

第一章

1.1 空间向量及其运算

§ 1.1.1(1) 空间向量及其加减运算

基础巩固

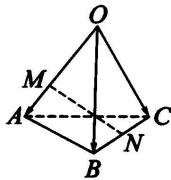
一、选择题

1. 下列命题中为真命题的是 ()

- A. 空间向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 的长度相等
 B. 将空间中所有的单位向量移到同一个起点, 则它们的终点构成一个圆
 C. 空间向量就是空间中的一条有向线段
 D. 不相等的两个空间向量的模必不相等

2. 已知空间四边形 $ABCD$, 连接 AC 、 BD , 则 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ 为 ()

- A. $\overrightarrow{AD}$ B. $\overrightarrow{BD}$
 C. $\overrightarrow{AC}$ D. $\mathbf{0}$

3. 如图, 空间四边形 $OABC$ 中, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, 点 M 在 $\overrightarrow{OA}$ 上, 且满足 $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{MA}$, 点 N 为 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{NM} =$ ()

- A. $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$
 B. $-\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$
 C. $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$
 D. $\frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$

4. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在 A_1C 上, 且 $\overrightarrow{A_1P} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A_1C}$. 若 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AA_1} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AD}$, 则 $x+y+z =$ ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. 1 C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{7}{4}$

5. (多选) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, AC_1 中点为 O , 则下列结论中不正确的是 ()

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$ 是一对相等向量
 B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OD_1}$ 是一对相反向量
 C. $\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1}$ 是一对相等向量
 D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}$ 是一对相反向量

二、填空题

6. 已知点 M 是 $\triangle ABC$ 所在平面外任意一点, 化简: $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} =$ _____.7. 已知点 O 为平行四边形 $ABCD$ 所在平面外任意一点, 且 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$, 则 $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d} =$ _____.8. 已知向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 都是非零空间向量, 给出下列说法:

- ①若向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同向, 则 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 同向, 且 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$; ②若向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 反向且 $|\mathbf{a}| < |\mathbf{b}|$, 则 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 同向, 且 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$; ③若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 反向且 $|\mathbf{a}| > |\mathbf{b}|$, 则



$a+b$ 与 a 同向, 且 $|a+b| = |a| - |b|$.

其中正确命题的序号是_____.

三、解答题

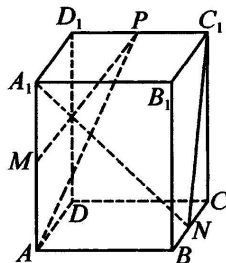
9. 化简下列算式

(1) $3(2a-b-4c) - 4(a-2b+3c)$

(2) $\overrightarrow{OA} - [\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})]$

10. 如图所示, 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 设 $\overrightarrow{AA_1} = a$, $\overrightarrow{AB} = b$, $\overrightarrow{AD} = c$, M, N, P 分别为 AA_1, BC, C_1D_1 的中点, 试用 a, b, c 表示下列各向量.

(1) $\overrightarrow{AP}$; (2) $\overrightarrow{A_1N}$; (3) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NC_1}$.



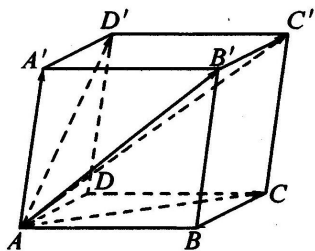
提升探究

11. 在空间四边形 $ABCD$ 中, 连接 AC, BD . 若 $\triangle BCD$ 是正三角形, 且 E 为其重心, 则

$$\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{AD} = \quad (\quad)$$

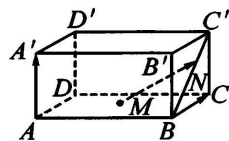
- A. $\overrightarrow{AB}$ B. $2\overrightarrow{BD}$
C. 0 D. $2\overrightarrow{DE}$

13. 已知各个面都是平行四边形的四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 是平行六面体.



(1) 化简: $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$;

(2) 设 M 是底面 $ABCD$ 的中心, N 是侧面 $BCC'B'$ 的对角线 BC' 上的点, 且 $BN : NC' = 3 : 1$, 设 $\overrightarrow{MN} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AD} + \gamma \overrightarrow{AA'}$, 试求 α, β, γ 之值.





§ 3.1.1(2) 空间向量的数乘运算

基础巩固

一、选择题

1. 对于空间向量有下列命题:①向量 a, b, c 共面是指其一定在一个平面内;②零向量与任意向量共线;③空间两个向量 a 和 b 共线的充要条件是存在实数 λ , 使得 $a = \lambda b$;④对于空间任一点 O , 点 P 在直线 AB 上的充要条件是存在实数 t , 使 $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ 或 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ (其中 $x+y=1$). 其中正确命题的个数是 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

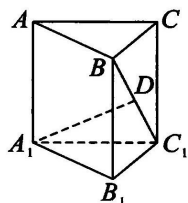
2. 设 A, B, C, D 为空间中的四个点, 则“ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ”是“ A, B, C, D 四点共面”的 ()

A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

3. 已知向量 a, b , 且 $\overrightarrow{AB} = a + 2b, \overrightarrow{BC} = -5a + 6b, \overrightarrow{CD} = 7a - 2b$. 则一定共线的三点是 ()

A. A, B, D B. A, B, C
C. B, C, D D. A, C, D

4. 如图, 在三棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中, D 是 BC_1 的中点, 且 $\overrightarrow{AA_1} = a, \overrightarrow{AB} = b, \overrightarrow{AC} = c$, 则 $\overrightarrow{A_1D} =$ ()



A. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

B. $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

C. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$

D. $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

5. (多选) 下列说法正确的是 ()

A. 若 $AB \parallel CD$, 则 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

B. $|a| + |b| = |a+b|$ 是 a, b 共线的必要条件

C. A, B, C 三点不共线, 对空间任意下点 O , 若 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$, 则 P, A, B, C 四点共面

D. 若 P, A, B, C 为空间四点, 且有 $\overrightarrow{PA} = \lambda\overrightarrow{PB} + \mu\overrightarrow{PC}$ ($\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ 不共线), 则 $\lambda + \mu = 1$ 是 A, B, C 三点共线的充要条件

二、填空题

6. 已知 a, b, c 是不共面的三个向量, 且实数 x, y, z 使 $xa + yb + zc = 0$, 则 $x^2 + y^2 + z^2 =$ _____.

7. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 在体对角线 D_1B 上, 且 $D_1E = \frac{1}{3}EB$, 点 F 在棱 D_1C_1 上. 若 A, E, F 三点共线, 则 $D_1F =$ _____ FC_1 .

8. 给出下列结论:①若 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, 则 A, B, C 三点共线;②若 $3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = 5\overrightarrow{OC}$, 则 A, B, C 三点共线;③已知 P 和不共线三点 A, B, C 四点共面, 且对于空间任一点 O , 都有 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{OC}$, 则 $\lambda = -2$.

其中正确命题的序号是_____.



三、解答题

9. 已知 A, B, C 三点不共线, 平面 ABC 外的

一点 M 满足 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

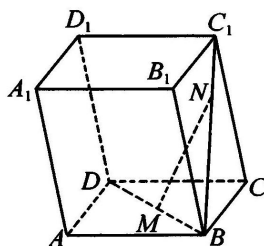
(1) 判断 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 三个向量是否共面;

(2) 判断点 M 是否在平面 ABC 内.

10. 如图所示, 已知几何体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是平行六面体.

(1) 化简 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, 并在图上标出结果;

(2) 设 M 是底面 $ABCD$ 的中心, N 是侧面 BCC_1B_1 对角线 BC_1 上的点, 且 $C_1N = \frac{1}{4}C_1B$, 设 $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD} + \gamma\overrightarrow{AA_1}$, 求 α, β, γ 的值.



■ 提升探究

11. 已知点 D 在 $\triangle ABC$ 确定的平面内, O 是平面 ABC 外任意一点. 若实数 x, y 满足 $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + 2y\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. 1 D. 2





12. 已知点 A, B, C, D 分别位于四面体的四个侧面内, 点 O 是空间任意一点, 则“ $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$ ”是“ A, B, C, D 四点共面”的 ()

A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分又不必要条件

13. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, P, M 为空间任意两点, 若 $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PB_1} + 7\overrightarrow{BA} + 6\overrightarrow{AA_1} + 4\overrightarrow{A_1D_1}$, 试问 M 点是否一定在平面 BA_1D_1 内? 并证明你的结论.

§ 1.1.2 空间向量的数量积运算

基础巩固

一、选择题

1. 设 a, b, c 为空间向量, 则下列命题中:
① $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$; ② $a \cdot b = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$; ③ $|a+b| \cdot |a-b| = |a^2 - b^2|$; ④ $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$; ⑤ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$; ⑥ a 与 $(a \cdot b) \cdot c - (a \cdot c) \cdot b$ 互相垂直; ⑦ $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$; ⑧ $a \cdot b \leq |a| \cdot |b|$. 其中正确命题的个数是 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

2. 设 A, B, C, D 是空间不共面的四点, 且满足 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, 则 $\triangle BCD$ 是 ()

A. 钝角三角形 B. 锐角三角形
C. 直角三角形 D. 不确定

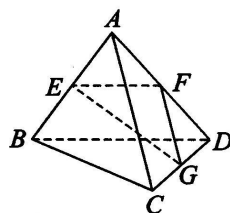
3. 在棱长都是 1 的三棱锥 $A-BCD$ 中, E, F 分别是 AB, CD 的中点, 则 $|\overrightarrow{EF}|$ 等于 ()

A. 1 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

4. 在棱长均为 1 的四面体 $ABCD$ 中, 下列结论不正确的是 ()

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \mathbf{0}$
C. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$
D. $|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = 2$

5. (多选) 如图所示, 已知空间四边形 $ABCD$ 的每条边和对角线长都为 a , 点 E, F, G 分别是 AB, AD, DC 的中点, 则下列向量的数量积等于 a^2 的是 ()





A. $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

B. $2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$

C. $2\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{AC}$

D. $2\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{CB}$

二、填空题

6. 若向量 $\mathbf{a} = (1, 1, x)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$, 满足条件 $(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot 2\mathbf{b} = -2$, 则 $x =$ _____.

7. 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $\angle BAD = \angle BAA_1 = \angle A_1AD = \theta$, $AB = AD = AA_1 = 1$. 若 $AC_1 = 2$, 则 $\cos \theta =$ _____.

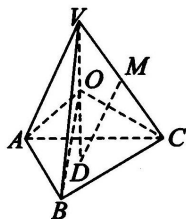
8. 已知 $|\mathbf{a}| = 3\sqrt{2}$, $|\mathbf{b}| = 4$, $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{n} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 135^\circ$, 且 $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$, 则实数 λ 等于 _____.

三、解答题

9. 如图, 正四面体 $VABC$ 的高 VD 的中点为 O , 棱 VC 的中点为 M .

(1) 求证: 设 AO, BO, CO 两两垂直;

(2) 求 $\langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AO} \rangle$.



10. 直三棱柱 $ABC - A'B'C'$ 中, $AC = BC = AA'$, $\angle ACB = 90^\circ$, D, E 分别为 AB, BB' 的中点.

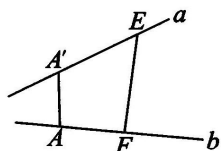
(1) 求证: $CE \perp A'D$;

(2) 求异面直线 CE 与 AC' 所成角的余弦值.

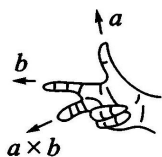


提升探究

11. 如图,两条异面直线 a, b 所成的角为 60° , 在直线 a, b 上分别取点 A', E 和点 A, F , 使得 $AA' \perp a$ 且 $AA' \perp b$. 已知 $A'E = 2$, $AF = 3$, $EF = 5$, 则线段 $AA' =$ _____.



12. (多选) 在三维空间中, $a \times b$ 叫做向量 a 与 b 的外积. 它是一个向量, 满足下列两个条件: ① $a \perp (a \times b)$, $b \perp (a \times b)$, 且 a, b 和 $a \times b$ 构成右手系(即三个向量的方向依次与右手的拇指、食指、中指的指向一致, 如图所示); ② $a \times b$ 的模 $|a \times b| = |a| |b| \sin \langle a, b \rangle$ ($\langle a, b \rangle$ 表示向量 a, b 的夹角). 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 以下结论正确的有 ()



- A. $|\overrightarrow{AB_1} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD_1} \times \overrightarrow{D_1B_1}|$
 B. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}$
 C. $\overrightarrow{A_1C_1} \times \overrightarrow{A_1D}$ 与 $\overrightarrow{BD_1}$ 共线
 D. $|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}|$ 与正方体体积的数值相等

13. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E 为棱 B_1C_1 上的动点, 求向量 $\overrightarrow{AE}$ 在向量 $\overrightarrow{AC}$ 方向上投影向量的数量的取值范围.

1.2 空间向量基本定理

基础巩固

一、选择题

1. 在以下三个命题中,真命题的个数是

()

- ①三个非零向量 a, b, c 不能构成空间的一个基底,则 a, b, c 共面;
 ②若两个非零向量 a, b 与任何一个向量都不能构成空间的一个基底,则 a, b 共线;
 ③若 a, b 是两个不共线的向量,而 $c = \lambda a + \mu b$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ 且 $\lambda\mu \neq 0$),则 $\{a, b, c\}$ 构成空间的一个基底.

A. 0 B. 1

C. 2 D. 3

2. 正方体 $ABCD-A'B'C'D'$, O_1, O_2, O_3 分别是 AC, AB', AD' 的中点,以 $\{\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AO_2}, \overrightarrow{AO_3}\}$ 为基底, $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AO_1} + y\overrightarrow{AO_2} + z\overrightarrow{AO_3}$, 则 x, y, z 的值是

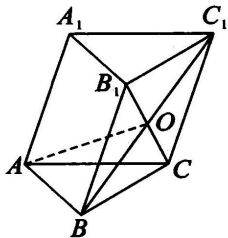
()

A. $x=y=z=1$ B. $x=y=z=\frac{1}{2}$

C. $x=y=z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $x=y=z=2$

3. 如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, BC_1 与 B_1C 相交于点 O , $\angle A_1AB = \angle A_1AC = 60^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ$, $A_1A = 3, AB = AC = 2$, 则线段 AO 的长度为

()



A. $\sqrt{\frac{29}{2}}$

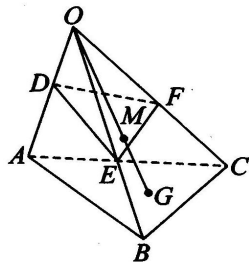
B. $\sqrt{29}$

C. $\frac{\sqrt{23}}{2}$

D. $\sqrt{23}$

4. 如图,在三棱锥 $O-ABC$ 中,点 G 是底面 $\triangle ABC$ 的重心,点 M 是线段 OG 上靠近点 G 的三等分点,过点 M 的平面分别交棱 OA, OB, OC 于点 D, E, F . 若 $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OE} = m\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OF} = n\overrightarrow{OC}$, 则 $\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} =$

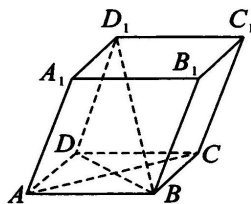
()



A. $\frac{13}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{9}{2}$

5. (多选) 如图,在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AD = AA_1 = 1$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, $\angle BAA_1 = \angle DAA_1 = \frac{\pi}{4}$, 则下列说法正确的是

()



A. $\{\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{AB}\}$ 不能构成空间的一个基底

B. $|\overrightarrow{BD_1}| = \sqrt{2}$

C. $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1

D. 直线 BD_1 与直线 AA_1 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$

二、填空题

6. $\{a, b, c\}$ 为空间的一个基底, 且存在实数 x, y, z 使得 $xa + yb + zc = \mathbf{0}$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____, $z =$ _____.