



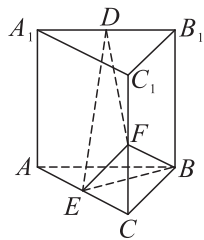
变式 3 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, G 为 CC_1 的中点, 求证: 平面 $A_1BD \perp$ 平面 GBD .

四、备选例题

例 1 (2022 · 贵州毕节) 如图, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = AA_1 = 2$, D, E, F 分别为 A_1B_1, AC, CC_1 的中点.

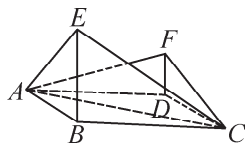
(1) 证明: $BF \perp DE$.

(2) 求平面 BEF 与平面 DEF 所成锐二面角的余弦值.





例2 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC = 120^\circ$, E, F 是平面 $ABCD$ 同一侧的两点, $BE \perp$ 平面 $ABCD$, $DF \perp$ 平面 $ABCD$, $BE = 2DF$, $AE \perp EC$. 证明: 平面 $AEC \perp$ 平面 AFC .



§ 1.4.2 用空间向量研究距离、夹角问题

§ 1.4.2(1) 空间向量与空间距离

一、课标要求

1. 理解并掌握空间两点之间的距离公式;
2. 了解点面距的各种求法, 能运用法向量求点到平面的距离.

二、知识要点

1. 空间两点之间的距离
2. 点到平面的距离: 点 P 到平面 α 的距离为点 P 到平面 α 的垂线段的长. 常用求法:
 - ①作出点 P 到平面的垂线后求出_____的长.
 - ②转移法, 如果平面 α 的斜线上两点 A, B 到斜足 C 的距离 AB, AC 的比为 $m : n$, 则点 A, B 到平面 α 的距离之比为_____. 特别地, $AB = AC$ 时, 点 A, B 到平面 α 的距离_____.
 - ③等体积法.
 - ④用法向量求点到平面的距离: 设 $A \in \alpha$ 空间一点 P 到平面 α 的距离为 d , 平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}$, 则 $d =$ _____.
3. 直线到平面的距离、平面与平面间的距离: 转化为_____.
4. 可借助点面距求线面角.

三、典型例题

例1 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱 $AA_1 = \sqrt{3}$, 底面三角形 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 1$, 则点 B_1 到平面 A_1BC 的距离为_____.

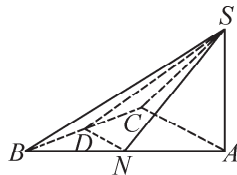
五、小结反思



变式 1 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 则平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离为_____.

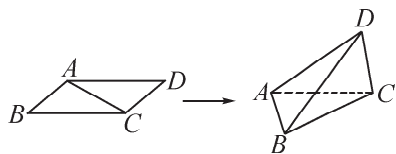
例 2 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 求点 C_1 到平面 A_1BD 的距离.

变式 2 如图, $\triangle ABC$ 是以 $\angle B$ 为直角的直角三角形, $SA \perp$ 平面 ABC , $SA = BC = 2$, $AB = 4$, 且 N, D 分别是 AB, BC 的中点, 求点 A 到平面 SND 的距离.





例3 如图所示,在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=AC=1$, $\angle ACD=90^\circ$,将它沿对角线 AC 折起,使 AB 与 CD 成 60° 角,求 B 、 D 间的距离.



变式3 四面体 $ABCD$ 中, O 、 E 分别是 BD 、 BC 的中点, $CA=CB=CD=BD=2$, $AB=AD=\sqrt{2}$,求点 E 到平面 ACD 的距离.

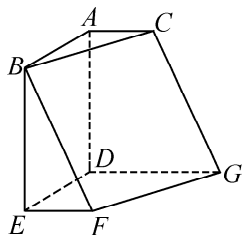


四、备选例题

例1 (2019·四川省高三二模)如图,在六面体 $ABCDEF$ 中,平面 $ABC \parallel$ 平面 $DEFG$, $AD \perp$ 平面 $DEFC$, $ED \perp DG$, $EF \parallel DG$, 且 $AB=AD=DE=DG=2AC=2EF$.

(1)求证: $BF \parallel$ 平面 $ACGD$;

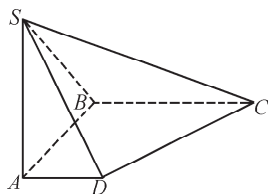
(2)若 $AC=1$,求点 D 到平面 $GFBC$ 的距离.



例2 如图,在四棱锥 $S-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是直角梯形,侧棱 $SA \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $SA=AB=BC=2, AD=1$.

(1)求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积;

(2)求点 B 到平面 SCD 的距离;



五、小结反思



§ 1.4.2(2) 空间向量与空间角(一)

一、课标要求

1. 理解空间中异面直线所成角、线面角及二面角的概念;
2. 能用向量方法解决空间角的简单计算问题.

二、知识要点

1. 空间角

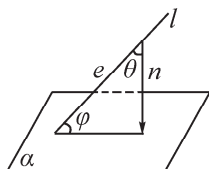
空间角的分类	定义	范围
异面直线所成的角	设 a, b 是两条异面直线, 过空间任一点 O 作 $a' \parallel a, b' \parallel b$, 则 a' 与 b' 所夹的锐角或直角叫做 a 与 b 所成的角.	
直线与平面所成角	直线与它在这个平面内的 _____ 所成的角.	
二面角及其平面角	以二面角的棱上任意一点为端点, 在两个面内分别作垂直于棱的两条射线, 这两条射线所成的角叫做二面角的平面角.	

2. 空间角的向量求法

(1) 异面直线所成的角的求法

设两异面直线所成角为 θ , 它们的方向向量分别为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 则 $\cos \theta =$ _____.

(2) 直线与平面所成的角的求法

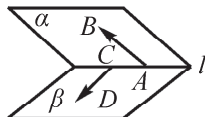


设直线 l 与平面 α 所成的角为 φ , 直线 l 的方向向量为 $\mathbf{e}$, 平面 α 的法向量为 $\mathbf{n}$, 则

$$\sin \varphi = \cos \theta = \left| \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{e}| \cdot |\mathbf{n}|} \right|.$$

(3) 二面角的求法

方法 1: 若 AB, CD 分别是二面角 $\alpha - l - \beta$ 的两个面



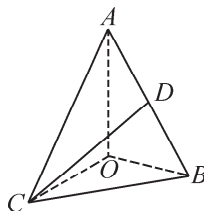
内与棱 l 垂直的异面直线 (垂足分别为 A, C), 则二面角的大小就等于 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角的大小, 若记二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角为 θ , 则 $\cos \theta =$ _____.

方法 2: 设二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角为 θ , 平面 α, β 的法向量为 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$, 则 $|\cos \theta| =$ _____.

三、典型例题

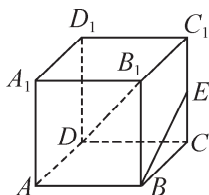
例1 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面边长和侧棱长都相等, $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 60^\circ$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 _____.

变式1 如图, 在 $\text{Rt} \triangle AOB$ 中, $\angle OAB = \frac{\pi}{6}$, 斜边 $AB = 4$. $\text{Rt} \triangle AOC$ 可以通过 $\text{Rt} \triangle AOB$ 以直线 AO 为轴旋转得到, 且二面角 $B-AO-C$ 是直二面角. 动点 D 在斜边 AB 上. 当 D 为 AB 的中点时, 求异面直线 AO 与 CD 所成角的余弦值.





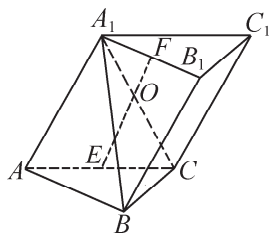
例2 如图所示,在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 C_1C 的中点,求 BE 与平面 B_1BD 所成角的余弦值.



变式2 如图,已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, 平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC , $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $A_1A = A_1C = AC$, E, F 分别是 AC, A_1B_1 的中点;

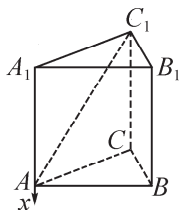
(1)证明: $EF \perp BC$.

(2)求直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值.





例3 如图,正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a ,侧棱长为 $\sqrt{2}a$,求 AC_1 和 AA_1B_1B 所成角的正弦值.

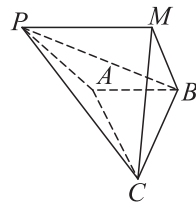


变式3 (2022·浙江·湖州中学)如图,四棱锥 $C-ABMP$ 中,平面 $MBC \perp$ 平面 ABC , $MB = MC$, $PM \parallel AB$, $2PM = 3AB$,

$$AC = 2AB, BC = 2\sqrt{3}, \angle ABC = \frac{\pi}{2}.$$

(1)求证: $AC \perp PB$;

(2)当 $MC = \sqrt{6}$ 时,求直线 MC 与平面 PAC 所成角的正弦值.



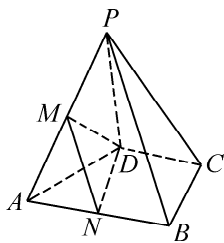


四、备选例题

例1 (2020·全国高三月考(理))如图
所示,四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PB=PD=$
 $AD=AB$, $\angle BAD=60^\circ$, $CD=CB=1$,
 $\angle BCD=120^\circ$,点 M 、 N 分别为 PA 、 AB 的
中点.

(1)证明:平面 $DMN \parallel$ 平面 PBC ;

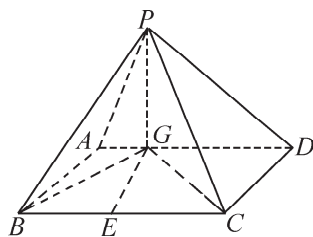
(2)若 $PA=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,求异面直线 PA 与 BC
所成角的余弦值.



例2 如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面
 $ABCD$ 是平行四边形, $PG \perp$ 平面 $ABCD$,垂
足为 G , G 在 AD 上,且 $PG=4$, $AG=\frac{1}{3}GD$,
 $BG \perp GC$, $GB=GC=2$, E 是 BC 的中点.

(1)求异面直线 GE 与 PC 所成的角的余
弦值;

(2)若 F 点是棱 PC 上一点,且 $\overrightarrow{PF} =$
 $\lambda \overrightarrow{FC}$,异面直线 DF 与 GC 所成角为 90° ,求实
数 λ 值.



五、小结反思



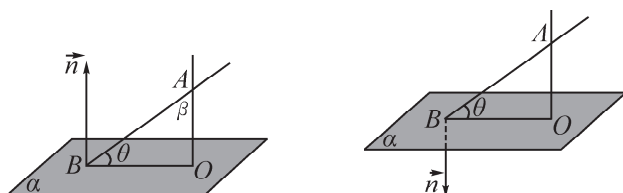
§ 2.4.2(3) 空间向量与空间角(二)

一、课标要求

掌握求异面直线所成的角、直线与平面所成的角、二面角的向量方法.

二、知识要点

1. (1) 直线与平面所成的角(范围: $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$)

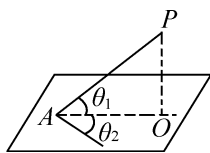


$$\sin \theta = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AB}| |\vec{n}|}.$$

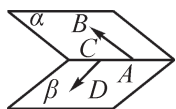
当 $\theta = 0^\circ$ 时, 直线在平面内.

当 $\theta = 90^\circ$ 时, 直线与平面垂直.

(2) 三余弦定理: 用于求线面角和线线角. 斜线和平面内的直线与斜线的射影所成角的余弦之积等于斜线和平面内的直线所成角的余弦, 即: $\cos \theta_1 \cos \theta_2 = \cos \theta$.



2. 二面角的求法



方法 1: 若 AB, CD 分别是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个面内与棱 l 垂直的异面直线(垂足分别为 A, C), 则二面角的大小就等于 $\vec{AB}$ 与 $\vec{CD}$ 的夹角的大小, 若记二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CD}|}{|\vec{AB}| |\vec{CD}|}$.

方法 2: 设二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 θ , 平面 α, β 的法向量为 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$, 则 $|\cos \theta| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$.

3. 空间距离

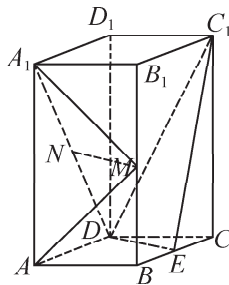
$|\vec{PO}| = \frac{|\vec{PA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ (点 P 到平面 α 的距离)

三、典型例题

例 1 (2019 · 全国 I 卷(理)) 如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1=4, AB=2, \angle BAD=60^\circ$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.

(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 C_1DE .

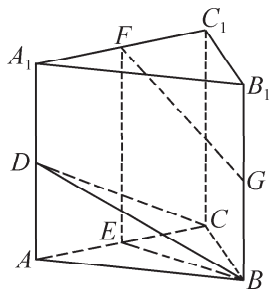
(2) 求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.





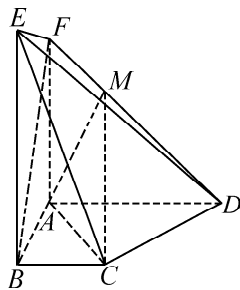
变式 1 (2018 · 北京卷) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \perp$ 平面 ABC , D, E, F, G 分别为 AA_1, AC, A_1C_1, BB_1 的中点, $AB=BC=\sqrt{5}, AC=AA_1=2$.

- (1) 求证: $AC \perp$ 平面 BEF ;
- (2) 求二面角 $B-CD-C_1$ 的余弦值;
- (3) 证明: 直线 FG 与平面 BCD 相交.



例 2 (2020 · 内蒙古自治区高三二模(理)) 已知六面体 $ABCDEF$ 如图所示, $BE \perp$ 平面 $ABCD$, $BE \parallel AF$, $AD \parallel BC$, $BC=1$, $CD=\sqrt{5}$, $AB=AF=AD=2$, M 是棱 FD 上的点, 且满足 $\frac{FM}{MD} = \frac{1}{2}$.

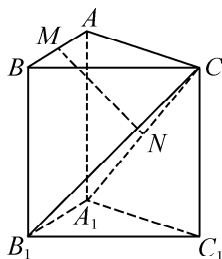
- (1) 求证: 直线 $BF \parallel$ 平面 MAC ;
- (2) 求二面角 $A-MC-D$ 的正弦值.





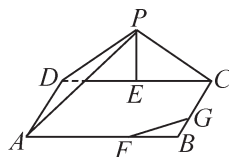
变式 2 (2020 · 宜宾市叙州区第一中学校高二月考(理)) 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱与底面垂直, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = BB_1 = 2$, M, N 分别是 AB, A_1C 的中点.

- (1) 求证: $MN \perp$ 平面 A_1B_1C ;
- (2) 求二面角 $M-B_1C-A_1$ 的余弦值.



例 3 如图所示, 三角形 PDC 所在平面与长方形 $ABCD$ 所在的平面垂直, $PD = PC = 4, AB = 6, BC = 3$. 点 E 是 CD 边的中点, 点 F, G 分别在线段 AB, BC 上, 且 $AF = 2FB, CG = 2GB$.

- (1) 证明: $PE \perp FG$;
- (2) 求二面角 $P-AD-C$ 的正切值;
- (3) 求直线 PA 与直线 FG 所成角的余弦值.

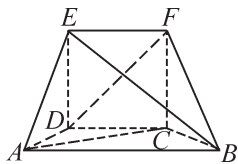




变式 3 如图,几何体 $EF-ABCD$ 中,
 $CDEF$ 为边长为 2 的正方形, $ABCD$ 为直角
 梯形, $AB \parallel CD$, $AD \perp DC$, $AD = 2$, $AB = 4$,
 $\angle ADF = 90^\circ$.

(1) 求证: $AC \perp FB$;

(2) 求二面角 $E-FB-C$ 的大小.

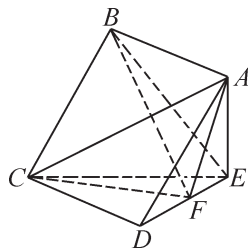


四、备选例题

例 1 如图,在四棱锥 $E-ABCD$ 中,底
 面 $ABCD$ 为正方形, $AE \perp$ 平面 CDE , 已知
 $AE = DE = 2$, F 为线段 DE 的中点.

(1) 求证: $CD \perp$ 平面 ADE ;

(2) 求二面角 $C-BF-E$ 的平面角的余
 弦值.

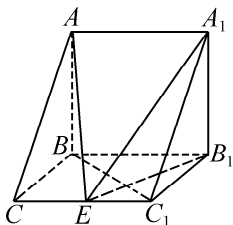




例2 (2020·嘉祥县第一中学高三一模)如图,三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp$ 侧面 BB_1C_1C , 已知 $\angle BCC_1 = \frac{\pi}{3}$, $BC = 1$, $AB = C_1C = 2$, 点 E 是棱 C_1C 的中点.

(1)求证: $C_1B \perp$ 平面 ABC ;

(2)在棱 CA 上是否存在一点 M , 使得 EM 与平面 A_1B_1E 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{11}}{11}$, 若存在, 求出 $\frac{CM}{CA}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



五、小结反思



❖ 复习小结 ❖

一、课标要求

1. 掌握空间向量的坐标表示,空间向量的线性运算和数量积,并能利用空间向量运算判断向量的共线与垂直;

2. 掌握向量方法证明有关线、面位置关系;

3. 用向量方法解决线线、线面、面面的夹角的计算问题.

二、知识要点

1. 平面的法向量求法

(1) 可利用方程组求出: 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是平面 α 内两不共线向量, $\mathbf{n}$ 为平面 α 的法向量, 则求法向量的方程组为

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0. \end{cases}$$

(2) 平面垂线的方向向量.

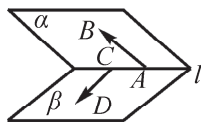
2. 空间向量与空间角的关系

(1) 设异面直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$, 则 l_1 与 l_2 所成的角 θ 满足 $\cos \theta =$ _____.

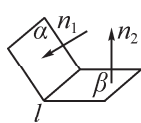
(2) 设直线 l 的方向向量和平面 α 的法向量分别为 $\mathbf{m}, \mathbf{n}$, 则直线 l 与平面 α 所成角 θ 满足 $\sin \theta =$ _____.

(3) 求二面角的大小

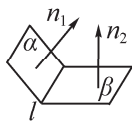
1. 如图①, AB, CD 是二面角 $\alpha - l - \beta$ 的两个面内与棱 l 垂直的直线, 则二面角的大小 $\theta = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle$.



①



②

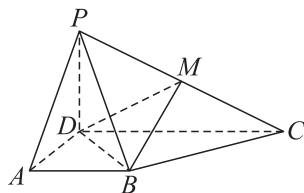


③

2. 如图②③, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 分别是二面角 $\alpha - l - \beta$ 的两个半平面 α, β 的法向量, 则二面角的大小 θ 满足 $\cos \theta =$ _____.

三、典型例题

例1 (多选) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp DC$, $AB \parallel DC$, 若 $PC = \sqrt{5}$, $AB = 1$, $AB = \frac{1}{2} DC$, $PD = AD = 1$, M 为棱 PC 的中点, 则下列说法正确的有 ()



A. $BM \parallel$ 平面 PAD

B. 二面角 $P-DM-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

C. 二面角 $P-DM-B$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

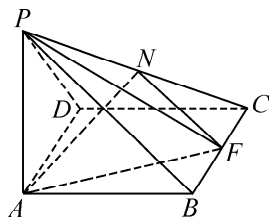
D. 若在线段 PA 上存在点 Q , 使得点 Q 到平面 BDM 的距离是 $\frac{2\sqrt{6}}{9}$, 则 $\frac{PQ}{PA}$ 的值为 $\frac{2}{3}$

变式1 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp AB$, $PA = 6$, $AB = 8$, $PD = 10$, N 为 PC 的中点, F 为棱 BC 上的一点.



(1) 证明: 面 $PAF \perp$ 面 $ABCD$;

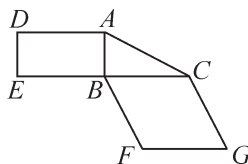
(2) 当 F 为 BC 中点时, 求二面角 $A-NF-C$ 余弦值.



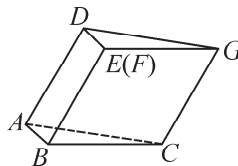
例2 图(1)是由矩形 $ADEB$, $Rt\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形, 其中 $AB=1$, $BE=BF=2$, $\angle FBC=60^\circ$. 将其沿 AB, BC 折起使得 BE 与 BF 重合, 连接 DG , 如图(2).

(1) 证明: 图(2)中的 A, C, G, D 四点共面, 且平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGE$;

(2) 求图(2)中的二面角 $B-CG-A$ 的大小.



图(1)



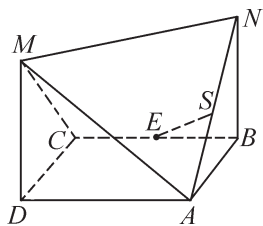
图(2)



变式 2 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $MD \perp$ 平面 $ABCD$, $NB \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $MD = NB = 1$, E 为 BC 的中点.

(1) 求异面直线 NE 与 AM 所成角的余弦值;

(2) 在线段 AN 上是否存在点 S , 使得 $ES \perp$ 平面 AMN ? 若存在, 求线段 AS 的长; 若不存在, 请说明理由.

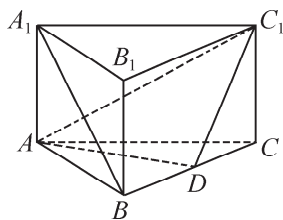


例 3 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = 2AA_1$, $\angle ABC = 90^\circ$, D 是 BC 的中点.

(1) 求证: $A_1B \parallel$ 平面 ADC_1 ;

(2) 求二面角 $C_1 - AD - C$ 的余弦值;

(3) 试问线段 A_1B_1 上是否存在点 E , 使 AE 与 DC_1 成 60° 角? 若存在, 确定 E 点位置; 若不存在, 说明理由.

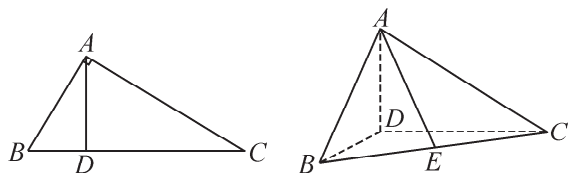




变式 3 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ$, AD 是 BC 上的高,沿 AD 把 ABC 折起,使 $\angle BDC = 90^\circ$.

(1)证明:平面 $ADB \perp$ 平面 BDC ;

(2)设 E 为 BC 的中点,求 AE 与 DB 夹角的余弦值.

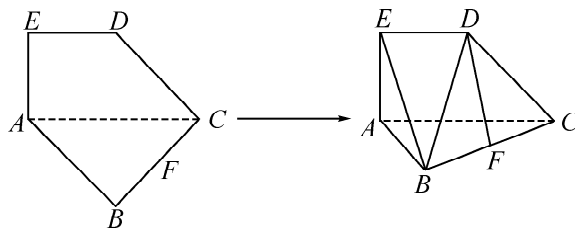


四、备选例题

例 1 如图,在平面五边形 $ABCDE$ 中, $AB = BC = CD = 2$, $AE = \sqrt{2}$, $AC = 2\sqrt{2}$, $\angle ACD = \frac{\pi}{4}$, $AE \perp AC$, F 为 BC 的中点.现在沿着 AC 将平面 ABC 与平面 $ACDE$ 折成一个直二面角,连接 BE, BD, DF .

(1)求证: $DF \parallel$ 平面 ABE ;

(2)求二面角 $E-BD-C$ 的余弦值.





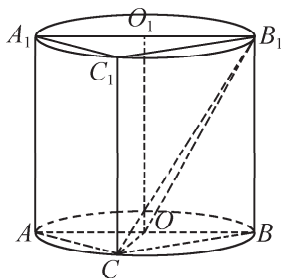
例2 如图,圆柱 OO_1 内有一个三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$,三棱柱的底面为圆柱底面的内接三角形,且 AB 是圆 O 直径.

(1)证明:平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 B_1BCC_1 ;

(2)设 $AB=AA_1$,在圆柱 OO_1 内随机选取一点,记该点取自于三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内的概率为 P .

①当该点在圆柱内运动时,求 P 的最大值;

②记平面 A_1ACC_1 与平面 B_1OC 所成的角为 θ ($0^\circ < \theta \leq 90^\circ$),当 P 取最大值时,求 $\cos \theta$ 的值.



五、小结反思
