



第一章

空间向量与立体几何

1.1 空间向量及其运算

§ 1.1.1(1) 空间向量及其加减运算

一、课标要求

1. 了解向量及其运算由平面向空间推广的过程；
2. 了解空间向量的概念，理解零向量、单位向量、相反向量及相等向量的意义；
3. 掌握空间向量的加法与减法运算及运算律.

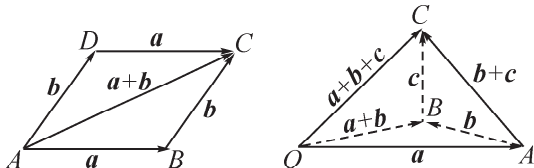
二、知识要点

类比平面向量方法，我们可以证明空间向量加法的交换律和结合律(证明略)：

(1) 交换律： $a+b=b+a$ ；

(2) 结合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$.

说明：揣摩下图，根据图形理解空间向量加法的交换律和结合律(数形结合).



三、典型例题

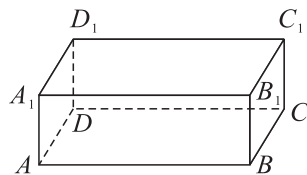
例1 给出下列命题：①两个空间向量

相等，则它们的起点相同，终点也相同；②若空间向量 a, b 满足 $|a| = |b|$ ，则 $a = b$ ；③在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，必有 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ ；④空间中任意两个单位向量必相等；⑤若空间向量 m, n, p 满足 $m = n, n = p$ ，则 $m = p$.

其中假命题的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

变式1 (多选) 如图所示，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 3, AD = 2, AA_1 = 1$ ，则在以八个顶点中的两个分别为始点和终点的向量中 ()



- A. 单位向量有 8 个
B. 与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有 3 个
C. 与 $\overrightarrow{AA_1}$ 的相反向量有 4 个
D. 向量 $\overrightarrow{A_1D_1}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{CC_1}$ 共面

例2 已知 M, G, H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 BC, CD, BD 的中点，化简下列各式.

- (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$;
(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BM}$



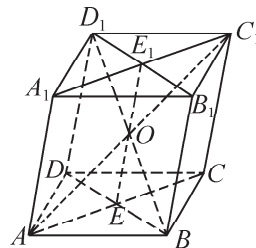
$$(3) \overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

变式 2

在四面体 $ABCD$ 中, M 为 BC 的中点, 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$, 试用 $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 表示向量 $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$.

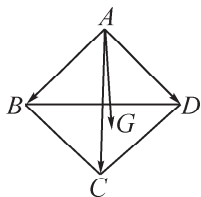
例 3

如图中, 已知点 O 是平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 体对角线的交点, 点 P 是空间中任意一点, 求证: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{PC_1} + \overrightarrow{PD_1} = 8 \overrightarrow{PO}$.





变式 3 设 A 是 $\triangle BCD$ 所在平面外的一点, G 是 $\triangle BCD$ 的重心. 求证: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$



四、备选例题

例1 观察棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中以其顶点为端点的向量, 其中: 单位向量有 _____ 个; 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有 _____ 个; 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 互为相反向量的向量有 _____ 个; 模长为 $\sqrt{2}$ 的向量有 _____ 个; 模长为 $\sqrt{3}$ 的向量有 _____ 个.

例2 设 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 是空间中给定的 5 个不同的点, 则使 $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} + \overrightarrow{MA_5} = \mathbf{0}$ 成立的点 M 的个数为 ()

A. 0 B. 1 C. 5 D. 10

五、小结反思

§ 1.1.1(2) 空间向量的数乘运算

一、课标要求

1. 进一步经历向量及其运算由平面向空间推广的过程;

2. 类比平面向量, 掌握空间向量的数乘运算及其运算律, 掌握空间向量的数乘运算的几何意义;

3. 理解共线向量、共面向量及直线的方向向量概念, 掌握共线向量定理及共面向量定理;

4. 掌握三点共线、四点共面的充要条件.



二、知识要点

1. 空间向量数乘运算

2. 空间共线向量(平行向量)定理

对于空间任意两个向量 $a (a \neq 0)$ 与 b , $a \parallel b$ 的充要条件是存在实数 λ , 使 $b = \lambda a$.

3. 空间共面向量定理

如果两个向量 a, b 不共线, 那么向量 p 与向量 a, b 共面的充要条件是存在唯一有序实数对 (x, y) , 使 $p = xa + yb$.

说明: 共面向量定理包涵了两个基本结论:

①空间共面向量的判定定理: 对于空间向量 a, b, p , 如果存在有序实数对 (x, y) , 使 $p = xa + yb$, 那么向量 p 与向量 a, b 共面.

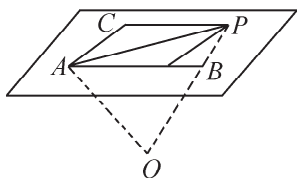
这是证明空间线面平行或三条直线共面的基本工具: 当向量 p 对应直线上至少有一个点在向量 a, b 确定的平面内时, 向量 p 与向量 a, b 在同一平面内; 当向量 p 对应直线上没有点在向量 a, b 确定的平面内时, 向量 p 对应直线与向量 a, b 确定的平面平行.

②空间共面向量的性质定理: 如果向量 p 与向量 a, b 共面, 那么存在唯一有序实数对 (x, y) , 使 $p = xa + yb$.

4. 空间直线的方向向量与空间直线的向量表示

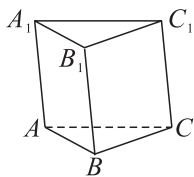
5. 空间平面的向量表示

如图, 空间一点 P 位于平面 ABC 内的充要条件是存在唯一有序实数对 (x, y) , 使 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 或对空间任意一点 O , 都有 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.



三、典型例题

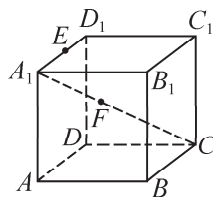
例1 (多选) 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, P 为空间一点, 且满足 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{BB_1}$, $\lambda, \mu \in [0, 1]$, 则 ()



- A. 当 $\lambda = 1$ 时, 点 P 在棱 BB_1 上
- B. 当 $\mu = 1$ 时, 点 P 在棱 B_1C_1 上
- C. $\lambda + \mu = 1$ 时, 点 P 在线段 B_1C 上
- D. 当 $\lambda = \mu$ 时, 点 P 在线段 BC_1 上

变式1 如图所示, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 在 A_1D_1 上, 且 $\overrightarrow{A_1E} = 2\overrightarrow{ED_1}$, F 在对角线 A_1C 上, 且 $\overrightarrow{A_1F} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FC}$.

求证: E, F, B 三点共线.





例2 对于空间一点 P 和不共线的三点 A, B, C , 有 $6\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$, 则 ()

- A. O, A, B, C 四点共面
 B. P, A, B, C 四点共面
 C. O, P, B, C 四点共面
 D. O, P, A, B, C 五点共面

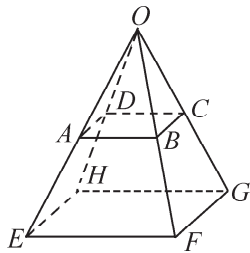
变式2 下列等式中, 使 M, A, B, C 四点共面的个数是 ()

- ① $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$;
 ② $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$;
 ③ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \mathbf{0}$;
 ④ $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

例3 已知平行四边形 $ABCD$, 从平面 AC 外一点 O 引向量 $\overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OF} = k\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OD}$.

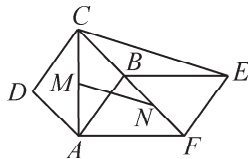
- 求证: (1) 四点 E, F, G, H 共面;
 (2) 平面 $AC \parallel$ 平面 EG .



变式3 设 e_1, e_2 是两个不共线的空间向量. 若 $\overrightarrow{AB} = 2e_1 - e_2$, $\overrightarrow{BC} = 3e_1 + 3e_2$, $\overrightarrow{CD} = e_1 + ke_2$, 且 A, C, D 三点共线, 则实数 k 的值为_____.

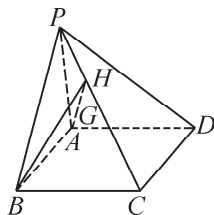
四、备选例题

例1 如图所示, 四边形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 都是平行四边形, 且不共面, M, N 分别是 AC, BF 的中点, 判断 $\overrightarrow{CE}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ 是否共线.





例2 如图 H 为四棱锥 $P-ABCD$ 的棱 PC 的三等分点, 且 $PH = \frac{1}{2}HC$, 点 G 在 AH 上, $AG = mAH$, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 若 G, B, P, D 四点共面, 求实数 m 的值.



§ 1.1.2 空间向量的数量积运算

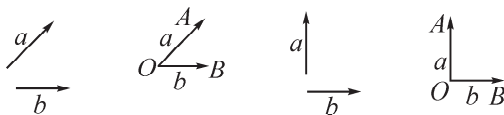
一、课标要求

1. 掌握空间向量的数量积及其运算律, 掌握空间向量的数量积的几何意义;
2. 理解空间向量的数量积的基本性质, 能利用数量积求解空间距离和角度;
3. 能运用向量的数量积判断向量的垂直关系.

二、知识要点

1. 空间向量的夹角

对于两个空间非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, 在空间任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, 则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的夹角, 记作 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$.



(1) 通常规定 $0 \leq \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \leq \pi$, 从而两个向量的夹角是唯一确定的.

(2) 显然地, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle$, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle -\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b} \rangle = \pi$.

特别地, $\langle -\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \langle \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB} \rangle = \langle \overrightarrow{OA}, -\overrightarrow{OB} \rangle = \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BO} \rangle = \pi - \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle$.

(3) 如果 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \frac{\pi}{2}$, 那么向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 相互垂直, 记作 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

2. 空间向量的数量积概念

已知两个空间非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 我们把数量 $(|\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \cdot \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle)$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积, 记作 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, 即 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$.

(1) 类比平面向量数量积的概念理解空间向量的数量积概念, 体会其中的共性与差异. 事实上, 由于空间两个向量始终共面, 因

五、小结反思



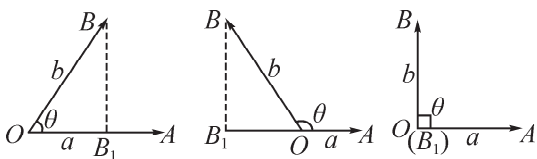
此空间两个向量的数量积的意义与平面上两个向量的数量积的意义实际上是一致的,从而空间两个向量的数量积可转化为平面内两个向量的数量积.

(2) 规定: $\mathbf{0}$ 与任何空间向量的数量积为 0.

3. 空间向量的数量积的几何意义

对于空间向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 由数量积概念 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cdot \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 知: 数量积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 等于 $\mathbf{a}$ 的长度 $|\mathbf{a}|$ 与 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向上的投影向量长度 $|\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 之积.

特别地, 若 $\mathbf{e}$ 是与 $\mathbf{a}$ 同向的单位向量, 则 $\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{a}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{e} \rangle$.



4. 空间向量的数量积的运算律

与平面向量数量积一样, 空间向量的数量积满足如下运算律:

$$(1) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \text{ (交换律);}$$

$$(2) (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}); \text{ (数乘结合律)}$$

$$(3) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \text{ (分配律).}$$

5. 空间向量的数量积的主要性质

设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是空间非零向量, 根据数量积的概念可得:

$$(1) \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = |\mathbf{a}|^2 \Leftrightarrow |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a^2} \text{ (求解空间线段长度的工具);}$$

$$(2) \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \text{ (求解空间线段角度的工具);}$$

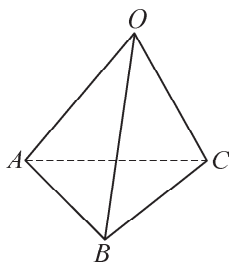
$$(3) \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ (证明空间垂直关系的工具);}$$

$$(4) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|.$$

三、典型例题

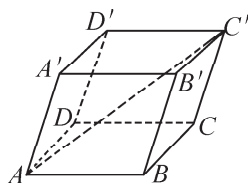
例1 若非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \perp (7\mathbf{a} - 5\mathbf{b})$, 且 $(\mathbf{a} - 4\mathbf{b}) \perp (7\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$, 则向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为_____.

变式1 如图, 在空间四边形 $OABC$ 中, $OA = 8, AB = 6, AC = 4, BC = 5, \angle OAC = 45^\circ, \angle OAB = 60^\circ$, 求 OA 与 BC 的夹角的余弦值.





例2 如图,在平行六面体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, $AB = 4$, $AD = 3$, $AA' = 5$, $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle BAA' = \angle DAA' = 60^\circ$, 求 AC' 的长.

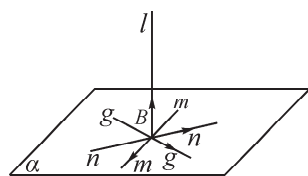


变式2 在三棱锥 $P - ABC$ 中,

$\angle PAB = \angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{2\pi}{3}$, $PA = 2$, $AB = 1$, $BC = 3$, 则 $PC =$ ()

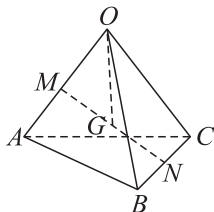
A. $\sqrt{7}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 1

例3 已知 m, n 是平面 α 内的两条相交直线, 直线 l 与平面 α 的交点为 B , 且 $l \perp m$, $l \perp n$. 求证: $l \perp \alpha$.



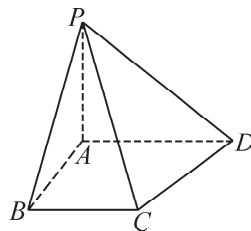


变式 3 如图, 已知空间四边形 $OABC$ 中, $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC$, 且 $OA = OB = OC$, M, N 分别是 OA, BC 的中点, G 是 MN 的中点. 求证: $OG \perp BC$.



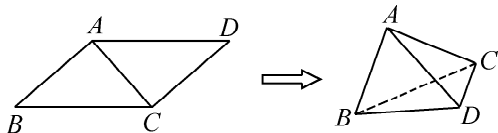
四、备选例题

例 1 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \perp BC$, $AB \perp AD$, 且 $PA = AB = BC = \frac{1}{2}AD = 1$, 求 PB 与 CD 所成的角.





例2 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,
 $AB=2, AC=\sqrt{2}, \angle ACD=90^\circ$,沿着它的对
角线 AC 将 $\triangle ACD$ 折起,使 AB 与 CD 成 60°
角,求此时 B, D 之间的距离.



五、小结反思





❖ 1.2 空间向量基本定理 ❖

一、课标要求

1. 了解空间向量的基本定理及其意义；
2. 四点共面

二、知识要点

1. 空间向量基本定理；
2. 基底,基向量；
3. 四点共面.

三、典型例题

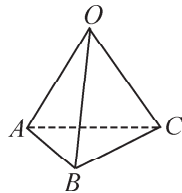
例1 若 $\{a, b, c\}$ 构成空间的一个基底,则下列向量可以构成空间另一个基底的是 ()

- A. $a+b, b-a, b$
- B. $a-b, a-b-c, c$
- C. $a+b, a-b, c$
- D. $a-c, b, c-a-b$

变式1 (多选)在四面体 $OABC$ 中, $\overrightarrow{OA}=a, \overrightarrow{OB}=b, \overrightarrow{OC}=c$, 点 M 在 OA 上, 且 $OM=2MA$, N 为 BC 的中点, 则下列四个选项中正确的有 ()

- A. $\overrightarrow{ON} = \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$
- B. $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(a+b+c)$
- C. $\overrightarrow{MN} = \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{2}{3}a$
- D. $\overrightarrow{MN} = \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{1}{3}a$

例2 如图, 空间四边形 $OABC$ 中, $OA \perp BC, OB \perp AC$. 求证: $OC \perp AB$.

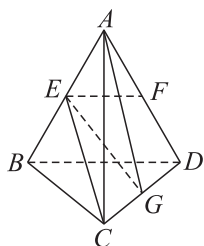




变式 2 如图所示,已知空间四边形 $ABCD$ 的每条边和对角线长都等于 1,点 E, F, G 分别是 AB, AD, CD 的中点. 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AC} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{c}$.

(1)求证: $EG \perp AB$;

(2)求异面直线 AG 和 CE 所成角的余弦值.



例 3 已知空间四面体 $OABC$ 中,对空间内任意一点 M ,满足 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{OC}$,下列条件中能确定点 M, A, B, C 共面的是 ()

A. $\lambda = \frac{1}{2}$

B. $\lambda = \frac{1}{3}$

C. $\lambda = \frac{5}{12}$

D. $\lambda = \frac{7}{12}$

变式 3 已知 O 为空间任意一点, A, B, C, P 满足任意三点不共线,但四点共面,且 $\overrightarrow{BP} = m\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$,则 m 的值为 _____.

四、备选例题

例 1 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是平行四边形,侧棱 PB, PC, PD 上分别有一点 E, F, G ,且满足 $\overrightarrow{PE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PF} = \lambda\overrightarrow{PC}$. 若 A, E, F, G 四点共面,则实数 $\lambda =$ _____.

例 2 已知空间四个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 满足 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = |\mathbf{d}| = 1, \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 夹角为 $60^\circ, \mathbf{c}$ 与 $\mathbf{d}$ 夹角为 90° ,则 $|\mathbf{a} + t\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c} + t\mathbf{d}|^2 (t \in \mathbf{R})$ 最小值是 _____.

五、小结反思



❖ 1.3 空间向量及其运算的坐标表示 ❖

§ 1.3.1 空间直角坐标系

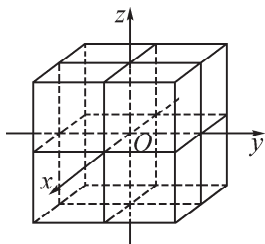
一、课标要求

1. 了解空间直角坐标系的建立过程.
2. 会用空间直角坐标系刻画点的位置, 掌握空间向量的坐标表示.

二、知识要点

1. 空间直角坐标系

在空间选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{i, j, k\}$. 以点 O 为原点, 分别以 i, j, k 的方向为正方向、以它们的长为单位长度建立三条数轴: x 轴、 y 轴、 z 轴, 它们都叫做坐标轴. 这时就建立了一个空间直角坐标系 $O-xyz$, O 叫做原点, i, j, k 都叫做坐标向量, 通过每两个坐标轴的平面叫做坐标平面, 分别称为 Oxy 平面, Oyz 平面, Ozx 平面, 它们把空间分成八个部分.



2. 空间右手直角坐标系

右手直角坐标系: 在空间直角坐标系中, 让右手拇指指向 x 轴的正方向, 食指指向 y 轴的正方向, 如果中指指向 z 轴的正方向, 则称这个坐标系为右手直角坐标系. 如无特别说明, 我们以后建立的坐标系都是右手系直

角坐标系.

右手系的空间直角坐标系的几何特征: x 轴、 y 轴、 z 轴逆时针顺序分布.

3. 空间右手直角坐标系的画法

通常, 将空间直角坐标系画在纸上时, x 轴与 y 轴、 x 轴与 z 轴均成 135° , 而 z 轴垂直于 y 轴. y 轴和 z 轴的单位长度相同, x 轴上的单位长度为 y 轴 (或 z 轴) 的单位长度的一半.

4. 空间中点的坐标表示

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, i, j, k 为坐标向量, 对空间任意一点 A , 对应一个向量 $\overrightarrow{OA}$, 且点 A 的位置由向量 $\overrightarrow{OA}$ 唯一确定, 由空间向量基本定理, 存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使得 $\overrightarrow{OA} = xi + yj + zk$. 在单位正交基底 $\{i, j, k\}$ 下与向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的有序实数组 (x, y, z) 叫做点 A 在空间直角坐标系中的坐标, 记作 $A(x, y, z)$, 其中 x 叫做点 A 的横坐标, y 叫做点 A 的纵坐标, z 叫做点 A 的竖坐标.

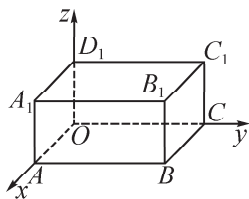
5. 向量的坐标表示: 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 给定向量 a , 作 $\overrightarrow{OA} = a$. 由空间向量基本定理, 存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使 $a = xi + yj + zk$ 有序实数组 (x, y, z) 叫做 a 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标, 上式可简记作 $a = (x, y, z)$.

三、典型例题

例1 如图, 在边长为 2 的正方体 $OABC-D_1A_1B_1C_1$ 中, 写出 B_1 的坐标以及



B_1 关于 xOy , xOz , yOz 平面对称的点的坐标.

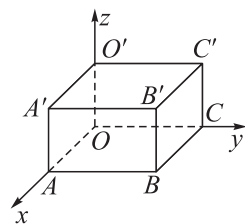


变式 1

在长方体 $OABC-O'A'B'C'$ 中, $OA = 3$, $OC = 4$, $OO' = 2$, 以 $\left\{\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}, \frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}\right\}$ 为单位正交基底, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.

(1) 写出 O', C, A', B' 四点的坐标.

(2) 写出向量 $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'B}$, $\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AC'}$ 的坐标.





例2 点 $A(1, -1, 2)$ 关于 x 轴的对称点为 B , 关于 y 轴的对称点为 C , 求两点 B, C 间的距离.

例3 已知 $\triangle ABC$ 的三顶点的坐标为 $A(1, 2, 3), B(3, -1, 2), C(2, 3, -1)$, 判断三角形 ABC 的形状.

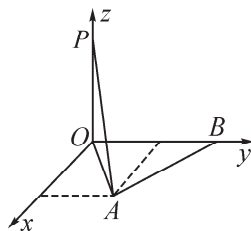
变式3 已知三点 $A(-1, 1, 2), B(1, 2, -1), C(a, 0, 3)$, 若 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 求 a 的值.

变式2 在直三棱柱 $ABO - A_1B_1O_1$ 中, $\angle AOB = \frac{\pi}{2}, AO = 4, BO = 2, AA_1 = 4, D$ 为 AB_1 的中点, 则在空间直角坐标系中 (以 O 为坐标原点) $\overrightarrow{DO}$ 的坐标是 _____, A_1, B 两点间距离是 _____.



四、备选例题

例1 如图:已知点 $A(1,1,0)$, 对于 Oz 轴正半轴上任意一点 P , 在 Oy 轴上是否存在一点 B , 使得 $PA \perp AB$ 恒成立? 若存在, 求出 B 点的坐标; 若不存在, 说明理由.



例2 判断正误, 正确的画“ $\times$ ”, 错误的画“ $\times$ ”.

(1) 空间直角坐标系中, 在 x 轴上的点的坐标一定是 $(0, b, c)$ 的形式. ()

(2) 空间直角坐标系中, 在坐标平面 Ozx 内的点的坐标一定是 $(a, 0, 0)$ 的形式. ()

(3) 关于坐标平面 Oyz 对称的点其横坐标、纵坐标保持不变, 竖坐标相反. ()

(4) 若点 A 的坐标为 (x, y, z) , 则 $\overrightarrow{OA} = (x, y, z)$. ()

五、小结反思

§ 1.3.2 空间向量运算的坐标表示

一、课标要求

1. 掌握空间向量的线性运算(加法、减法、及数乘运算)的坐标表示;

2. 掌握空间向量的数量积的坐标表示;

3. 掌握向量长度公式, 两向量夹角公式, 空间两点距离公式.

二、知识要点

1. 空间向量的坐标表示;

2. 向量的直角坐标运算;

3. 两个向量共线或垂直的判定:



(1) 若 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 则 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow (a_1, b_1, c_1) = \lambda(a_2, b_2, c_2) \Leftrightarrow a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2, c_1 = \lambda c_2$.

(2) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow$ _____.

4. 向量的模长及夹角的坐标公式.

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

(1) _____

(2) _____

5. 空间两点间距离公式 设 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间中任意两点, 则 $|P_1P_2| =$ _____.

三、典型例题

例1 已知 $\mathbf{a} = (2, -1, -2), \mathbf{b} = (0, -1, 4)$, 求 $\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, 2\mathbf{a} \cdot (-\mathbf{b}), (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

变式1 已知 $\mathbf{a} = (1, 2, 2), \mathbf{b} = (1, 0, 1)$.

(1) 求 $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$; (2) 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; (3) 求 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.



例2 已知空间三点 $A(0,2,3), B(-2,$

$1,6), C(1,-1,5)$.

(1)求 $(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$;

(2)求以 AB, AC 为边的平行四边形的面积;

(3)若向量 $\boldsymbol{a}$ 分别与 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 垂直, 且 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3}$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

变式2

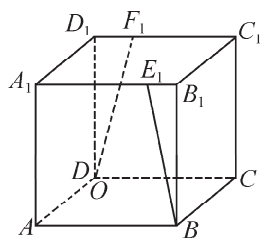
已知空间中三点 $A(-2,0,2), B(-1,1,2), C(-3,0,4)$. 设 $AB = \boldsymbol{a}, AC = \boldsymbol{b}$.

(1)求向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标;

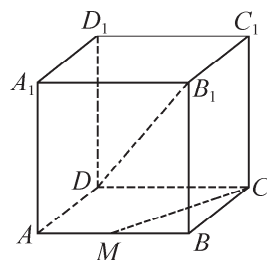
(2)若 $k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ 互相垂直, 求实数 k 的值.



例3 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 E_1, F_1 分别是 A_1B_1, C_1D_1 的一个四等分点,求 BE_1 与 DF_1 所成角的余弦值.



变式3 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 M 是 AB 的中点,求 DB_1 与 CM 所成角的余弦值.





四、备选例题

例1 设点 P 是线段 P_1P_2 上的一点, P_1, P_2 的坐标分别为 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$.

(1) 当点 P 是线段 P_1P_2 的中点时, 求点 P 的坐标;

(2) 当点 P 是线段 P_1P_2 的一个三等分点且 $\overrightarrow{P_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PP_2}$ 时, 求点 P 的坐标.

例2 在长方体 $OABC-O_1A_1B_1C_1$ 中, $OA=2, AB=3, AA_1=2$, E 是 BC 的中点, 以 O 为原点, 建立空间直角坐标系, 用向量方法解决下列问题.

(1) 求异面直线 AO_1 与 B_1E 所成角的余弦值;

(2) 过点 O_1 作 $O_1D \perp AC$ 于点 D , 求点 O_1 到点 D 的距离.

五、小结反思



❖ 1.4 空间向量的应用 ❖

§ 1.4.1 用空间向量研究直线、平面的位置关系

§ 1.4.1(1) 空间中点、直线和平面的向量表示

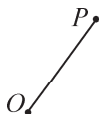
一、课标要求

掌握空间向量表示空间的点、直线、平面的基本方法. 能确定空间点的坐标, 会求平面的法向量.

二、知识要点

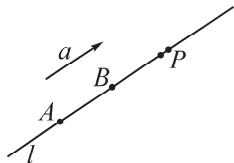
1. 空间中如何确定点的位置?

一般地, 我们取一个定点 O 作为基点, 那么空间任意一点 P 的位置就可以用向量_____来表示. 我们把向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的_____.



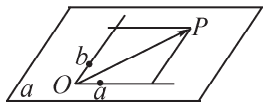
2. 空间中如何求一条直线的方向向量?

空间中任意一条直线 l 的位置可以由 l 上的一个定点 A 以及一个定方向确定. 如图, 点 A 是直线 l 上的一个定点, 直线 l 的方向向量为 $\mathbf{a}$. 在直线 l 上取 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, 那么对于直线 l 上的任意一个点 P , 一点存在实数 t , 使得_____.



说明: 向量方程 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ 体现了运动变化思想, 刻画了直线 l 上的动点 P 的轨迹: 点 A 和方向向量 $\mathbf{a}$ 不仅可以确定直线 l 的位置, 还可以具体地表示出直线 l 上任意一点的位置.

3. 空间中如何确定平面的位置?

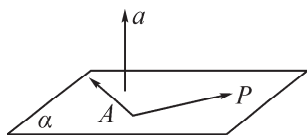


空间平面的向量表示. 一般地, 空间中平面 α 的位置可以由平面 α 内两条相交直线确定. 如图, 设这两条相交直线交于点 O , 它们的方向向量分别为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 点 P 为平面 α 上任意一点, 由平面向量基本定理知, 存在有序实数对 (x, y) , 使得_____.

4. 如何求一个平面的法向量?

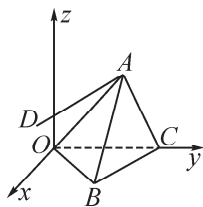
利用直线与平面

垂直的判定定理, 设法向量与平面内两不共线向量垂直, 体现为数量积为零, 建立方程组得到.



三、典型例题

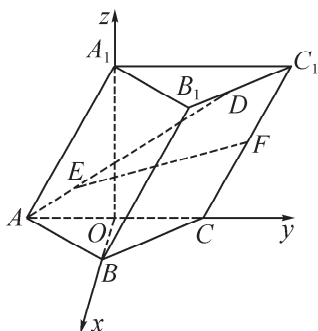
例1 已知 O 为坐标原点, 四面体 $OABC$ 中, $A(0, 3, 5)$ 、 $B(1, 2, 0)$ 、 $C(0, 5, 0)$, 直线 $AD \parallel BC$, 并且 AD 交坐标平面 xOz 于点 D , 求点 D 的坐标.





变式 1

如图, 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长都为 2, 侧面 $ACC_1 \perp$ 底面 ABC , 顶点 A_1 在底面的射影是棱 AC 的中点 O . 点 D, F 分别是 B_1C_1, CC_1 的中点, 点 E 在 AD 上且 $AD=4AE$. 现以 O 为原点、分别以 OB, OC, OA_1 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$. 试求三棱柱各顶点及 D, E, F 的坐标.



平面的法向量

(1) 平面法向量的定义

如图, 已知平面 α , 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 的基线与平面 α 垂直, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 叫做平面 α 的法向量或者说向量 $\boldsymbol{a}$ 与平面 α 正交.

(2) 平面法向量的性质

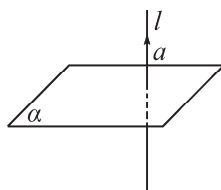
① 平面 α 的一个法向量垂直平面 α 共面的所有向量.

② 一个平面的法向量有无限多个, 它们互相平行.

【注意】 设 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α, β 的法向量, 则容易得到

a. $\alpha \parallel \beta$ 或 α 与 β 重合 $\Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \parallel \boldsymbol{n}_2$;

b. $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0$.



例 2 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 求证 $\overrightarrow{DB_1}$ 是平面 ACD_1 的一个法向量.



变式 2 (1) 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 分别是不重合的直线 l_1, l_2 的方向向量, 根据下列条件判断 l_1, l_2 的位置关系:

- ① $\mathbf{a} = (4, 6, -2), \mathbf{b} = (-2, -3, 1)$;
 ② $\mathbf{a} = (5, 0, 2), \mathbf{b} = (0, 1, 0)$;
 ③ $\mathbf{a} = (-2, -1, -1), \mathbf{b} = (4, -2, -8)$.

(2) 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 分别是不同的平面 α, β 的法向量, 根据下列条件判断 α, β 的位置关系:

- ① $\mathbf{u} = (-1, 1, -2), \mathbf{v} = (3, 2, -\frac{1}{2})$;
 ② $\mathbf{u} = (3, 0, 0), \mathbf{v} = (-2, 0, 0)$;
 ③ $\mathbf{u} = (4, 2, -3), \mathbf{v} = (1, 4, -2)$.

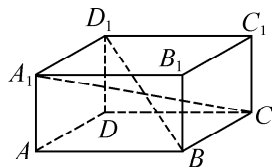
例 3 已知向量 $\mathbf{a} = (1, -3, 2), \mathbf{b} = (-2, 1, 1)$, O 为原点, 点 $A(-3, -1, 4), B(-2, -2, 2)$.

- (1) 求 $|2\mathbf{a} + \mathbf{b}|$;
 (2) 在直线 AB 上求一点 E , 使得 $\overrightarrow{OE} \perp \mathbf{b}$.

变式 3 已知点 $A(3, 4, 0), B(2, 5, 5), C(0, 3, 5)$, 且四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 则顶点 D 的坐标为_____.

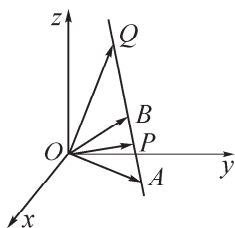
四、备选例题

例 1 (2019 · 北京市陈经纶中学高二期中) 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 设 $AD = AA_1 = 1, AB = 2$, 则 $|\overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{BD_1}| =$ _____, $\overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{CA_1} =$ _____.





例2 已知点 $A(2, 4, 0)$, $B(1, 3, 3)$, 如图, 以 $\overrightarrow{AB}$ 的方向为正方向, 在直线 AB 上建立一条数轴, P, Q 为数轴上的两点, 且满足: (1) $\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{AP}$; (2) $\overrightarrow{AQ} = -2\overrightarrow{QB}$, 求点 P 和点 Q 的坐标.



五、小结反思

§ 1.4.1(2) 空间中直线、平面的平行

一、课标要求

1. 用空间向量表述线线、线面、面面的平行关系;
2. 能用向量法或坐标法判断线线、线面、面面的平行关系.

二、知识要点

1. 共线向量定理是证明线线平行的基本工具: $l \parallel m \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 判定线面平行的基本方法

(1) 线面平行判定定理向量化: $\underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 共面向量定理: $\underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 法向量法: $l \not\subset \alpha$ 时, $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 面面平行的向量判定方法:

(1) 面面平行的判定定理向量化: $\underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 法向量法: $\underline{\hspace{2cm}}$.

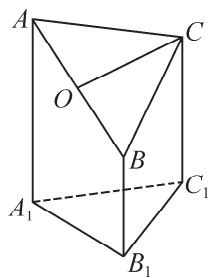
三、典型例题

例1 如图是一个直三棱柱(以 $A_1B_1C_1$ 为底面)被一平面所截得到的几何体, 截面为 ABC . 已知 $A_1B_1 = B_1C_1 = 1$, $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$,

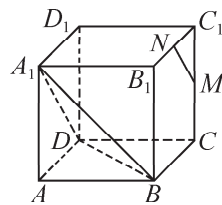




$AA_1 = 4, BB_1 = 2, CC_1 = 3$. 设点 O 是 AB 的中点, 证明: $OC \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$. (注: 侧棱和底面垂直的棱柱叫直棱柱)



变式 1 如图所示, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是 C_1C, B_1C_1 的中点, 求证: $MN \parallel$ 平面 A_1BD .





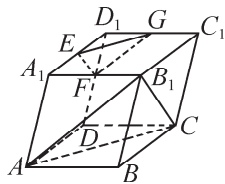
例2 已知在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 、 F 分别在 DB 、 D_1C 上, 且 $DE = D_1F = \frac{\sqrt{2}}{3}a$, 其中 a 为正方体棱长. 求证: $EF \parallel$ 平面 BB_1C_1C .

变式2 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 、 F 、 G 、 H 、 M 、 N 分别是正方体六个表面的中心, 证明: 平面 $EFG \parallel$ 平面 HMN .



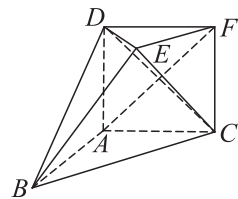
例3 如图所示,在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 、 F 、 G 分别是 A_1D_1 、 D_1D 、 D_1C_1 的中点.

求证:平面 $EFG \parallel$ 平面 AB_1C .



变式3 (2022·福建省长乐)如图所示在多面体 $ABC-DEF$ 中, $AD \perp$ 平面 ABC , 四边形 $ACFD$ 是正方形, $EF \parallel BC$, $BC = 2EF$, $AB \perp AC$, $AB = AC = 2$.

求证:直线 $AF \parallel$ 平面 BDE ;



四、小结反思



§ 1.4.1(3) 空间中直线、平面的垂直

一、课标要求

1. 理解直线的方向向量与平面的法向量;能用向量语言表述线线、线面、面面的垂直关系.

2. 能用向量法或坐标法判断线线、线面、面面的垂直关系.

二、知识要点

1. 判断线线垂直的向量方法:_____.

2. 判断线面垂直的向量方法

(1) 如果一条直线平行于一个平面的法向量,那么这条直线垂直于这个平面,反之亦然. 即, $l \perp \alpha \Leftrightarrow a \parallel u \Leftrightarrow a = \lambda u, \lambda \in \mathbf{R}$.

(2) 线面垂直的判定定理向量化_____.

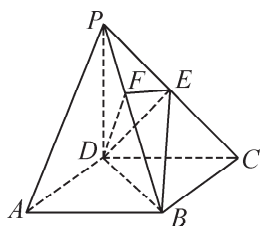
3. 判断面面垂直的向量方法

(1) 法向量法:定义向量化:_____.

(2) 面面垂直的判定定理向量化:_____.

三、典型例题

例1 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是正方形,侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $PD=DC$, E 是 PC 的中点,作 $EF \perp BP$ 交 BP 于点 F .



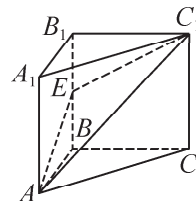
(1) 证明: $PA \parallel$ 平面 EDB ;

(2) 证明: $PB \perp$ 平面 EFD .



变式 1 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 BB_1, D_1B_1 的中点, 求证: $EF \perp$ 平面 B_1AC .

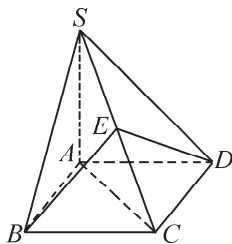
例 2 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp BC, AB=BC=2, BB_1=2, E$ 为 BB_1 的中点. 求证: 平面 $AEC_1 \perp$ 平面 AA_1C_1C .





变式 2 如图所示,底面 $ABCD$ 是正方形, $AS \perp$ 底面 $ABCD$,且 $AS = AB$, E 是 SC 的中点.

求证:平面 $BDE \perp$ 平面 $ABCD$.



例 3 如图,正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2, D 为 CC_1 的中点. 求证: $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD .

