 14$,

解得 $a = \pm 2\sqrt{3} - 1$.

若 $AC = BC$,

$$\text{则 } (a+1)^2 + 2 = (a-1)^2 + 20,$$

解得 $a = \frac{9}{2}$.

若 $AB = BC$, 无解.

综上得 $a = \pm 2\sqrt{3} - 1$ 或 $a = \frac{9}{2}$.

四、备选例题

例 1 解 转化为距离问题, 即证明 $PA^2 + AB^2 = PB^2$. 设 $P(0, 0, c)$, $B(0, b, 0)$, 对于 Oz 轴正半轴上任意一点 P , 假设在 Oy 轴上存在一点 B , 使得 $PA \perp AB$ 恒成立, 则 $PA^2 + AB^2 = PB^2$,



$$\therefore [(0-1)^2 + (0-1)^2 + (c-0)^2] + [(1-0)^2 + (1-b)^2 + (0-0)^2] = (0-0)^2 + (0-b)^2 + (c-0)^2.$$

即 $3 + (b-1)^2 = b^2$, 解得 $b=2$,

所以存在这样的点 B , 当点 B 为 $(0, 2, 0)$ 时, $PA \perp AB$ 恒成立.

例 2 答案 (1)× (2)× (3)× (4)✓

解析 (1)错误. 空间直角坐标系中, 在 x 轴上的点的坐标一定是 $(a, 0, 0)$ 的形式. (2)错误. 空间直角坐标系中, 在坐标平面 Ozx 内的点的坐标一定是 $(a, 0, c)$ 的形式. (3)错误. 关于坐标平面 Oyz 对称的点其纵坐标、竖坐标保持不变, 横坐标相反. (4)正确. 由点和向量坐标的概念可知正确.

小结反思

空间直角坐标可以类比平面直角坐标系, 只是由二维推广到三维, 由平面推广到空间, 在找空间中点的坐标时和平面坐标系一样, 经过该点分别作坐标平面的垂线可得到相应的坐标, 空间中两点间的距离公式与平面内两点间的距离公式类似, 只是多了一个竖坐标.

练习

基础巩固

1. 答案 D

解析 xOy 平面上的点的竖坐标为 0, 横、纵坐标不变.

2. 答案 A

解析 在 x 轴上的点的坐标为 $(a, 0, 0)$

3. 答案 B

解析 对于 $A, (1, 1, 0) = \lambda(0, 1, 1) + \mu(1, 0, 1)$, 无解, 可作基底;

对于 $B, 2(1, 1, 2) = (2, 2, 4)$ 三个向量共面, 不能作基底;

对于 $C, (1, 2, 3) = \lambda(1, 3, 2) + \mu(2, 3, 1)$ 无解, 可作基底

对于 $D, (1, 0, 0) = \lambda(0, 0, 2) + \mu(0, 3, 0)$ 无解, 可作基底

4. 答案 C

解析 借助长方体来思考, a, b, c 分别是三条面对角线的长度.

5. 答案 BC

6. 答案 $(-3, -2, 0)$

解析 即竖坐标为 0, 横纵坐标不变.

7. 答案 1

解析 OA, OB, OC 两两垂直, $V_{O-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times 3 = 1$.

8. 答案 $\sqrt{6}$

解析 线段 MN 的中点为 $P(-1, 1, 2)$, 所以 $|OP| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$.

9. 解 由 $A(0, 0, \sqrt{3})$ 及 $\angle ADB = 30^\circ$, 得到点 D 坐标 $(0, 3, 0)$.

又 $BC = CD, \angle BCD = 90^\circ$, 得 $C(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$.

由 E, F 分别是 AC, AD 的中点, 得 $E(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $F(0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

10. 解 由题知 $D(0, 0, 0), C(0, 2, 0), B(2, 2, 0), B_1(2, 2, 2), A_1(2, 0, 2), E(2, 2, 1), F(0, 1, 0)$.

有 $\overrightarrow{EF} = (0, 1, 0) - (2, 2, 1) = (-2, -1, -1)$,

$\overrightarrow{B_1F} = (0, 1, 0) - (2, 2, 2) = (-2, -1, -2)$,

$\overrightarrow{A_1F} = (0, 1, 0) - (2, 0, 2) = (-2, 1, -2)$.

提升探究

11. 答案 $(0, -2, 4)$

解析 $\because \overrightarrow{AB} = (0, -1, 1), \overrightarrow{CD} = (x, y-1, z-1)$

设 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$

$$\therefore \begin{cases} -1 = \lambda(y-1) \\ 1 = \lambda(z-1) \\ 0 = \lambda x \end{cases} \quad \text{故} \begin{cases} x=0 \\ y+z=2 \end{cases}$$

12. 解 $\because \overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = (x+y, \frac{x}{2} + 2y+z, \frac{1}{2}z)$

$$\therefore |\overrightarrow{OP}|^2 = (x+y)^2 + \left(\frac{1}{2}x + 2y + z\right)^2 + \left(\frac{1}{2}z\right)^2 = \frac{1}{3} \left[(x+y)^2 + \left(\frac{1}{2}x + 2y + z\right)^2 + \left(\frac{1}{2}z\right)^2 \right] (1+1+1) \geq \frac{1}{3} \left(x+y + \frac{1}{2}x + 2y + z + \frac{1}{2}z \right)^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}x + 3y + \frac{3}{2}z \right)^2 = \frac{3}{4} (x+2y+z)^2 = 3$$