



■ 提升探究

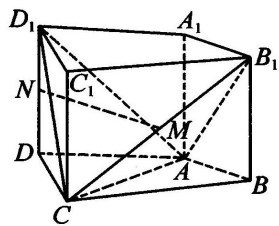
11. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是 DD_1 的中点, O 为底面 $ABCD$ 的中心, 求证: $\overrightarrow{B_1O}$ 是平面 PAC 的法向量.
12. 已知空间中三点 $A(2, 0, -2)$, $B(1, -1, -2)$, $C(3, 0, -4)$, 设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$.
- (1) 若 $|\mathbf{c}| = 3$, 且 $\mathbf{c} \parallel \overrightarrow{BC}$, 求向量 $\mathbf{c}$;
 - (2) 若点 $P(1, -1, m)$ 在平面 ABC 内, 求 m 的值.



13. 已知空间两个单位向量 $\vec{OA} = (m, n, 0)$, $\vec{OB} = (0, n, p)$ 与向量 $\vec{OC} = (1, 1, 1)$ 的夹角都等于 $\frac{\pi}{4}$, 求 $\cos \angle AOB$ 的值.

§ 1.4. 1(2) 空间中直线、平面的平行

1. (2020 · 江西省安义中学高二期末(理)) 如图, 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \perp AC$, $AB = 1$, $AC = AA_1 = 2$, $AD = CD = \sqrt{5}$, 且点 M 和 N 分别为 B_1C 和 D_1D 的中点. 求证: $MN \parallel$ 平面 $ABCD$.



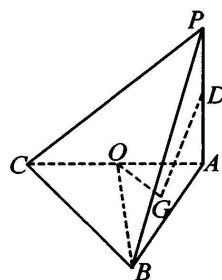


2. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱垂直于底面, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AA_1=2$, $AC=1$, M 、 N 分别是 A_1B_1 , BC 的中点. 证明: $MN \parallel$ 平面 ACC_1A_1 .

3. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp AC$.

(1) 求证: $AC \perp PB$;

(2) 设 O 、 D 分别为 AC , AP 的中点, 点 G 为 $\triangle OAB$ 内一点, 且满足 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, 求证: $DG \parallel$ 平面 PBC .



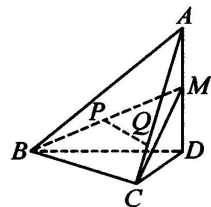


4. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD = AA_1 = a, AB = 2a$, E 是 BC 的中点, M, N 分别是 AE, CD_1 的中点.

求证: $MN \parallel$ 平面 ADD_1A_1 .

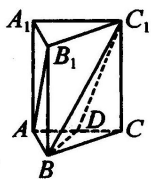
5. 如图, 在四面体 $A - BCD$ 中, $AD \perp$ 平面 $BCD, BC \perp CD, AD = 2, BD = 2\sqrt{2}$, M 是 AD 的中点, P 是 BM 的中点, 点 Q 在线段 AC 上, 且 $AQ = 3QC$.

求证: $PQ \parallel$ 平面 BCD .

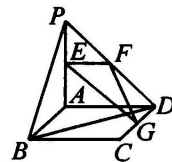




6. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 是 AC 的中点, 求证 $AB_1 \parallel$ 平面 DBC_1 .

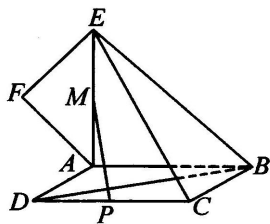


7. 如图所示, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $\angle PAD = 90^\circ$, 且 $PA = AD = 2$, E, F, G 分别是线段 PA, PD, CD 的中点. 求证: $PB \parallel$ 平面 EFG .





8. 如图, 正方形 $ABCD$ 所在平面与平面四边形 $ABEF$ 所在平面互相垂直, $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形, $AB = AE$. 设线段 CD 的中点为 P , 在直线 AE 上是否存在一点 M , 使得 $PM \parallel$ 平面 BCE ? 若存在, 请指出点 M 的位置, 并证明你的结论; 若不存在, 请说明理由.

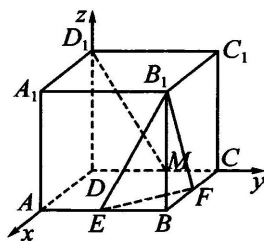


§ 1.4.1(3) 空间中直线、平面的垂直

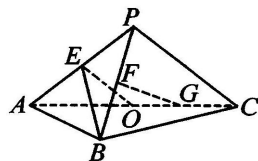
基础巩固

一、选择题

1. 已知向量 $a = (1, 1, 0)$, $b = (-1, 0, 2)$, 且 $ka + b$ 与 $2a - b$ 互相垂直, 则 k 的值为 ()
- A. 1 B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{7}{5}$
2. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是棱 AB, BC 的中点, M 是棱 BB_1 上的点, $D_1M \perp$ 平面 EFB_1 , 且 $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BB_1}$. 则 λ 的值为 ()



- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
3. 如图, 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , $\triangle ABC$ 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形, E, F, O 分别为 PA, PB, AC 的中点, $AC = 16, PA = PC = 10, G$ 是 OC 的中点. 那么 ()



- A. $FG \perp OB$ B. $FG \parallel OE$
- C. $FG \perp$ 平面 BOE D. $FG \parallel$ 平面 BOE
4. 若四个平面 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 的法向量分别为 $u = (2, -4, 12)$, $v = (1, -2, 6)$, $m = (3, -2, 1)$, $n = (2, 2, -2)$, 则 ()
- A. $\alpha \parallel \beta, \gamma \parallel \delta$ B. $\alpha \perp \beta, \gamma \parallel \delta$
- C. $\alpha \perp \beta, \gamma \perp \delta$ D. $\alpha \parallel \beta, \gamma \perp \delta$

5. (多选) 在空间直角坐标系中, 已知向量 $u = (a, b, c)$ (其中 $abc \neq 0$), 定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 异于点 P_0 的动点 $P(x, y, z)$, 则以下说法正确的是 ()

A. 若 u 为直线 PP_0 的一个方向向量, 则

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

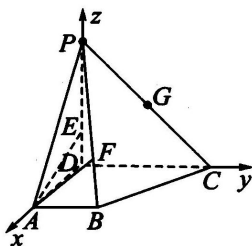
B. 若 u 为直线 PP_0 的一个方向向量, 则 $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

C. 若 u 为平面 α 的一个法向量, 平面 α 经过 P_0 和 P , 则 $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

D. 若 u 为平面 α 的一个法向量, 平面 α 经过 P_0 和 P , 则 $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

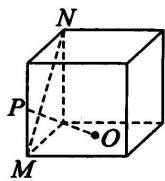
二、填空题

6. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $PD = CD = AD = 2AB = 3$, $AB \parallel CD$, $\angle CDA = 90^\circ$, 点 E, F 分别在棱 PD, PB 上, 且 $3\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DP}$, $3\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BP}$. 若过点 A, E, F 的平面与直线 PC 交于点 G , 且 $\overrightarrow{PG} = \lambda \overrightarrow{PC}$, 则 $\lambda =$ _____.

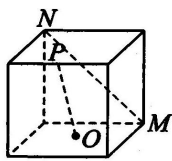


7. 已知平面 α 的一个法向量为 $m = (2, 3, -5)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{CD} = (-4, -6, 10)$, 则直线 AB 与平面 α 的位置关系为 _____, 直线 CD 与平面 α 的位置关系为 _____.

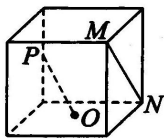
8. 如图, 在正方体中, O 为底面的中心, P 为所在棱的中点, M, N 为正方体的顶点, 则下图中满足 $MN \perp OP$ 的是 _____. (填写正确的序号)



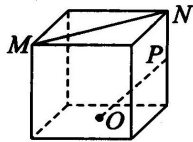
①



②



③



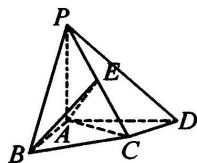
④

三、解答题

9. 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 垂足为 A , $AB \perp AD$ 于 A , $AC \perp CD$ 于 C , $\angle ABC = 60^\circ$, $PA = AB = BC$, E 是 PC 上点, 且 $PE = 2EC$.

(1) 求证: $AE \perp CD$;

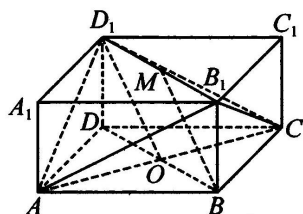
(2) 判断 PD 与平面 ABE 是否垂直.





10. 如图所示的长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, O 为 AC 与 BD 的交点, $BB_1 = \sqrt{2}$, M 是线段 B_1D_1 的中点.

- (1) 求证: $BM \parallel$ 平面 D_1AC ;
(2) 求证: $D_1O \perp$ 平面 AB_1C .



提升探究

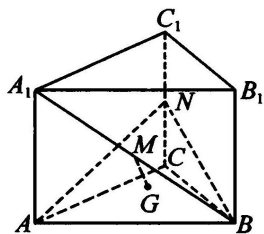
11. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, E 为 AC 的中点.

求证: (1) $BD_1 \perp AC$; (2) $BD_1 \perp EB_1$.





12. (2019 · 全国高三开学考试(理))如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB = AA_1 = 2$, M, N 分别是 A_1B 与 CC_1 的中点, G 为 $\triangle ABN$ 的重心. 求证: $MG \perp$ 平面 ABN .



13. 如图,三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $BC \perp AC$, $BC = AC = AA_1 = 2$, D 为 AC 的中点.

(1) 求证: $AB_1 \parallel$ 平面 BDC_1 ;

(2) 设 AB_1 的中点为 G , 问: 在矩形 BCC_1B_1 内是否存在点 H , 使得 $GH \perp$ 平面 BDC_1 . 若存在, 求出点 H 的位置, 若不存在, 说明理由.

