



$2r$, 故三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为

$$V_1 = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot 2r = AC \cdot BC \cdot r,$$

又因为 $AC^2 + BC^2 = AB^2 = 4r^2$,

所以 $AC \cdot BC \leq \frac{AC^2 + BC^2}{2} = 2r^2$, 当且仅当 $AC =$

$BC = \sqrt{2}r$ 时等号成立,

从而 $V_1 \leq 2r^3$, 而圆柱的体积 $V = 2\pi r^3$,

故 $p = \frac{V_1}{V} = \frac{2r^3}{2\pi r^3} = \frac{1}{\pi}$ 当且仅当 $AC = BC = \sqrt{2}r$, 即

$OC \perp AB$ 时等号成立,

所以 P 的最大值是 $\frac{1}{\pi}$.

②由①可知, P 取最大值时, $OC \perp AB$, 于是以 O 为坐标原点, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 则 $C(r, 0, 0)$, $B(0, r, 0)$, $B_1(0, r, 2r)$,

因为 $BC \perp$ 平面 A_1ACC_1 , 所以 $\overrightarrow{BC}$ 是平面 A_1ACC_1 的一个法向量,

设平面 B_1OC 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \perp \overrightarrow{OC} \\ \mathbf{n} \perp \overrightarrow{OB_1} \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} rx = 0 \\ ry + 2rz = 0 \end{cases}, \text{ 故 } \begin{cases} x = 0 \\ y = -2z \end{cases},$$

取 $z = 1$ 得平面 B_1OC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (0, -2, 1)$, 因为 $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$, 又 $\overrightarrow{CB} = (-r, r, 0)$

$$\text{所以 } \cos \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{CB} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} \right| =$$

$$\left| \frac{\sqrt{10}}{5} \right| = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

小结反思

略

练习

基础巩固

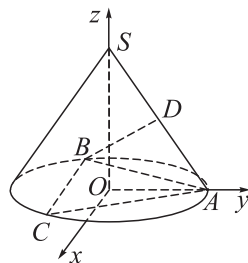
1. 答案 D

解析 根据共线向量定理, 知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不平行, 所以 l_1, l_2 的位置关系是相交或异面.

2. 答案 A

解析 因为该圆锥的侧面积是底面积的 2 倍, 所以该圆锥的母线长是底面半径的 2 倍.

设底面半径为 1, 以底面圆心 O 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0, 1, 0)$, $B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $C(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$,

$D(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{AC} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0)$, $\overrightarrow{BD} =$

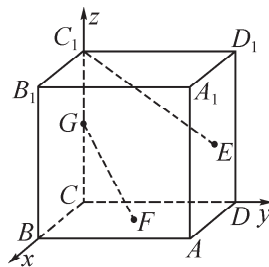
$(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 则 $\cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BD}|} =$

$$\frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{5}{2}}} = -\frac{\sqrt{30}}{20},$$

故异面直线 AC 与 BD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{20}$.

3. 答案 D

解析 建立空间直角坐标系如图,



$B(2, 0, 0)$, $A(2, 2, 0)$, $G(0, 0, 1)$, $F(1, 1, 0)$, $C_1(0, 0, 2)$, $E(1, 2, 1)$.

则 $\overrightarrow{BA} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{GF} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{C_1E} = (1, 2, -1)$,

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{GF} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{C_1E} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

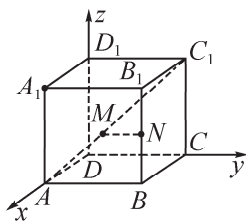
$$\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \therefore \alpha + \beta = 90^\circ.$$

4. 答案 A

解析 以 D 为原点建立如图所示的空间直角坐标

系 $D-xyz$, 则 $A(a, 0, 0)$, $C_1(0, a, a)$, $N(a, a, \frac{a}{2})$.

设 $M(x, y, z)$,



$\because$ 点 M 在 AC_1 上且 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC_1}$,

$\therefore (x-a, y, z) = \frac{1}{2}(-x, a-y, a-z)$,

$\therefore x = \frac{2}{3}a, y = \frac{a}{3}, z = \frac{a}{3}$, 得 $M(\frac{2a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3})$,

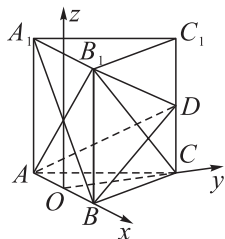
$\therefore |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(a - \frac{2}{3}a)^2 + (a - \frac{a}{3})^2 + (\frac{a}{2} - \frac{a}{3})^2}$
 $= \frac{\sqrt{21}}{6}a$.

5. 答案 ACD

解析 取线段 AB 的中点 O , 连接 CO , 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, $AA_1 \perp$ 平面 ABC ,

因为 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 则 $CO \perp AB$, 以点 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立如下图所示的空间直角坐标系, 则 $A(-\frac{1}{2}, 0, 0), B(\frac{1}{2}, 0, 0), C(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0),$

$A_1(-\frac{1}{2}, 0, 1), B_1(\frac{1}{2}, 0, 1), C_1(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1),$
 $D(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.



对于 A 选项, $\overrightarrow{A_1B} = (1, 0, -1), \overrightarrow{AD} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$,

所以, $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0$, 故 $A_1B \perp AD$,

A 对;

对于 B 选项, 设平面 AB_1D 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$\overrightarrow{AB_1} = (1, 0, 1), \overrightarrow{AD} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$,

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{A_1B} = x_1 + z_1 = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 + \frac{1}{2}z_1 = 0 \end{cases}$$

取 $x_1 = 1$, 则 $z_1 = -1, y_1 = 0$, 可得 $\mathbf{m} = (1, 0, -1)$, 易知平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量为 $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$, 所

以, $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{u} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{u}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以, 平面 AB_1D 与平面 $A_1B_1C_1$ 的夹角为 45° , B 错;

对于 C 选项, 设平面 A_1BD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$\overrightarrow{A_1B} = (1, 0, -1), \overrightarrow{A_1D} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = x_2 - z_2 = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1D} = \frac{1}{2}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 - \frac{1}{2}z_2 = 0 \end{cases}$$

取 $x_2 = 1$, 则 $z_2 = 1, y_2 = 0$, 可得 $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$, 则 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 1 + 0 - 1 = 0$,

所以, $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$, 故平面 $A_1BD \perp$ 平面 AB_1D , C 对;

对于 D 选项, $\overrightarrow{AC} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, 则 $\cos \langle \overrightarrow{AC}, \mathbf{m} \rangle =$

$$\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{m}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\mathbf{m}|} = \frac{\frac{1}{2}}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

所以, AC 与平面 AB_1D 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$,

D 对.

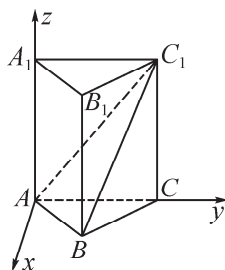
故选: ACD.

6. 答案 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

7. 答案 $\frac{\sqrt{30}}{10}$

8. 答案 $\frac{\sqrt{57}}{19}$

解析 如图建立空间直角坐标系, 则 $A(0, 0, 0), \overrightarrow{AC_1} = (0, 1, 2)$,





$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 为平面 ABC_1 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$\text{取 } \mathbf{n} = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2, -1\right),$$

同理取 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$ 作为平面 ABC 的法向量.

$$\text{则 } \cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{\frac{19}{3}}} = -\frac{\sqrt{57}}{19}.$$

$\therefore$ 二面角 C_1-AB-C 的余弦值为 $\frac{\sqrt{57}}{19}$.

9. (1) 证明 取 AC 的中点 M , 连接 PM, BM ,

$$\because AB = BC, PA = PC,$$

$$\therefore AC \perp BM, AC \perp PM, \text{又 } BM \cap PM = M,$$

$$\therefore AC \perp \text{平面 } PBM,$$

$$\because BP \subset \text{平面 } PBM,$$

$$\therefore AC \perp BP.$$

(2) 解 $\because$ 底面 $ABCD$ 是梯形. $BC \parallel AD, AB = BC = CD = 1, AD = 2$,

$$\therefore \angle ABC = 120^\circ,$$

$$\because AB = BC = 1, \therefore AC = \sqrt{3}, BM = \frac{1}{2}, \therefore AC \perp CD,$$

$$\text{又 } AC \perp BM, \therefore BM \parallel CD.$$

$$\because PA = PC = \sqrt{3}, CM = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore PM = \frac{3}{2},$$

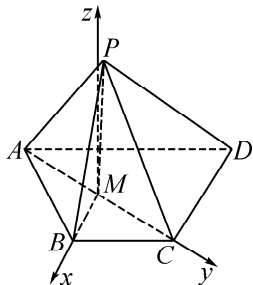
$$\because PB = \frac{\sqrt{13}}{2},$$

$$\therefore \cos \angle BMP = \frac{PM^2 + BM^2 - BP^2}{2PM \cdot BM} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle PMB = 120^\circ,$$

以 M 为原点, 以 MB, MC 的方向为 x 轴, y 轴的正方向,

以平面 $ABCD$ 在 M 处的垂线为 z 轴建立坐标系 $M-xyz$, 如图所示:



$$\text{则 } A\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), C\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), P\left(-\frac{3}{4}, 0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right),$$

$$D\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = (-1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{AC} = (0, \sqrt{3}, 0),$$

$$\overrightarrow{AP} = \left(-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right),$$

设平面 ACP 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} \sqrt{3}y = 0 \\ -\frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3\sqrt{3}}{4}z = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } x = \sqrt{3} \text{ 得 } \mathbf{n} = (\sqrt{3}, 0, 1),$$

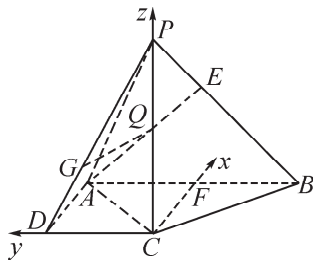
$$\therefore \cos\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AD} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{AD}|} = -\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore \text{直线 } AD \text{ 与平面 } APC \text{ 所成角的正弦值为 } |\cos\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AD} \rangle| = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

10. 解 (1) 过点 C 在平面 $ABCD$ 内作 $CF \perp AB$, 垂足为点 F ,

$$\because PC \perp \text{平面 } ABCD, AB \parallel CD, \text{则 } CF \perp CD,$$

以点 C 为坐标原点, CF, CD, CP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $C-xyz$, 如下图所示:



则 $A(1, 1, 0), B(1, -1, 0), C(0, 0, 0), D(0, 1, 0)$, 设点 $P(0, 0, a) (a > 0)$,

$$|\overrightarrow{PD}| = \sqrt{0^2 + (1-0)^2 + (0-a)^2} = \sqrt{a^2 + 1} = 2, \text{可}$$

$$\text{得 } a = \sqrt{3}, \text{即 } P(0, 0, \sqrt{3}),$$

$$\text{设点 } E(x_0, y_0, z_0), \text{则 } \overrightarrow{BE} = (x_0 - 1, y_0 + 1, z_0),$$

$$\overrightarrow{EP} = (-x_0, -y_0, \sqrt{3} - z_0),$$

$$\text{由 } \overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EP}, \text{可得} \begin{cases} x_0 - 1 = -2x_0 \\ y_0 + 1 = -2y_0 \\ z_0 = 2(\sqrt{3} - z_0) \end{cases},$$



$$\text{解得} \begin{cases} x_0 = \frac{1}{3} \\ y_0 = -\frac{1}{3}, \text{即 } E\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \\ z_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

同理可求得 $G\left(0, \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

由于点 Q 为 AE 的中点, 则 $Q\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\overrightarrow{QG} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$,

易知平面 ABC 的一个法向量为 $m = (0, 0, 1)$,

所以, $m \cdot \overrightarrow{QG} = -\frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 + 1 \times 0 = 0$, 则 $\overrightarrow{QG} \perp m$,

$\because QG \not\subset \text{平面 } ABC, \therefore QG \parallel \text{平面 } ABC$;

(2) $\overrightarrow{AP} = (-1, -1, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{CA} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{CE} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,

设平面 AEC 的一个法向量为 $n = (x, y, z)$,

$$\text{由} \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \\ n \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \end{cases}, \text{可得} \begin{cases} x + y = 0 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2\sqrt{3}}{3}z = 0 \end{cases},$$

取 $x = \sqrt{3}$, 则 $y = -\sqrt{3}$, $z = -1$, 即 $n = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -1)$.

设直线 AP 与平面 AEC 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle n, \overrightarrow{AP} \rangle| = \frac{|n \cdot \overrightarrow{AP}|}{|n| \cdot |\overrightarrow{AP}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{105}}{35},$$

因此, 直线 AP 与平面 AEC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{105}}{35}$.

提升探究

11. 答案 A

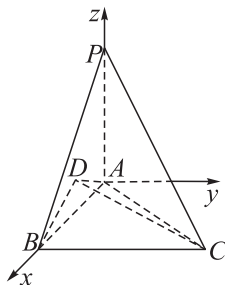
解析 由 $PA \perp \text{平面 } ABC, BC \subset \text{平面 } ABC$, 得 $PA \perp BC$,

又 $AB \perp BC, PA \cap AB = A, PA, AB \subset \text{平面 } PAB$, 则 $BC \perp \text{平面 } PAB$,

$AD \subset \text{平面 } PAB$, 则 $AD \perp BC$, 又 $AD \perp CD, BC \cap CD = C, BC, CD \subset \text{平面 } BCD$,

因此 $AD \perp \text{平面 } BCD$, 而 $BD \subset \text{平面 } BCD$, 则 $AD \perp BD$,

如图, 以 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AP}$ 的方向为 x, y, z 轴正方向建立空间直角坐标系,



则 $A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), C(2, 2, 0), P(0, 0, 2\sqrt{3})$,

设 $D(x, 0, z)$,

$\overrightarrow{AD} = (x, 0, z), \overrightarrow{BD} = (x-2, 0, z)$, 由 $AD \perp BD$, 得

$$x^2 - 2x + z^2 = 0 \left(0 < x < \frac{3}{2}\right),$$

$\overrightarrow{AB} = (2, 0, 0), \overrightarrow{CD} = (x-2, -2, z)$, 设异面直线 CD 与 AB 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}|}$$

$$= \frac{2(2-x)}{2\sqrt{(x-2)^2 + 4 + z^2}}$$

$$= \frac{2-x}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4-x}},$$

$$\text{令 } \sqrt{4-x} = t, \text{ 则 } t \in \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, 2\right), \cos \theta = \frac{t^2 - 2}{\sqrt{2}t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t - \frac{2}{t}\right),$$

显然函数 $y = t - \frac{2}{t}$ 在 $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, 2\right)$ 上单调递增, 此时

$$t - \frac{2}{t} \in \left(\frac{\sqrt{5}}{10}, 1\right), \cos \theta \in \left(\frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

所以异面直线 CD 与 AB 所成角的余弦值的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

故选: A

12. 答案 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析 因为直线 PQ 到平面 ACD_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以必有 $PQ \parallel \text{面 } ACD_1$, 即点 P 到平面 ACD_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 如图建立空间直角坐标系, 设 $P(p, 1, 1)$,



又 $A(1,0,0), C(0,1,0), D_1(0,0,1)$, 则 $\overrightarrow{AC} = (-1,1,0), \overrightarrow{AD_1} = (-1,0,1), \overrightarrow{CP} = (p,0,1)$,

设面 ACD_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x,y,z)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{n} = -x+y=0 \\ \overrightarrow{AD_1} \cdot \mathbf{n} = -x+z=0 \end{cases}$, 取 $x=1$ 得 $\mathbf{n} = (1,1,1)$,

则 $\frac{|\overrightarrow{CP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{p+1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $p = \frac{1}{2}$, 即

$P(\frac{1}{2}, 1, 1)$,

过 P 作平面 ACD_1 的平行平面, 与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面为 PMN ,

M, N 分别为线段 A_1B_1 和线段 BB_1 的中点, 则

$M(1, \frac{1}{2}, 1), N(1, 1, \frac{1}{2})$. 所以 Q 在直线 MN 上,

设 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PM} + \lambda \overrightarrow{MN} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) +$

$\lambda(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\lambda)$,

又 $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 1)$,

则 $\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\lambda}{\sqrt{\frac{1}{4} + (\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}\lambda^2}},$$

当 $\lambda=0$ 时, $\cos \theta=0$,

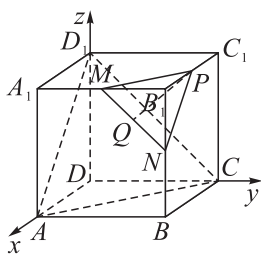
当 $\lambda \neq 0$ 时, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} + 1}}$,

又 $\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} + 1 = (\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$,

所以 $\cos \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

则 $\sin \theta$ 的最小值为 $\sqrt{1 - (\frac{\sqrt{6}}{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{3}$



13. 解 (1) 因二面角 $C-AB-E$ 为直二面角, 即平面 $ABC \perp$ 平面 ABE , 又 $AB \perp BC$,

平面 $ABC \cap$ 平面 $ABE = AB, BC \subset$ 平面 ABC , 则 $BC \perp$ 平面 ABE ,

又 $AE \subset$ 平面 ABE , 即得 $BC \perp AE$,

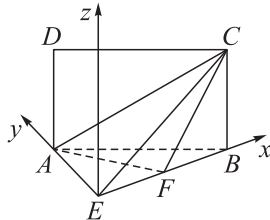
四边形 $ABCD$ 为矩形, $\triangle ACD \cong \triangle ACE$, 则 $\angle AEC = \angle ADC = 90^\circ$, 即 $AE \perp CE$,

$BC \cap CE = C, BC, CE \subset$ 平面 BCE , 于是 $AE \perp$ 平面 $BCE, AE \subset$ 平面 ACE ,

所以平面 $ACE \perp$ 平面 BCE ;

(2) 过 E 作 $Ez \perp$ 平面 ABE , 由 (1) 知 $AE \perp$ 平面 $BCE, BE \subset$ 平面 BCE , 故 $AE \perp BE$,

以 E 为原点, 射线 EB, EA, Ez 分别为 x, y, z 轴非负半轴建立空间直角坐标系, 如图,



$\because AD = AE = 1, EB = \lambda$, 则 $A(0, 1, 0), B(\lambda, 0, 0)$,

$C(\lambda, 0, 1), F(\frac{\lambda}{2}, 0, 0)$,

$\overrightarrow{EA} = (0, 1, 0), \overrightarrow{EC} = (\lambda, 0, 1), \overrightarrow{FA} = (-\frac{\lambda}{2}, 1, 0)$,

$\overrightarrow{FC} = (\frac{\lambda}{2}, 0, 1)$,

设平面 EAC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, 1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{EA} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} y = 0 \\ \lambda \cdot x + 1 = 0 \end{cases}$,

则 $\mathbf{m} = (-\frac{1}{\lambda}, 0, 1)$,

设平面 FAC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, 1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FC} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -\frac{\lambda}{2} \cdot x_1 + y_1 = 0 \\ \frac{\lambda}{2} \cdot x_1 + 1 = 0 \end{cases}$,

则 $\mathbf{n} = (-\frac{2}{\lambda}, -1, 1)$,

由图可知二面角 $E-AC-F$ 为锐二面角,

从而有 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} =$

$$\frac{\lambda^2 + 2}{\sqrt{2(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 2)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2 + 1}},$$



而 $\lambda \in [2, 3]$, 则 $\frac{1}{\lambda^2+1} \in \left[\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right]$, $\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2+1}}$

$$\in \left[\sqrt{\frac{11}{10}}, \sqrt{\frac{6}{5}}\right],$$

所以 $\cos \theta \in \left[\frac{\sqrt{55}}{10}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right]$.

第二章 直线和圆的方程

2.1 直线的倾斜角与斜率

§ 2.1.1 倾斜角与斜率

二、知识要点

1. (2) $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$

三、典型例题

例 1 解 (1) $k_{AB} = \frac{6-7}{4-3} = -1$, 则 $\alpha_{AB} = 135^\circ$.

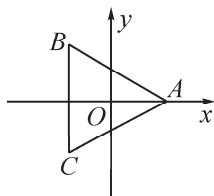
(2) 直线 CD 与 y 轴平行, 倾斜角为 90° , 斜率不存在.

变式 1 解 (1) $k_{AB} = \frac{3-\sqrt{3}-3}{0-(-1)} = -\sqrt{3}$, 则直线 AB 倾斜角为 120° .

(2) 若 $b=0$, 则 P, Q 重合.

故 $b \neq 0$, $k_{CD} = \frac{c+b-c}{\sqrt{3}b-0} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则直线 CD 倾斜角为 30° .

例 2 解 如图



由题意知 $\angle BAO = \angle OAC = 30^\circ$,

则直线 AB 的倾斜角为 $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, 直线 AC 的倾斜角为 30° , 得

$$k_{AB} = \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$k_{AC} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

变式 2 答案 D

解析 设直线 l_1 的倾斜角为 α . 因为直线 l_1 的斜率为 $\sqrt{3}$, 即 $\tan \alpha = \sqrt{3}$, 所以倾斜角 $\alpha = 60^\circ$, 所以直线 l_2

的倾斜角为 $2\alpha = 120^\circ$, 斜率为 $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$. 故选 D.

例 3 解 当 $m=0$ 时, $A(0, 2), B(0, -1)$, 直线倾斜角 $\alpha = 90^\circ$, 符合题意.

当 $m \neq 0$ 时直线的斜率 $k = \frac{2m-3}{-2m}$,

$\because 45^\circ < \alpha < 135^\circ, \therefore k > 1$ 或 $k < -1$,

$\therefore \frac{2m-3}{-2m} > 1$ 或 $\frac{2m-3}{-2m} < -1$,

解得 $0 < m < \frac{3}{4}$ 或 $m < 0$,

综上, m 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$.

变式 3 答案 (1) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$

(2) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$

解析 (1) 由 $k = \tan \alpha$, 将本题转化为三角函数中已知正切值求角的问题. 在利用正切函数图象解题时, 应注意倾斜角自身范围的限制.

由 $-\sqrt{3} < k \leq 1$, 知 $-\sqrt{3} < \tan \alpha \leq 1$, 且 $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$, 结合正切函数图象, 得 $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$.

(2) $\because \sin \alpha \in [-1, 1]$,

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{3},$$

设倾斜角为 θ , 则 $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$.

四、备选例题

例 1 答案 $\frac{1}{2}$

解析 $k_{AB} = k_{AC}, \therefore \frac{3-(-2)}{-2-3} = \frac{3-m}{-2-\frac{1}{2}},$

解得 $m = \frac{1}{2}$.

例 2 答案 A

解析 如图所示.

