



∴面  $AEC \perp$  面  $AFC$ .

小结反思

略

### 练习

基础巩固

1. 答案 D

解析 由题意知,  $ka + b = (k-1, k, 2)$ ,  $2a - b = (3, 2, -2)$ , ∴  $ka + b$  与  $2a - b$  垂直, ∴  $3(k-1) + 2k - 4 = 0$ , 解得  $k = \frac{7}{5}$ .

2. 答案 C

解析 建立空间直角坐标系  $D-xyz$ , 设正方体的棱长为 2, 则  $E(2, 1, 0)$ ,  $F(1, 2, 0)$ ,  $D_1(0, 0, 2)$ ,  $B_1(2, 2, 2)$ . 设  $M(2, 2, m)$ .

则  $\overrightarrow{EF} = (-1, 1, 0)$ ,  $\overrightarrow{B_1E} = (0, -1, -2)$ ,  $\overrightarrow{D_1M} = (2, 2, m-2)$ .

∴  $D_1M \perp$  平面  $EFB_1$ , ∴  $D_1M \perp EF$ ,  $D_1M \perp B_1E$ ,

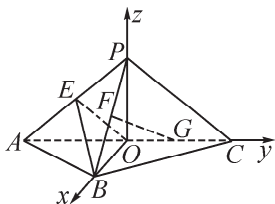
∴  $\overrightarrow{D_1M} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$  且  $\overrightarrow{D_1M} \cdot \overrightarrow{B_1E} = 0$ ,

$$\text{得} \begin{cases} -2 + 2 = 0, \\ -2 - 2(m-2) = 0, \end{cases}$$

∴  $m = 1$ , 故  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

3. 答案 D

解析 如图, 连接  $OP$ , 易证  $OP \perp$  平面  $ABC$ . 以  $O$  为坐标原点, 分别以  $OB$ 、 $OC$ 、 $OP$  所在直线为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴, 建立空间直角坐标系  $O-xyz$ , 则  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(0, -8, 0)$ ,  $B(8, 0, 0)$ ,  $C(0, 8, 0)$ ,  $P(0, 0, 6)$ ,  $E(0, -4, 3)$ ,  $F(4, 0, 3)$ , 由题意得,  $G(0, 4, 0)$ , 因  $\overrightarrow{OB} = (8, 0, 0)$ ,  $\overrightarrow{OE} = (0, -4, 3)$ , 因此平面  $BOE$  的法向量为  $n = (0, 3, 4)$ ,  $\overrightarrow{FG} = (-4, 4, -3)$  得  $n \cdot \overrightarrow{FG} = 0$ , 又直线  $FG$  不在平面  $BOE$  内, 因此有  $FG \parallel$  平面  $BOE$ , 选 D.



4. 答案 D

解析 易知  $u = 2v$ ,  $m \cdot n = 0$ , 故选 D.

5. 答案 AD

解析 因为  $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  是直线  $PP_0$  的一个方向向量,  $u$  为直线  $PP_0$  的一个方向向量, 所以  $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ , 故 A 正确, B 错误; 因为直线  $PP_0$  在平面  $\alpha$  内,  $u$  为平面  $\alpha$  的一个法向量, 所以  $u \perp \overrightarrow{P_0P}$ , 所以  $u \cdot \overrightarrow{P_0P} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ , 故 C 错误, D 正确. 故选 AD.

6. 答案  $\frac{2}{5}$

解析 以  $D$  为坐标原点,  $DA$ 、 $DC$ 、 $DP$  所在直线为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴建立如图所示的空间直角坐标系  $Dxyz$ , 则  $A(3, 0, 0)$ ,  $E(0, 0, 1)$ ,  $B(3, \frac{3}{2}, 0)$ ,  $P(0, 0, 3)$ ,  $C(0, 3, 0)$ .

因为  $3\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BP}$ , 所以  $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}(-3, -\frac{3}{2}, 3) + (3, \frac{3}{2}, 0) = (2, 1, 1)$ , 即  $F(2, 1, 1)$ .

因为  $\overrightarrow{PC} = (0, 3, -3)$ ,  $\overrightarrow{PG} = \lambda \overrightarrow{PC}$ ,

所以  $\overrightarrow{DG} = \lambda \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{DP} = \lambda(0, 3, -3) + (0, 0, 3) = (0, 3\lambda, 3-3\lambda)$ , 即  $G(0, 3\lambda, 3-3\lambda)$ , 则  $\overrightarrow{AG} = (-3, 3\lambda, 3-3\lambda)$ .

∴  $A$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $G$  共面,  $\overrightarrow{AE} = (-3, 0, 1)$ ,  $\overrightarrow{AF} = (-1, 1, 1)$ ,

所以存在唯一的序实数对  $(x, y)$ , 使得  $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AE} + y\overrightarrow{AF} = (-3x, 0, x) + (-y, y, y) = (-3x - y, y, x + y)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} -3x - y = -3, \\ y = 3\lambda, \\ x + y = 3 - 3\lambda, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = \frac{3}{5}, \\ y = \frac{6}{5}, \\ \lambda = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

7. 答案  $AB \parallel \alpha$  或  $AB \subset \alpha$ ;  $CD \perp \alpha$

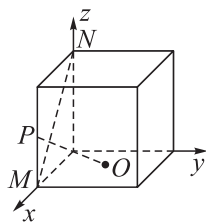
解析 因为平面  $\alpha$  的一个法向量为  $m = (2, 3, -5)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ ,  $\overrightarrow{CD} = (-4, -6, 10)$ , 所以  $m \cdot \overrightarrow{AB} = 2 + 3 - 5 = 0$ ,  $\overrightarrow{CD} = -2m$ , 所以  $m \perp \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD} \parallel m$ , 所以  $AB \parallel \alpha$  或  $AB \subset \alpha$ ,  $CD \perp \alpha$ , 故直线  $AB$  与平面  $\alpha$  的位置关系为  $AB \parallel \alpha$  或  $AB \subset \alpha$ , 直线  $CD$  与平面  $\alpha$  的位置关系为  $CD \perp \alpha$ .

8. 答案 ①③

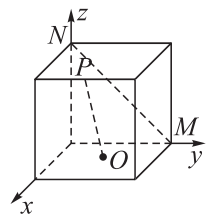


**解析** 令正方形的棱长为 2. 对于①, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则  $M(2, 0, 0), N(0, 0, 2), P(2, 0, 1), O(1, 1, 0)$ ,

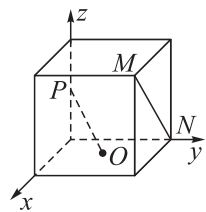
所以  $\overrightarrow{MN} = (-2, 0, 2), \overrightarrow{OP} = (1, -1, 1)$ , 所以  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OP} = -2 + 0 + 2 = 0$ , 所以  $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{OP}$ , 即  $MN \perp OP$ , 所以①正确;



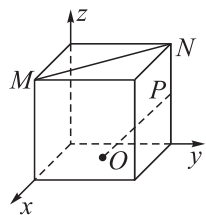
对于②, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则  $M(0, 2, 0), N(0, 0, 2), P(2, 1, 2), O(1, 1, 0)$ , 所以  $\overrightarrow{MN} = (0, -2, 2), \overrightarrow{OP} = (1, 0, 2)$ , 所以  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OP} = 0 + 0 + 4 \neq 0$ , 所以  $\overrightarrow{MN}$  与  $\overrightarrow{OP}$  不垂直, 即  $MN$  与  $OP$  不垂直, 所以②错误;



对于③, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则  $M(2, 2, 2), N(0, 2, 0), P(0, 0, 1), O(1, 1, 0)$ , 所以  $\overrightarrow{MN} = (-2, 0, -2), \overrightarrow{OP} = (-1, -1, 1)$ , 所以  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OP} = 2 + 0 - 2 = 0$ , 所以  $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{OP}$ , 即  $MN \perp OP$ , 所以③正确;



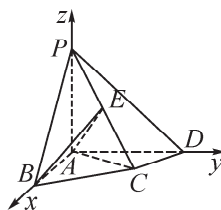
对于④, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则  $M(2, 0, 2), N(0, 2, 2), P(0, 2, 1), O(1, 1, 0)$ , 所以  $\overrightarrow{MN} = (-2, 2, 0), \overrightarrow{OP} = (-1, 1, 1)$ , 所以  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OP} = 2 + 2 + 0 \neq 0$ , 所以  $\overrightarrow{MN}$  与  $\overrightarrow{OP}$  不垂直, 即  $MN$  与  $OP$  不垂直, 所以④错误. 所以正确的序号为①③.



**9. 分析** (1) 建立空间直角坐标系, 确定  $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CD}$  的坐标, 通过计算  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$  可证  $AE \perp CD$ ;

(2) 可以求出平面  $ABE$  的一个法向量  $\mathbf{n}$ , 通过判断是否  $\overrightarrow{PD} = k\mathbf{n} (k \in \mathbf{R})$ , 即  $PD \perp$  平面  $ABE$  是否成立, 也可以确定  $\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}$  的坐标, 通过计算  $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$  是否成立. 从而判断  $PD \perp$  平面  $ABE$  是否成立.

**证明** (1) 如图所示, 以  $A$  为坐标原点建立空间直角坐标系,



设  $PA = AB = BC = 1$ , 则  $A(0, 0, 0), P(0, 0, 1)$ .

$\because \angle ABC = 60^\circ, AB = BC, \therefore \triangle ABC$  为正三角形.

$\therefore C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), E\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

设  $D(0, y, 0)$ , 由  $AC \perp CD$  得  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ ,

即  $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 则  $D\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right), E\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\therefore \overrightarrow{CD} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$ ,

又  $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

$\therefore \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ ,

$\therefore \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{CD}$ , 即  $AE \perp CD$ .

**解** (2) 方法一: 由 (1) 知  $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0), \overrightarrow{AE} =$

$= \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ,

设平面  $ABE$  的一个法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,

则  $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} x = 0, \\ \frac{1}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{3}z = 0, \end{cases}$

令  $y = 1$ , 则  $\mathbf{n} = (0, 1, -\sqrt{3})$ .

又  $\overrightarrow{PD} = \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -1\right)$ , 显然  $\overrightarrow{PD} \neq \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathbf{n}$ ,

$\therefore \overrightarrow{PD}$  与  $\mathbf{n}$  不共线.

$\therefore PD$  与平面  $ABE$  不垂直.

证法二: 由 (1) 知  $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right), \overrightarrow{PD} = (0,$



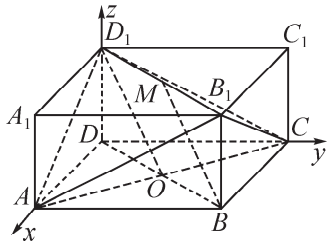
$$\frac{2\sqrt{3}}{3}, -1).$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} \times (-1) = \frac{1}{3} \neq 0.$$

$\therefore PD$  与  $AE$  不垂直.

$\therefore PD$  与平面  $AEB$  不垂直.

**10. 证明** (1) 建立如图所示的空间直角坐标系.



则点  $O(1, 1, 0)$ ,  $A(2, 0, 0)$ ,  $C(0, 2, 0)$ ,  $D_1(0, 0, \sqrt{2})$ ,  $B_1(2, 2, \sqrt{2})$ ,

所以  $\overrightarrow{OD_1} = (-1, -1, \sqrt{2})$ ,  $\overrightarrow{OB_1} = (1, 1, \sqrt{2})$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0)$ .

又点  $B(2, 2, 0)$ ,  $M(1, 1, \sqrt{2})$ , 所以  $\overrightarrow{BM} = (-1, -1, \sqrt{2})$ ,

所以  $\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{BM}$ , 且  $OD_1$  与  $BM$  不共线,

所以  $OD_1 \parallel BM$ .

又  $D_1O \subset$  平面  $D_1AC$ ,  $BM \not\subset$  平面  $D_1AC$ ,

所以  $BM \parallel$  平面  $D_1AC$ .

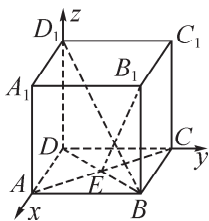
(2) 由 (1) 知  $\overrightarrow{OD_1} \cdot \overrightarrow{OB_1} = (-1, -1, \sqrt{2}) \cdot (1, 1, \sqrt{2}) = 0$ ,  $\overrightarrow{OD_1} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1, -1, \sqrt{2}) \cdot (-2, 2, 0) = 0$ ,

所以  $\overrightarrow{OD_1} \perp \overrightarrow{OB_1}$ ,  $\overrightarrow{OD_1} \perp \overrightarrow{AC}$ , 即  $OD_1 \perp OB_1$ ,  $OD_1 \perp AC$ ,

又  $OB_1 \cap AC = O$ , 所以  $D_1O \perp$  平面  $AB_1C$ .

**提升探究**

**11. 证明** 以  $D$  为原点,  $DA, DC, DD_1$  所在直线分别为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴建立如图所示的空间直角坐标系  $D-xyz$ , 设正方体的棱长为 1, 则  $B(1, 1, 0)$ ,  $D_1(0, 0, 1)$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $C(0, 1, 0)$ ,  $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $B_1(1, 1, 1)$ .



$$(1) \overrightarrow{BD_1} = (-1, -1, 1), \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$$

$$\therefore \overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \times (-1) + (-1) \times 1 + 1 \times 0 = 0,$$

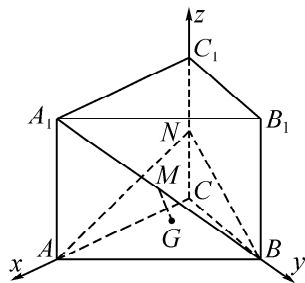
$$\therefore \overrightarrow{BD_1} \perp \overrightarrow{AC}, \therefore BD_1 \perp AC.$$

$$(2) \overrightarrow{EB_1} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1),$$

$$\therefore \overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{EB_1} = (-1) \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{BD_1} \perp \overrightarrow{EB_1}, \therefore BD_1 \perp EB_1.$$

**12. 证明** 由题意可知,  $AC, BC, CC_1$  两两垂直, 以  $C$  为原点, 分别以  $AC, BC, CC_1$  所在直线为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴建立空间直角坐标系, 则  $C(0, 0, 0)$ ,  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$ ,  $C_1(0, 0, 2)$ ,  $A_1(2, 0, 2)$ .



由中点坐标公式可得  $M(1, 1, 1)$ ,  $N(0, 0, 1)$ , 由重心的性质可得  $G(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ .

$$\text{则 } \overrightarrow{MG} = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), \overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0), \overrightarrow{AN} =$$

$$(-2, 0, 1), \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 2).$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{AN} = (-\frac{1}{3}) \times (-2) + (-\frac{1}{3}) \times 0 + (-\frac{2}{3}) \times 1 = 0,$$

$$\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{AB} = (-\frac{1}{3}) \times (-2) + (-\frac{1}{3}) \times 2 + (-\frac{2}{3}) \times 0 = 0,$$

所以  $MG \perp AN$ ,  $MG \perp AB$ ,

又  $AN \cap AB = A$ ,  $AN, AB \subset$  平面  $ABN$ ,

所以  $MG \perp$  平面  $ABN$ .

**13. 解** (1) 证明: 连接  $B_1C$ , 设  $B_1C \cap BC_1 = M$ , 连接  $MD$ ,

在  $\triangle AB_1C$  中,  $M$  为  $B_1C$  中点,  $D$  为  $AC$  中点,

$$\therefore DM \parallel AB_1,$$

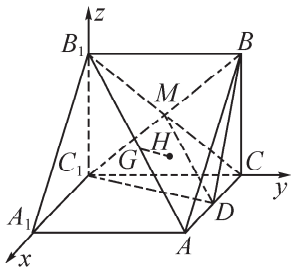
又  $\because AB_1$  不在平面  $BDC_1$  内,  $DM$  在平面  $BDC_1$  内,

$$\therefore AB_1 \parallel \text{平面 } BDC_1.$$

(2) 以  $C_1$  为坐标原点,  $\overrightarrow{C_1A_1}$  为  $x$  轴,  $\overrightarrow{C_1C}$  为  $y$  轴,



$\overrightarrow{C_1B_1}$  为  $z$  轴建立空间直角坐标系.



依题意,得  $C_1(0,0,0), D(1,2,0), B(0,2,2), G(1,1,1)$ , 假设存在  $H(0,m,n)$ ,

$$\overrightarrow{GH} = (-1, m-1, n-1), \overrightarrow{C_1D} = (1, 2, 0), \overrightarrow{DB} = (-1, 0, 2),$$

由  $GH \perp$  平面  $BC_1D$ , 得  $\overrightarrow{GH} \perp \overrightarrow{C_1D} \Rightarrow (-1, m-1, n-1) \cdot (1, 2, 0) = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$ .

同理, 由  $\overrightarrow{GH} \perp \overrightarrow{DB}$  得  $n = \frac{1}{2}$ , 即在矩形  $BCC_1B_1$  内存在点  $H$ , 使得  $GH \perp$  平面  $BDC_1$ .

此时点  $H$  到  $B_1C_1$  的距离为  $\frac{3}{2}$ , 到  $C_1C$  的距离为  $\frac{1}{2}$ .

### § 1.4.2 用空间向量研究距离、夹角问题

#### § 1.4.2(1) 空间向量与空间距离

#### 二、知识要点

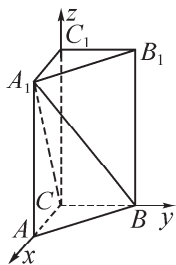
2. ①垂线段 ②  $m:n$  相等 ④  $\frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$

#### 3. 点到平面的距离

#### 三、典型例题

例 1 答案  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

解 如图所示, 以  $C$  为坐标原点, 以  $AC, BC, CC_1$  所在的直线分别为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴, 建立空间直角坐标系, 则直三棱柱各顶点坐标为:  $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,0), A_1(1,0,\sqrt{3}), B_1(0,1,\sqrt{3}), C_1(0,0,\sqrt{3})$ ,  $\therefore \overrightarrow{A_1B} = (-1, 1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{A_1C} = (-1, 0, -\sqrt{3}), \overrightarrow{A_1B_1} = (-1, 1, 0)$ ,



设平面  $A_1BC$  的一个法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ , 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} -x + y - \sqrt{3}z = 0, \\ -x - \sqrt{3}z = 0, \end{cases} \text{ 令 } z = 1 \text{ 得}$$

$x = -\sqrt{3}$ .  $\therefore$  平面  $A_1BC$  的一个法向量为  $\mathbf{n} = (-\sqrt{3}, 0, 1)$ ,

$$\therefore \text{点 } B_1 \text{ 到平面 } A_1BC \text{ 的距离 } d = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B_1}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

变式 1 答案  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解 以  $D$  为原点, 分别为  $DA, DC, DD_1$  所在直线为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则  $A_1(1,0,1), B(1,1,0), D_1(0,0,1)$ ,

$$\overrightarrow{A_1B} = (0, 1, -1), \overrightarrow{A_1D} = (-1, 0, -1), \overrightarrow{A_1D_1} = (-1, 0, 0).$$

设平面  $A_1BD$  的一个法向量  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ , 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} y - z = 0, \\ -x - z = 0, \end{cases}$$

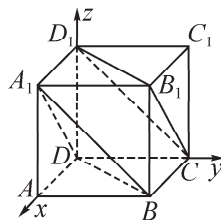
令  $z = 1$  得  $y = 1, x = -1$ .

$\therefore \mathbf{n} = (-1, 1, 1)$ .  $\therefore$  点  $D_1$  到平面  $A_1BD$  的距离  $d =$

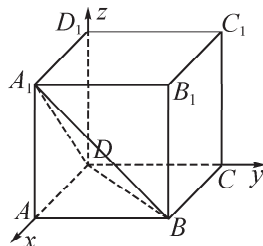
$$\frac{|\overrightarrow{A_1D_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\therefore$  平面  $A_1BD$  与平面  $B_1CD_1$  间的距离等于点  $D_1$  到平面  $A_1BD$  的距离,

$\therefore$  平面  $A_1BD$  与平面  $B_1CD_1$  间的距离为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .



例 2 解 建立如图所示的空间直角坐标系  $D-xyz$ , 则  $A_1(1,0,1), B(1,1,0), C_1(0,1,1)$ .



设平面  $A_1BD$  的一个法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,

$$\text{由 } \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DA_1} = 0 \text{ 及 } \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0,$$



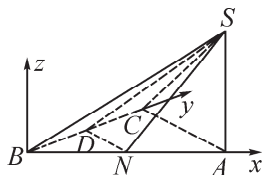
$$\text{得} \begin{cases} x+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-x \\ y=-x \end{cases},$$

取  $x=-1$ , 得  $\mathbf{n}=(-1,1,1)$ ,

于是点  $C_1$  到平面  $A_1BD$  的距离为  $d = \frac{|\overrightarrow{C_1D} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} =$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

**变式 2 解** 如图,以  $B$  为原点,  $BA$  所在直线为  $x$  轴,  $BC$  所在直线为  $y$  轴,过  $B$  与面  $ABC$  垂直的直线为  $z$  轴,建立空间直角坐标系,



易得  $S(4,0,2), N(2,0,0), D(0,1,0)$ .

设平面  $SDN$  的法向量为  $\mathbf{n}=(x,y,z)$ ,

因为  $\overrightarrow{DN}=(2,-1,0), \overrightarrow{SN}=(-2,0,-2)$ ,

$$\text{由} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DN}=0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{SN}=0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} 2x-y=0, \\ -2x-2z=0, \end{cases}$$

取  $x=1$ , 则平面  $SDN$  的法向量  $\mathbf{n}=(1,2,-1)$ ,

因为  $N$  在平面  $SND$  内,  $A(4,0,0), \overrightarrow{AN}=(-2,0,0)$ ,

所以  $A$  到平面  $SND$  的距离  $d = \frac{|\overrightarrow{AN} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} =$

$$\frac{2}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

**例 3 解**  $\because \angle ACD=90^\circ$ ,

$$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}=0, \text{同理}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA}=0.$$

$\because AB$  与  $CD$  成  $60^\circ$  角,  $\therefore \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD} \rangle = 60^\circ$  或  $120^\circ$ .

$$\text{又 } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = 3 + 2\cos \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD} \rangle.$$

当  $\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD} \rangle = 60^\circ$  时,  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} = 4, |\overrightarrow{BD}| = 2$ ;

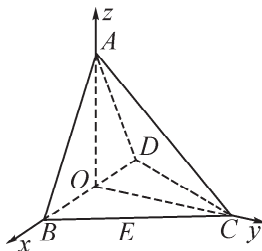
当  $\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD} \rangle = 120^\circ$  时,  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} = 2, |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{2}$ .

即  $B, D$  间的距离为  $2$  或  $\sqrt{2}$ .

**变式 3 解** 由题设易知  $AO \perp BD, OC \perp BD$ ,

$$\therefore OA=1, OC=\sqrt{3}, \therefore OA^2 + OC^2 = AC^2,$$

$\therefore \angle AOC=90^\circ$ , 即  $OA \perp OC$ .



以  $O$  为原点,  $OB, OC, OA$  所在直线为  $x, y, z$  轴, 建立空间直角坐标系  $O-xyz$ , 则  $A(0,0,1), B(1,0,$

$$0), C(0,\sqrt{3},0), D(-1,0,0), \therefore E\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \overrightarrow{AD} =$$

$$(-1,0,-1), \overrightarrow{AC}=(0,\sqrt{3},-1), \overrightarrow{ED}=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

设平面  $ACD$  的一个法向量为  $\mathbf{n}=(x,y,z)$ ,

则由  $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD}=0$  及  $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC}=0$ ,

$$\text{得} \begin{cases} x+z=0 \\ \sqrt{3}y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}z \end{cases},$$

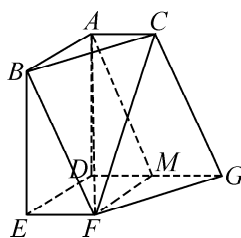
取  $z=\sqrt{3}$ , 得  $\mathbf{n}=(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$ ,

于是  $E$  到平面  $ACD$  距离为  $d = \frac{|\overrightarrow{ED} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} =$

$$\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

#### 四、备选例题

**例 1 证明** (1) 已知如图:



$\because$  平面  $ABC \parallel$  平面  $DEFG$ , 平面  $ABC \cap$  平面  $ADEB=AB$ ,

平面  $DEFG \cap$  平面  $ADEB=DE, \therefore AB \parallel DE$ ,

$\because AB=DE, \therefore ADEB$  为平行四边形,  $BE \parallel AD$ .

$\therefore AD \perp$  平面  $DEFG$ ,

$\because BE \subset$  平面  $BEF, \therefore$  平面  $BEF \perp$  平面  $DEFG$ .

取  $DG$  的中点为  $M$ , 连接  $AM, FM$ ,

则由已知条件易证四边形  $DEFM$  是平行四边形,

$\therefore DE \parallel FM$ ,

又  $\because AB \parallel DE, \therefore AB \parallel FM$



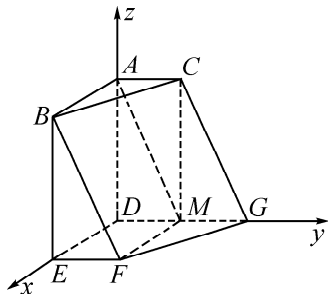
∴ 四边形  $ABFM$  是平行四边形, 即  $BF \parallel AM$ ,

又  $BF \not\subset$  平面  $ACGD$ , 故  $BF \parallel$  平面  $ACGD$ .

解 (2) 由 (1) 得  $BF \parallel$  平面  $ACGD$ , 所以  $BF \parallel CG$ ,

根据几何关系得:  $BF = FG = \sqrt{5}$

以  $DG$ 、 $DE$ 、 $DA$  为方向建立空间直角坐标系, 如图



则  $B(2,0,2)$ ,  $F(2,1,0)$ ,  $G(0,2,0)$ , 所以  $\overrightarrow{FB} = (0, 1, -2)$ ,  $\overrightarrow{FG} = (-2, 1, 0)$ .

设平面  $BGF$  法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FB} = y - 2z = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FG} = -2x + y = 0 \end{cases},$$

取  $y=1$  得  $\mathbf{n} = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ .

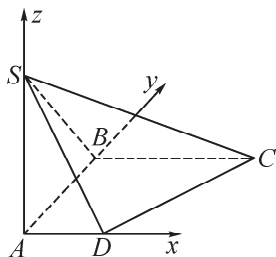
所以点  $D$  到平面  $BGF$  (即平面  $BFGC$ ) 的距离  $d =$

$$\frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DG}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

例 2 解 (1) 底面  $ABCD$  的面积  $S = \frac{1}{2}(1+2) \times 2 = 3$ ,

故四棱柱  $S-ABCD$  的体积  $V = \frac{1}{3}S \cdot SA = \frac{1}{3} \times 3 \times 2 = 2$ .

(2) 由题意知  $AD$ ,  $AB$ ,  $AS$  两两垂直. 以点  $A$  为原点, 分别以  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AS}$  分别为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴正方向建立空间直角坐标系 (如图),



则  $A(0,0,0)$ ,  $B(0,2,0)$ ,  $C(2,2,0)$ ,  $D(1,0,0)$ ,  $S(0, 0, 2)$ , 则  $\overrightarrow{SC} = (2, 2, -2)$ ,  $\overrightarrow{SD} = (1, 0, -2)$ .

设平面  $SCD$  的一个法向量为  $\mathbf{n}(x, y, 1)$ , 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{SC} = (x, y, 1) \cdot (2, 2, -2) = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{SD} = (x, y, 1) \cdot (1, 0, -2) = 0 \end{cases},$$

解得  $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$ .

$$\therefore \text{点 } B \text{ 到平面 } SCD \text{ 的距离 } d = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{4+0+0}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

### 小结反思

对求距离的相关公式需非常熟悉. 建立空间直角坐标系解题的一些基本步骤和规范需做到位. 点面距离可作为求几何体体积或者线面角的基础.

### 练习

#### 基础巩固

1. 答案 B

2. 答案 A

解析 以  $D$  为原点建立空间直角坐标系, 正方体棱长为  $a$ ,

则  $A_1(a, 0, a)$ ,  $A(a, 0, 0)$ ,  $M(a, 0, \frac{1}{2}a)$ ,  $B(a, a, 0)$ ,  $D(0, 0, 0)$ .

设  $\mathbf{n} = (x, y, z)$  为平面  $BMD$  的法向量,

则  $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ , 且  $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DM} = 0$ , 而  $\overrightarrow{BM} = (0, -a, \frac{1}{2}a)$ ,  $\overrightarrow{DM} = (a, 0, \frac{1}{2}a)$ .

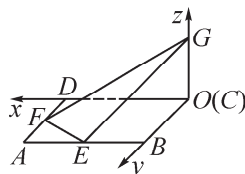
$$\text{所以 } \begin{cases} -y + \frac{1}{2}z = 0 \\ x + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}z \\ x = -\frac{1}{2}z \end{cases},$$

令  $z=2$ , 则  $\mathbf{n} = (-1, 1, 2)$ ,  $\overrightarrow{DA_1} = (a, 0, a)$ ,

则  $A_1$  到平面  $BDM$  的距离是  $d = \frac{|\overrightarrow{DA_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{6}a$ .

3. 答案 D

解析 如图所示, 建立空间直角坐标系  $O-xyz$ , 则  $B(0, 4, 0)$ ,  $E(2, 4, 0)$ ,  $F(4, 2, 0)$ ,  $G(0, 0, 2)$ ,



$$\therefore \overrightarrow{GE} = (2, 4, -2), \overrightarrow{GF} = (4, 2, -2).$$

设  $\mathbf{n} = (x, y, z)$  是平面  $EFG$  的一个法向量, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{GE} = 2x + 4y - 2z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{GF} = 4x + 2y - 2z = 0, \end{cases} \text{ 令 } x=1, \text{ 则 } y=1, z=3,$$

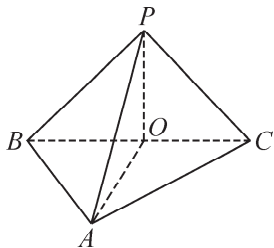
∴ 平面  $EFG$  的一个法向量为  $\mathbf{n} = (1, 1, 3)$ . 而  $\overrightarrow{EB} =$



$$(-2, 0, 0), \therefore d = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EB}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|-2|}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{11}}{11}.$$

#### 4. 答案 C

解 取  $BC$  中点为  $O$ , 连接  $OP, OA$ ,



因为  $AB = 6, AC = 8, \angle BAC = 90^\circ$ , 所以  $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ , 则  $AO = \frac{1}{2}BC = 5$ ;

又  $PA = PB = PC = 5\sqrt{2}$ , 所以  $PB^2 + PC^2 = 100 = BC^2$ , 则  $PB \perp PC, PO = \frac{1}{2}BC = 5$ ,

所以  $PO^2 + OA^2 = 50 = PA^2$ , 所以  $PO \perp AO$ ;

因为  $PB = PC, O$  为  $BC$  中点, 所以  $PO \perp BC$ ,

又  $BC \cap AO = O, BC \subset \text{平面 } ABC, AO \subset \text{平面 } ABC$ , 所以  $PO \perp \text{平面 } ABC$ ;

此时三棱锥  $P-ABC$  的体积为  $V_{P-ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot PO$

$$PO = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times 5 = 40,$$

因为在  $\triangle PAC$  中,  $PA = PC = 5\sqrt{2}, AC = 8$ ,

所以  $\triangle PAC$  的面积为  $S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2} \times 8 \times \sqrt{PA^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = 4\sqrt{34}$ ,

$$\sqrt{PA^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = 4\sqrt{34},$$

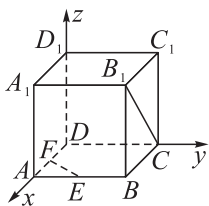
设点  $B$  到平面  $PAC$  的距离为  $d$ , 由  $V_{P-ABC} = V_{B-PAC}$

$$\text{可得 } 40 = \frac{1}{3}S_{\triangle PAC} \cdot d,$$

$$\text{所以 } d = \frac{120}{4\sqrt{34}} = \frac{15\sqrt{34}}{17}. \text{ 故选: C.}$$

#### 5. 答案 ABD

解析 以  $D$  为原点,  $DA$  所在直线为  $x$  轴,  $DC$  所在直线为  $y$  轴,  $DD_1$  所在直线为  $z$  轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示.



在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 令其棱长为 2, 则  $D(0, 0, 0), E(2, 1, 0), B_1(2, 2, 2), C(0, 2, 0), \overrightarrow{B_1C} = (-2, 0, -2)$ .

对于 A, 若  $F$  是棱  $AD$  的中点, 则  $F(1, 0, 0), \overrightarrow{EF} = (-1, -1, 0), |\cos \langle \overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{EF} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{B_1C} \cdot \overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{B_1C}| |\overrightarrow{EF}|} =$

$$\frac{2}{\sqrt{4+0+4} \times \sqrt{1+1+0}} = \frac{1}{2}, \text{ 所以直线 } B_1C \text{ 与 } EF$$

所成的角为  $60^\circ$ , 故 A 正确;

对于 B, 设  $F(m, 0, 0) (0 \leq m \leq 2), \overrightarrow{EF} = (m-2, -1, 0)$ , 要使直线  $B_1C$  与  $EF$  垂直, 则  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 4 - 2m = 0$ , 解得  $m = 2$ , 当  $F$  与  $A$  点重合时, 直线  $B_1C$  与  $EF$  垂直, 故 B 正确;

对于 C, 设  $F(m, 0, 0) (0 \leq m \leq 2), \overrightarrow{EF} = (m-2, -1, 0)$ , 要使直线  $B_1C$  与  $EF$  平行, 则  $\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{B_1C}$ , 这样的  $\lambda$  不存在, 所以直线  $B_1C$  与  $EF$  不可能平行, 故 C 错误;

对于 D, 设  $F(m, 0, 0) (0 \leq m \leq 2), \overrightarrow{EF} = (m-2, -1, 0)$ , 设异面直线  $B_1C$  与  $EF$  所成的角为  $\theta$ , 则  $\cos \theta = \frac{|\cos \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{B_1C} \rangle|}{|\overrightarrow{EF}| |\overrightarrow{B_1C}|} = \frac{|\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{B_1C}|}{|\overrightarrow{EF}| |\overrightarrow{B_1C}|} = \frac{|4-2m|}{2\sqrt{2} \times \sqrt{(m-2)^2 + 1}} =$

$$\frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{1}{(m-2)^2} + 1}} (m \neq 2), \text{ 当 } m = 2 \text{ 时}, \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ 当异}$$

面直线  $B_1C$  与  $EF$  所成的角最小时,  $\cos \theta$  最大, 即

$$m = 0, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

故 D 正确, 故选 ABD.

#### 6. 答案 $\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{5}$

解析  $\because C_1B_1 \perp \text{平面 } A_1ABB_1, \therefore C_1E \perp A_1B$ .

$\because B_1C_1 = 1, \therefore B_1E = \frac{\sqrt{6}}{3}$ , 所以点  $C_1$  到直线  $A_1B$  的

$$\text{距离 } C_1E = \sqrt{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

设  $B_1$  到  $EC_1$  的距离为  $d$ , 则  $S_{\triangle B_1C_1E} = \frac{1}{2}B_1C_1 \cdot$

$$B_1E = \frac{1}{2}C_1E \cdot d,$$

解得点  $B_1$  到直线  $C_1E$  的距离为  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .

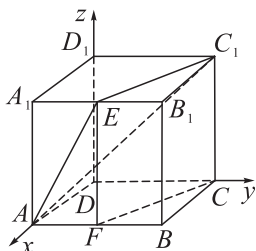


7. 答案 1

8. 答案  $\frac{\sqrt{6}}{6}$

解析 建立如图所示的空间直角坐标系, 则  $A(1, 0, 0), E(1, \frac{1}{2}, 1), C_1(0, 1, 1), F(1, \frac{1}{2}, 0), C(0, 1, 0)$ ,

故  $\overrightarrow{EC_1} = (-1, \frac{1}{2}, 0), \overrightarrow{FC} = (-1, \frac{1}{2}, 0)$ , 故  $\overrightarrow{EC_1} \parallel \overrightarrow{FC}$ ,



而  $EC_1 \subset$  平面  $AEC_1, FC \not\subset$  平面  $AEC_1$ , 故  $FC \parallel$  平面  $AEC_1$ ,

故直线  $FC$  到平面  $AEC_1$  的距离即为  $F$  到平面  $AEC_1$  的距离.

设平面  $AEC_1$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,

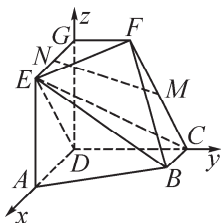
$$\text{又 } \overrightarrow{AE} = (0, \frac{1}{2}, 1), \text{ 故 } \begin{cases} \frac{1}{2}y + z = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}, \text{ 取 } y = 2, \text{ 则 } \mathbf{n} =$$

$(1, 2, -1)$ ,

而  $\overrightarrow{FE} = (0, 0, 1)$ , 故  $F$  到平面  $AEC_1$  的距离为

$$\left| \frac{1}{\sqrt{6}} \right| = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

9. (1) 证明 根据题意, 可以建立以  $D$  为原点, 分别以  $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DG}$  的方向为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴的正方向的空间直角坐标系 (如图), 可得  $D(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(1, 2, 0), C(0, 2, 0), E(2, 0, 2), F(0, 1, 2), G(0, 0, 2), M(0, \frac{3}{2}, 1), N(1, 0, 2)$ .



依题意  $\overrightarrow{DC} = (0, 2, 0), \overrightarrow{DE} = (2, 0, 2)$ .

设  $\mathbf{n}_0 = (x, y, z)$  为平面  $CDE$  的法向量, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n}_0 \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \\ \mathbf{n}_0 \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2y = 0, \\ 2x + 2z = 0, \end{cases}$$

不妨令  $z = -1$ , 可得  $\mathbf{n}_0 = (1, 0, -1)$ . 又  $\overrightarrow{MN} = (1, -\frac{3}{2}, 1)$ , 可得  $\overrightarrow{MN} \cdot \mathbf{n}_0 = 0$ ,

又因为直线  $MN \not\subset$  平面  $CDE$ , 所以  $MN \parallel$  平面  $CDE$ .

(2) 解 设线段  $DP$  的长为  $h (h \in [0, 2])$ , 则点  $P$  的坐标为  $(0, 0, h)$ , 可得  $\overrightarrow{BP} = (-1, -2, h)$ .

易知,  $\overrightarrow{DC} = (0, 2, 0)$  为平面  $ADGE$  的一个法向量, 故

$$|\cos \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{DC} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{DC}|} = \frac{2}{\sqrt{h^2 + 5}},$$

$$\text{由题意, 可得 } \frac{2}{\sqrt{h^2 + 5}} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{解得 } h = \frac{\sqrt{3}}{3} \in [0, 2].$$

所以线段  $DP$  的长为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

10. (1) 证明 在正方形  $AMDE$  中, 因为  $B$  是  $AM$  的中点, 所以  $AB \parallel DE$ .

又因为  $AB \not\subset$  平面  $PDE$ ,

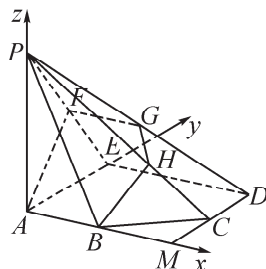
所以  $AB \parallel$  平面  $PDE$ .

因为  $AB \subset$  平面  $ABF$ , 且平面  $ABF \cap$  平面  $PDF = FG$ ,

所以  $AB \parallel FG$ .

(2) 解 因为  $PA \perp$  底面  $ABCDE$ , 所以  $PA \perp AB, PA \perp AE$ .

如图, 建立空间直角坐标系  $A-xyz$ , 则  $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(2, 1, 0), P(0, 0, 2), F(0, 1, 1), \overrightarrow{BC} = (1, 1, 0)$ .



设平面  $ABF$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

令  $z = 1$ , 则  $y = -1$ . 所以  $\mathbf{n} = (0, -1, 1)$ .

设直线  $BC$  与平面  $ABF$  所成角为  $\alpha$ ,



$$\text{则 } \sin \alpha = |\cos \langle \vec{n}, \vec{BC} \rangle| = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{BC}}{|\vec{n}| |\vec{BC}|} \right| = \frac{1}{2}.$$

因此直线  $BC$  与平面  $ABF$  所成角的大小为  $\frac{\pi}{6}$ .

设点  $H$  的坐标为  $(u, v, w)$ .

因为点  $H$  在棱  $PC$  上, 所以可设  $\vec{PH} = \lambda \vec{PC}$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ),

$$\text{即 } (u, v, w-2) = \lambda(2, 1, -2).$$

$$\text{所以 } u=2\lambda, v=\lambda, w=2-2\lambda.$$

因为  $\vec{n}$  是平面  $ABF$  的法向量, 所以  $\vec{n} \cdot \vec{AH} = 0$ ,

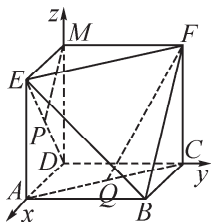
$$\text{即 } (0, -1, 1) \cdot (2\lambda, \lambda, 2-2\lambda) = 0.$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{2}{3}, \text{ 所以点 } H \text{ 的坐标为 } \left( \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

$$\text{所以 } PH = \sqrt{\left( \frac{4}{3} \right)^2 + \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \left( -\frac{4}{3} \right)^2} = 2.$$

### 提升探究

11. 解 建立空间直角坐标系如图,



则得  $D(0,0,0), A(a,0,0), B(a,a,0), C(0,a,0), M(0,0,a), E(a,0,a), F(0,a,a)$ , 则由中点坐标公式得  $P\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right), Q\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$ .

(1) 设  $\vec{n} = (x, y, z)$  是平面  $EFB$  的单位法向量, 即  $|\vec{n}| = 1, \vec{n} \perp$  平面  $EFB$ ,

所以  $\vec{n} \perp \vec{EF}$ , 且  $\vec{n} \perp \vec{BE}$ ,

$$\text{又 } \vec{EF} = (-a, a, 0), \vec{BE} = (0, -a, a),$$

$$\text{即有 } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ -ax + ay = 0, \\ ay - az = 0, \end{cases}$$

$$\text{得其中一个解是 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ z = \frac{\sqrt{3}}{3}, \end{cases}$$

$$\therefore \vec{n} = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \vec{PE} = \left( \frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2} \right),$$

$$\text{设所求距离为 } d, \text{ 则 } d = |\vec{PE} \cdot \vec{n}| = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

(2) 设  $\vec{e} = (x_1, y_1, z_1)$  是两异面直线的公垂线的单位方向向量,

$$\text{则由 } \vec{PM} = \left( -\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2} \right), \vec{FQ} = \left( \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, -a \right),$$

$$\text{得 } \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1, \\ -\frac{a}{2}x_1 + \frac{a}{2}z_1 = 0, \\ \frac{a}{2}x_1 - \frac{a}{2}y_1 - az_1 = 0. \end{cases}$$

$$\text{求得其中一个 } \vec{e} = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right),$$

$$\text{而 } \vec{MF} = (0, a, 0),$$

$$\text{设所求距离为 } m, \text{ 则 } m = |\vec{MF} \cdot \vec{e}| = \left| -\frac{\sqrt{3}}{3}a \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

12. 解 (1) 证明: 因为  $\vec{AA_1} \cdot \vec{AB} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 1 = 0$ ,

$$\vec{AA_1} \cdot \vec{AD} = 0 \times 1 + 2 \times (-1) + 2 \times 1 = 0,$$

所以  $\vec{AA_1} \perp \vec{AB}, \vec{AA_1} \perp \vec{AD}$ ,

即  $AA_1 \perp AB, AA_1 \perp AD$ .

因为  $AB, AD$  是平面  $ABCD$  内两条相交直线,

所以  $AA_1 \perp$  平面  $ABCD$ ,

所以平行六面体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  是直四棱柱.

$$(2) |(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AA_1}| = 1 \times 2 \times 1 + 0 \times (-1) \times 0 + 1 \times 1 \times 2 - 1 \times (-1) \times 2 - 0 \times 1 \times 1 - 1 \times 2 \times 0 = 6,$$

$$\text{由题意 } |\vec{AB}| = \sqrt{2}, |\vec{AD}| = 2\sqrt{2}, \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 1 \times 0 + 1 \times 2 + 0 \times 2 = 2,$$

$$\text{所以 } \cos \angle BAD = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AB}| |\vec{AD}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } \sin \angle BAD = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } S_{\text{四边形}ABCD} = AB \cdot AD \sin \angle BAD = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{因为 } |\vec{AA_1}| = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } V_{\text{平行六面体}ACDA-A_1B_1C_1D_1} = S_{\text{四边形}ABCD} \times AA_1 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6.$$

$$\text{所以 } |(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AA_1}| = V_{\text{平行六面体}ABCD-A_1B_1C_1D_1},$$

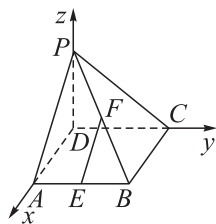
故  $|(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AA_1}|$  的值等于平行六面体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的体积.



13. 解 (1) 证明: 因为  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $DA \subset$  平面  $ABCD$ ,  $DC \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $PD \perp DA$ ,  $PD \perp DC$ .

因为底面  $ABCD$  为正方形, 所以  $DA \perp DC$ .

如图, 以  $D$  为原点,  $DA, DC, DP$  所在直线分别为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴建立空间直角坐标系.



设  $AD = a$ , 则  $D(0, 0, 0)$ ,  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(a, a, 0)$ ,  $C(0, a, 0)$ ,  $E(a, \frac{a}{2}, 0)$ ,  $P(0, 0, a)$ ,  $F(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ , 所以  $\overrightarrow{EF} = (-\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2})$ ,  $\overrightarrow{DC} = (0, a, 0)$ , 所以  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ , 所以  $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{DC}$ , 即  $EF \perp CD$ .

(2) 设  $G(x, 0, z)$ , 则  $\overrightarrow{FG} = (x - \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, z - \frac{a}{2})$ ,

$\overrightarrow{CB} = (a, 0, 0)$ ,  $\overrightarrow{CP} = (0, -a, a)$ .

若  $GF \perp$  平面  $PCB$ , 则  $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$  且  $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$ .

由  $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{CB} = (x - \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, z - \frac{a}{2}) \cdot (a, 0, 0) = a(x - \frac{a}{2}) = 0$ , 解得  $x = \frac{a}{2}$ .

由  $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{CP} = (x - \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, z - \frac{a}{2}) \cdot (0, -a, a) = \frac{a^2}{2} + a(z - \frac{a}{2}) = 0$ , 解得  $z = 0$ .

因为  $CB, CP$  为平面  $PCB$  内两条相交直线, 所以  $GF \perp$  平面  $PCB$ , 所以  $G$  的坐标为  $(\frac{a}{2}, 0, 0)$ , 即  $G$  为  $AD$  的中点.

### § 1.4.2(2) 空间向量与空间角(一)

#### 二、知识要点

1.  $(0, \frac{\pi}{2}]$  射影  $(0, \frac{\pi}{2}]$   $(0, \pi]$

2. (1)  $|\cos \langle a, b \rangle| = \frac{|a \cdot b|}{|a||b|}$

(2)  $|\cos \langle a, n \rangle| = \frac{|a \cdot n|}{|a||n|}$

(3)  $\cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = |\cos \langle n_1, n_2 \rangle| = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|}$

#### 三、典型例题

例 1 答案  $\frac{\sqrt{6}}{6}$

解 设该三棱柱的边长为 1, 则有  $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$ ,  $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}$ ,

则  $|\overrightarrow{AB_1}|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_1}^2 = 2 + 2\cos 60^\circ = 3$ .

$\overrightarrow{BC_1}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AA_1}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AA_1} - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 2$ .

而  $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1$ .

$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}| |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ .

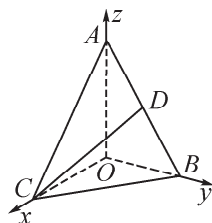
变式 1 解 建立空间直角坐标系  $O-xyz$ , 如图,

则  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(0, 0, 2\sqrt{3})$ ,  $C(2, 0, 0)$ ,  $D(0, 1, \sqrt{3})$ ,

$\therefore \overrightarrow{OA} = (0, 0, 2\sqrt{3})$ ,  $\overrightarrow{CD} = (-2, 1, \sqrt{3})$ ,

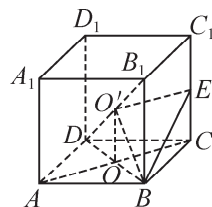
$\therefore \cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CD} \rangle = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{6}{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ .

$\therefore$  异面直线  $AO$  与  $CD$  所成角的余弦值是  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ .



例 2 解 解法一: 如图所示, 连  $AC$  交  $BD$  于点  $O$ , 设  $B_1D$  的中点为  $O'$ , 连  $EO', OO', O'B$ , 则  $O'O \parallel$

$\frac{1}{2}BB_1 \parallel CE$ .



$\therefore$  四边形  $OCEO'$  为平行四边形.

$\therefore EO' \parallel CO$ .

$\because CO \perp BD, CO \perp BB_1, BD \cap BB_1 = B$ ,

$\therefore CO \perp$  平面  $B_1BD$ ,



$\therefore EO' \perp \text{平面 } B_1BD$ .

$\therefore \angle EBO'$  是  $BE$  与平面  $B_1BD$  所成的角.

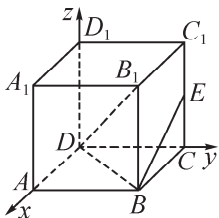
设正方体的棱长为 2,

则  $BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{5}$ ,  $BO' = \sqrt{3}$ .

$$\therefore \cos \angle EBO' = \frac{BO'}{BE} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

即  $BE$  与平面  $B_1BD$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ .

解法二: 如图所示, 建立空间直角坐标系. 设正方体的棱长为 2, 则  $B(2, 2, 0)$ ,  $B_1(2, 2, 2)$ ,  $E(0, 2, 1)$ ,  $\overrightarrow{BD} = (-2, -2, 0)$ ,  $\overrightarrow{BB_1} = (0, 0, 2)$ ,  $\overrightarrow{BE} = (-2, 0, 1)$ .



设平面  $B_1BD$  的法向量为  $n = (x, y, z)$ ,

$$\therefore n \perp \overrightarrow{BD}, n \perp \overrightarrow{BB_1}$$

$$\therefore \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{BD} = -2x - 2y = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{BB_1} = 2z = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} x = -y, \\ z = 0. \end{cases}$$

令  $y = 1$ , 则  $n = (-1, 1, 0)$ .

$$\cos \langle n, \overrightarrow{BE} \rangle = \frac{n \cdot \overrightarrow{BE}}{|n| |\overrightarrow{BE}|} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

设  $BE$  与平面  $B_1BD$  所成角为  $\theta$ , 则

$$\cos \theta = \sin \langle n, \overrightarrow{BE} \rangle = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

即  $BE$  与平面  $B_1BD$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ .

**变式 2 (方法一)(1)证明** 如下图, 连接  $A_1E$ .

因为  $A_1A = A_1C$ ,  $E$  是  $AC$  的中点,

所以  $A_1E \perp AC$ .

又平面  $A_1ACC_1 \perp$  平面  $ABC$ ,  $A_1E \subset$  平面  $A_1ACC_1$ ,

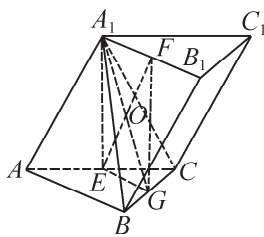
平面  $A_1ACC_1 \cap$  平面  $ABC = AC$ ,

所以  $A_1E \perp$  平面  $ABC$ , 则  $A_1E \perp BC$ .

又  $A_1F \parallel AB$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ , 所以  $BC \perp A_1F$ ,

又  $A_1E \cap A_1F = A_1$ , 所以  $BC \perp$  平面  $A_1EF$ .

所以  $EF \perp BC$ .



图(1)

(2)解 如上图, 取  $BC$  的中点  $G$ , 连接  $EG, GF$ ,

则四边形  $EGFA_1$  是平行四边形.

由于  $A_1E \perp$  平面  $ABC$ , 故  $A_1E \perp EG$ ,

所以平行四边形  $EGFA_1$  为矩形.

如图(1), 连接  $A_1G$  交  $EF$  于点  $O$ .

由(1)得  $BC \perp$  平面  $EGFA_1$ , 则平面  $A_1BC \perp$  平面  $EGFA_1$ ,

所以  $EF$  在平面  $A_1BC$  上的射影在直线  $A_1G$  上.

所以  $\angle EOG$  是直线  $EF$  与平面  $A_1BC$  所成的角(或其补角).

不妨设  $AC = 4$ , 则在  $\text{Rt} \triangle A_1EG$  中,  $A_1E = 2\sqrt{3}$ ,

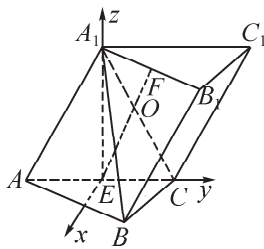
$EG = \sqrt{3}$ .

由于  $O$  为  $A_1G$  的中点, 故  $EO = OG = \frac{A_1G}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$ ,

$$\text{所以 } \cos \angle EOG = \frac{EO^2 + OG^2 - EG^2}{2EO \cdot OG} = \frac{3}{5}.$$

因此, 直线  $EF$  与平面  $A_1BC$  所成角的余弦值是  $\frac{3}{5}$ .

(方法二)(1)证明 如下图, 连接  $A_1E$ .



图(2)

因为  $A_1A = A_1C$ ,  $E$  是  $AC$  的中点,

所以  $A_1E \perp AC$ .

又平面  $A_1ACC_1 \perp$  平面  $ABC$ ,  $A_1E \subset$  平面  $A_1ACC_1$ ,

平面  $A_1ACC_1 \cap$  平面  $ABC = AC$ ,

所以  $A_1E \perp$  平面  $ABC$ .

如图, 以点  $E$  为原点, 分别以射线  $EC, EA_1$  为  $y$  轴、 $z$  轴的正半轴, 建立空间直角坐标系  $E-xyz$ .

不妨设  $AC = 4$ , 则  $A_1(0, 0, 2\sqrt{3})$ ,  $B(\sqrt{3}, 1, 0)$ ,



$$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 2\sqrt{3}\right), C(0, 2, 0).$$

$$\text{因此, } \overrightarrow{EF} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 2\sqrt{3}\right), \overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, 1, 0).$$

$$\text{由 } \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ 得 } EF \perp BC.$$

(2)解 设直线  $EF$  与平面  $A_1BC$  所成角为  $\theta$ .

$$\text{由 (1) 可得 } \overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{A_1C} = (0, 2, -2\sqrt{3}).$$

设平面  $A_1BC$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ .

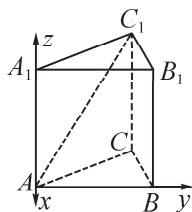
$$\text{由 } \begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{A_1C} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -\sqrt{3}x + y = 0, \\ y - \sqrt{3}z = 0. \end{cases} \text{ 取 } \mathbf{n} = (1, \sqrt{3}, 1).$$

$$\text{故 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{EF}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{EF} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{EF}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{4}{5}.$$

所以直线  $EF$  与平面  $A_1BC$  所成角的余弦值为  $\frac{3}{5}$ .

例 3 解 如图建立空间直角坐标系  $A-xyz$ , 则

$$\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, \sqrt{2}a), \overrightarrow{AB} = (0, a, 0), \overrightarrow{AC_1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a, \sqrt{2}a\right),$$



设平面  $AA_1B_1B$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}az = 0 \\ ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

取  $x = 1, \therefore \mathbf{n} = (1, 0, 0)$ ,

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AC_1}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC_1} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{AC_1}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{3}a} = -\frac{1}{2}.$$

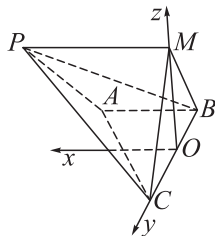
$\therefore AC_1$  和  $AA_1B_1B$  所成角的正弦值为  $\frac{1}{2}$ .

变式 3 (1)证明 取  $BC$  中点  $O$ , 连接  $MO$ , 因为  $MB = MC$ , 所以  $MO \perp BC$ , 因为平面  $MBC \perp$  平面  $ABC$ , 因为平面  $MBC \cap$  平面  $ABC = BC, MO \subset$  平面  $MBC$ , 所以  $OM \perp$  平面  $ABC$ , 如图建立空间直角坐标系, 则  $A(2, -\sqrt{3}, 0), B(0, -\sqrt{3}, 0), C(0, \sqrt{3}, 0)$ , 设  $M(0, 0, h)$ , 则  $P(3, 0, h)$ .

$$\text{所以 } \overrightarrow{AC} = (-2, 2\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{PB} = (-3, -\sqrt{3}, -h),$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PB} = -2 \times (-3) + 2\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) + 0 \times h =$$

0, 所以  $AC \perp PB$ .



(2)解 因为  $MC = \sqrt{6}$ , 且  $MO^2 + OC^2 = MC^2$ , 即  $h^2 + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2$ , 所以  $h = \sqrt{3}$ ,

$$\text{所以 } \overrightarrow{MC} = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}), \overrightarrow{AP} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3}), \overrightarrow{AC} = (-2, 2\sqrt{3}, 0).$$

设平面  $PAC$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -2x + 2\sqrt{3}y = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = x + \sqrt{3}y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases},$$

令  $x = \sqrt{3}$ , 则  $y = 1, z = -2$ , 所以  $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, -2)$ ,

设直线  $MC$  与平面  $PAC$  所成角为  $\theta$ , 所以  $\sin \theta =$

$$|\cos \langle \overrightarrow{MC}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{MC} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{MC}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}} = \frac{3}{4},$$

所以直线  $MC$  与平面  $PAC$  所成角的正弦值为  $\frac{3}{4}$ .

#### 四、备选例题

例 1 解 (1)因为  $M, N$  分别为  $PA, AB$  的中点, 所以  $MN \parallel PB, MN \not\subset$  平面  $PBC, \therefore MN \parallel$  平面  $PBC$ ; 又  $AB = AD, \angle BAD = 60^\circ$ , 所以  $\triangle ABD$  为正三角形,

又  $CD = BC, \angle BCD = 120^\circ$ ,

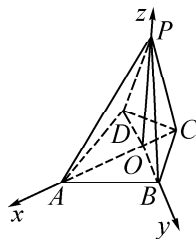
所以  $\angle CBD = 30^\circ, BC \perp AB$ ,

又  $DN \perp AB$ , 所以  $BC \parallel DN$ ,

$\therefore DN \parallel$  平面  $PBC$

因为  $MN \cap DN = N$ , 所以平面  $DMN \parallel$  平面  $PBC$ .

(2)如图, 取  $BD$  中点  $O$ , 连结  $AO, CO, PO$ ,



因为  $AD = AB, \angle DAB = 60^\circ$ , 所以  $\triangle ABD$  为正三角形, 所以  $AO \perp BD$ ,

又因为  $\triangle BCD$  为等腰三角形, 所以  $CO \perp BD$ , 所以



A、O、C 三点共线,所以  $AC \perp BD$ ,

因为  $PB = PD$ , 所以  $PO \perp BD$ ,  $CD = BC = 1$ ,  $\angle BCD = 120^\circ$ ,

所以  $BD = \sqrt{3}$ , 所以  $PB = PD = AD = AB = \sqrt{3}$ ,

$AO = PO = \frac{3}{2}$ ,

又  $PA = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $AO^2 + PO^2 = PA^2$ ,

所以  $AO \perp PO$ , 又  $AO \cap PO = O$ , 所以  $PO \perp$  平面  $ABCD$ .

以  $O$  为坐标原点,  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}$  分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴建立如图所示的空间直角坐标系,

$A(\frac{3}{2}, 0, 0), P(0, 0, \frac{3}{2}), B(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), C(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ ,

$\overrightarrow{PA} = (\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}), \overrightarrow{BC} = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ,

设异面直线  $PA$  与  $BC$  所成角为  $\alpha$ ,

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\left| \frac{-3}{4} \right|}{\frac{3\sqrt{2}}{2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

所以异面直线  $PA$  与  $BC$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .

**例 2 解** 由已知  $\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GP}$  两两垂直, 以  $G$  点为原点,  $\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GP}$  为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴建立空间直角坐标系, 则  $B(2, 0, 0), C(0, 2, 0), P(0, 0, 4)$ , 在等腰直角三角形  $BCG$  中, 易知  $BC = 2\sqrt{2}, GE = \sqrt{2}$ , 故  $E(1, 1, 0)$ .

$$(1) \overrightarrow{GE} = (1, 1, 0), \overrightarrow{PC} = (0, 2, -4), \cos \langle \overrightarrow{GE}, \overrightarrow{PC} \rangle = \frac{\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{GE}| |\overrightarrow{PC}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{20}} = \frac{\sqrt{10}}{10};$$

$\therefore GE$  与  $PC$  所成的角的余弦值为  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ;

(2) 由于  $AD = BC = 2\sqrt{2}, AG = \frac{1}{3}GD$ , 故  $GD = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ,

又  $\angle CGD = 45^\circ$ , 所以  $D(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ ,

设  $F(0, y, z)$ , 则  $\overrightarrow{DF} = (\frac{3}{2}, y - \frac{3}{2}, z)$ ,

$\therefore \overrightarrow{DF} \perp \overrightarrow{GC}$ ,

$$\therefore \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{GC} = (\frac{3}{2}, y - \frac{3}{2}, z) \cdot (0, 2, 0) = 2y - 3 = 0,$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}.$$

因为  $\overrightarrow{PF} = \lambda \overrightarrow{FC}$ ,

$$\text{所以 } (0, \frac{3}{2}, z - 4) = \lambda (0, \frac{1}{2}, -z),$$

$$\text{故 } \frac{3}{2} = \frac{\lambda}{2}, \text{ 所以 } \lambda = 3.$$

### 小结反思

1. 充分理解空间角的概念. 由于空间角都是用线线角定义, 因此求解空间角的关键在于将空间问题平面化, 把空间角转化为线线角, 进而灵活选择用综合法、向量法或坐标法求解.

2. 利用坐标法求解空间角时, 要注意在坐标系准确求解直线的方向向量或平面的法向量.

### 练习

#### 基础巩固

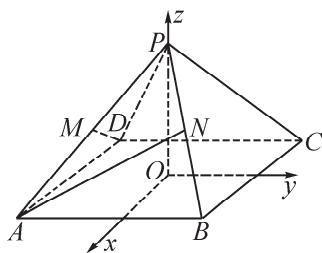
1. 答案 B

**解析** 如图所示, 设底面边长为 2, 则由侧面与底面所成二面角的正切值为  $\sqrt{2}$ , 得高为  $\sqrt{2}$ .

如图建立坐标系, 则  $A(1, -1, 0), D(-1, -1, 0)$ ,

$M(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), N(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), \overrightarrow{DM} = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ,

$\overrightarrow{AN} = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ .



$$\text{设所成的角为 } \theta, \text{ 则 } \cos \theta = \frac{|\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{DM}| |\overrightarrow{AN}|} = \frac{1}{6}.$$

2. 答案 B

**解** 连接  $PO$ , 则  $PO \parallel SA$ .

所以  $\angle OPD$  即为所成的角.

又  $SO \perp CD, AB \perp CD, SO \cap AB = O$ ,

所以  $CD \perp$  平面  $SAB$ .

所以  $CD \perp OP$ , 即  $DO \perp OP$ .

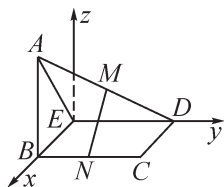
$$\tan \angle OPD = \frac{OD}{OP} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$



3. 答案 A

4. 答案 B

解析 建系如图所示,由题意知 $\triangle ABE$ 为等腰直角三角形,设 $CD=1$ ,则 $BE=1, AB=1, AE=\sqrt{2}$ ,设 $BC=DE=2a$ . 则 $E(0,0,0), A(1,0,1), N(1,a,0), D(0,2a,0), M(\frac{1}{2}, a, \frac{1}{2})$ ,



所以 $\overrightarrow{MN}=(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}), \overrightarrow{AE}=(-1, 0, -1)$ ,

所以 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AE}=(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) \cdot (-1, 0, -1)=0$ .

故 $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{MN}$ ,从而 $MN$ 与 $AE$ 所成的角为 $90^\circ$ .

5. 答案 ACD

解析 易知点 $P$ 在矩形 $BCC_1B_1$ 内部(含边界).

对于A,当 $\lambda=1$ 时, $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{CC_1}$ ,即此时 $P \in$ 线段 $CC_1$ ,如图1,将矩形 $BCC_1B_1$ 展开与矩形 $CAA_1C_1$ 在同一平面,则 $AP+PB_1$ 的最小值为 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ ,故A正确;

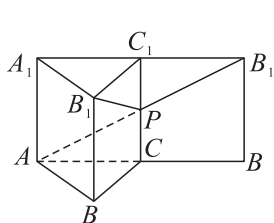


图1

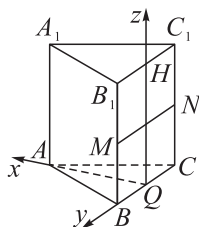


图2

对于B,当 $\mu=1$ 时, $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BB_1}+\lambda\overrightarrow{B_1C_1}$ ,故此时 $P$ 点轨迹为线段 $B_1C_1$ ,而 $P$ 到平面 $AA_1B_1B$ 的距离不是定值,所以三棱锥 $P-A_1AB$ 的体积不是定值,故B错误;

对于C,当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$ ,如图2,分别取 $BC, B_1C_1$ 的中点 $Q, H$ ,则 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BQ}+\mu\overrightarrow{QH}$ ,所以 $P$ 点轨迹为线段 $QH$ ,建立空间直角坐标系如图2所示,则 $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 1), \overrightarrow{BP}=(0, 0, \mu), B(0, \frac{1}{2}, 0)$ ,则 $\overrightarrow{A_1P}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \mu-1), \overrightarrow{BP}=(0, -\frac{1}{2}, \mu)$ ,由 $A_1P \perp BP$ ,得 $\overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{BP}=\mu(\mu-1)=0$ ,所以 $\mu=0$ 或

$\mu=1$ ,故 $H, Q$ 均满足题意,故C正确;

对于D,当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$ ,如图2,分别取 $BB_1, CC_1$ 的中点 $M, N$ , $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BM}+\lambda\overrightarrow{MN}$ ,所以 $P$ 点轨迹为线段 $MN$ ,设 $P(0, y_0, \frac{1}{2})$ ,因为 $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0)$ ,所以 $\overrightarrow{AP}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}, y_0, \frac{1}{2}), \overrightarrow{A_1B}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ ,由 $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{AP}=0$ ,得 $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}y_0-\frac{1}{2}=0$ ,解得 $y_0=-\frac{1}{2}$ ,此时 $P$ 与 $N$ 重合,又 $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{AB_1}=0$ ,则 $A_1B \perp$ 平面 $AB_1P$ ,故D正确. 故选ACD.

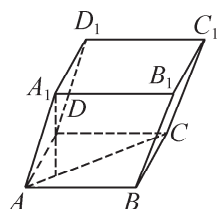
6. 答案  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析 法一:设 $AA_1$ 与底面 $ABCD$ 所成角为 $\theta$ ,则

$$\cos 60^\circ = \cos \theta \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

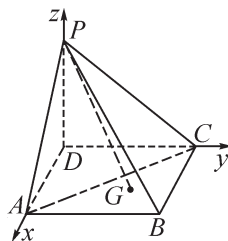
法二:设 $AA_1$ 与底面 $ABCD$ 所成角为 $\theta$ ,易知直线 $AA_1$ 在底面 $ABCD$ 的射影为直线 $AC$ ,由 $\cos \theta = |$

$$\cos \langle \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AA_1}| |\overrightarrow{AC}|} \text{ 可得 } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



7. 答案  $\frac{2\sqrt{34}}{17}$

解析 建立如图所示的空间直角坐标系,则 $P(0, 0, 1), A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 0)$ ,



所以 $G(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0), \overrightarrow{PG}=(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -1)$ .

又因为平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(0, 0, 1)$ ,

$$\text{则 } \cos \langle \overrightarrow{PG}, \mathbf{n} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + 1}} = -\frac{3\sqrt{17}}{17},$$