

值域 12 类归纳



1. 一、热点题型归纳

题型一：值域基础 1：幂函数求值域

题目 1 若函数 $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) 的定义域和值域分别为集合 A, B ，且集合 $\{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ 表示的平面区域是边长为 1 的正方形，则 $b + c$ 的最大值为_____.

方法归纳 基本规律

1. 幂函数主要考察一元二次函数

2. 二次函数在进行讨论的时候要首先考虑二次项系数为 0 的情况，然后根据题意，去讨论开口或者讨论 Δ .

跟踪训练 1 设二次函数 $f(x) = mx^2 - 2x + n$ ($m, n \in \mathbb{R}$)，若函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$ ，且 $f(1) \leq 2$ ，则 $\frac{m^2}{n^2 + 1} + \frac{n^2}{m^2 + 1}$ 的取值范围为_____.

跟踪训练 2 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 在 $x \in (5 - m^2, m - 1)$ 的值域为 $[a, b]$ ($b > a$)，则实数 m 的取值范围为_____.

跟踪训练 3 已知函数 $y = x^2 + 2x$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[-1, 3]$ ，则 $a \cdot b$ 的最大值为_____.

题型二：值域基础 2：指数函数求值域

题目 1 函数 $f(x) = a + \frac{b}{e^x + 1}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 是奇函数，且图象经过点 $(\ln 3, \frac{1}{2})$ ，则函数 $f(x)$ 的值域为_____.

方法归纳 基本规律

1、底数讨论单增单减讨论。

2、“一点一线”伴随。

跟踪训练 1 函数 $f(x) = 3^{-x^2+1}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的值域为_____.

跟踪训练 2 关于函数 $f(x) = \frac{1}{4^x + 2}$ 的性质，有如下四个命题：

- ①函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ；
- ②函数 $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$ ；
- ③方程 $f(x) = x$ 有且只有一个实根；
- ④函数 $f(x)$ 的图象是中心对称图形。

其中正确命题的序号是_____.

跟踪训练 3 已知函数 $f(x) = 4^x - 2^{x+1} + 4$ ， $x \in [-1, 1]$ ，则函数 $y = f(x)$ 的值域为()。

A. $[3, +\infty)$

B. $[3, 4]$

C. $[3, \frac{13}{4}]$

D. $[\frac{13}{4}, 4]$

题型三：值域基础 3：对数函数求值域

题目 1 设函数 $f(x) = |\log_a x|$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的定义域为 $[m, n]$ ($m < n$), 值域为 $[0, 1]$, 若 $n - m$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$, 则实数 a 的值是_____.

方法归纳 基本规律

1. 对数函数中 $y = |\log_a x|$ 要注意 $f(b) = f(c)$ 时, $bc = 1$ 这个特征,。
2. 对数函数源于指数函数, 所以和指数函数互为反函数。

跟踪训练 1 若函数 $f(x) = \log_2[kx^2 + (2k-1)x + \frac{1}{4}]$ 的值域为 R , 则实数 k 的取值范围为_____.

跟踪训练 2 已知函数 $f(x) = \log_3 \frac{2x^2 + bx + c}{x^2 + 1}$ 的值域为 $[0, 1]$, 则 b 与 c 的和为_____.

跟踪训练 3 已知函数 $f(x) = \lg(ax^2 + x + 1)$. 设命题 $p: f(x)$ 的定义域为 R , 命题 $q: f(x)$ 的值域为 R . 若 $p \vee q$ 为真, $p \wedge q$ 为假, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $(\frac{1}{4}, +\infty)$ B. $[0, \frac{1}{4}]$ C. $[0, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

题型四: 值域基础 4: 分式 (类反比例) 型函数求值域

题目 1 已知 a, b, c 为非零实数, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $x \in R$, 且 $f(2) = 2, f(3) = 3$. 若当 $x \neq -\frac{d}{c}$ 时, 对于任意实数 x , 均有 $f(f(x)) = x$, 则 $f(x)$ 值域中取不到的唯一的实数是_____.

方法归纳 基本规律

1. 分离常数, 通过“左加右减上加下减”可求得分式函数的对称中心。
2. 特殊的, 形如形如 $y = \frac{a^x + m}{a^x + 1}$ 对称中心为 $(0, \frac{1+m}{2})$
3. 注意“水平渐近线和竖直渐近线”

跟踪训练 1 设 $x \in R$, 函数 $INT(x)$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $INT(-0.1) = -1, INT(2.8) = 2$, 若函数 $f(x) = \frac{2-x^2}{x^2+1}$, 则函数 $y = INT(f(x))$ 的值域是()

- A. $\{2\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{0, 1\}$

跟踪训练 2 定义区间 $[x_1, x_2]$ 长度 $x_2 - x_1$ ($x_2 > x_1$) 为, 已知函数 $f(x) = \frac{(a^2+a)x-1}{a^2x}$ ($a \in R, a \neq 0$) 的定义域与值域都是 $[m, n]$, 则区间 $[m, n]$ 取最大长度时 a 的值为_____.

跟踪训练 3 关于函数 $f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$ ($x \in R$) 的如下结论:

- ① $f(x)$ 是奇函数; ② 函数 $f(x)$ 的值域为 $(-2, 2)$;
③ 若 $x_1 \neq x_2$, 则一定有 $f(x_1) \neq f(x_2)$; ④ 函数 $g(x) = f(x) - 3x$ 在 R 上有三个零点.
其中正确结论的序号有_____. (请将你认为正确的结论的序号都填上)

题型五: 值域基础 5: “对钩”与“双曲”函数求值域

题目 1 已知定义在 $(0, 3]$ 上的函数 $f(x) = x + \frac{1-a+b}{x+1} + a - 1$ 的值域为 $[4, 5]$, 若 $b - a \in (-1, 5)$, 则 $a + b$ 的值为_____.

★方法归纳★ 基本规律

1. 对勾函数图像的特征: (1) 渐近线; (2) 拐点。
2. 双刀函数, 可用 $\nearrow - \searrow \Rightarrow \nearrow$ 或者 $\searrow - \nearrow \Rightarrow \searrow$ 简单判断, 要注意“渐近线”。

跟踪训练 1 已知函数 $f(x) = x + \frac{k}{x}$ 具有以下性质: 如果常数 $k > 0$, 那么函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{k})$ 上单调递减, 在区间 $[\sqrt{k}, +\infty)$ 上单调递增, 若函数 $y = x + \frac{a-1}{x} (x \geq 1)$ 的值域为 $[a, +\infty)$, 则实数 a 的取值范围是 _____。

跟踪训练 2 已知函数 $f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^6 - 16x^3 - 1}, x \in [0, 1]$, 则该函数的值域为 _____。

跟踪训练 3 函数 $f(x) = \frac{4^x + 2^{x+1} + 5}{2^x + 1}$ 的值域为 ()

A. $[5, +\infty)$ B. $[4, +\infty)$ C. $(5, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$

题型六: 值域基础 6: 分段函数与值域

题目 1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{ax^2-x+1}, & x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + \frac{1}{2}), & x \leq 0 \end{cases}$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 _____。

★方法归纳★ 基本规律

分段函数, 要注意两段交接处, 函数的变化

跟踪训练 1 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x}, & x \geq 1 \\ ax, & x < 1 \end{cases}$ 是单调函数. 若 $f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$, 且方程 $f(x) = \ln(x+m)$ 没有实根, 则 m 的取值范围是 _____。

跟踪训练 2 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^3 - x + 2 + m, & x < 1 \\ x + 1 - \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 的值域为 $[2, +\infty)$, 给出下列命题: ① $f(3) > f(2)$; ② $m \geq 2$; ③ $f(\frac{\ln 2}{2}) < f(\frac{1}{e})$; ④ $\log_m(m+1) > \log_{m+1}(m+2)$. 其中所有正确命题的编号是 _____。

跟踪训练 3 . 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(1-x), & -1 \leq x \leq n \\ 2^{2-|x-2|} - 2, & n < x \leq m \end{cases} (n < m)$ 的值域是 $[-1, 2]$, 当 $n \in [0, \frac{1}{2})$ 时, 实数 m 的取值范围是 _____。

题型七: 值域基础 7: 绝对值函数求值域

题目 1 设函数 $f(x) = |x^2 - 1|$ 的定义域和值域都是 $[a, b]$, 则 $a + b =$ _____。

★方法归纳★ 基本规律

绝对值函数, 主要是分类讨论。

1. 一元一次函数加绝对值, 是折线
2. 一元二次函数加绝对值, 要注意与轴的交点
3. 指数函数上下平移后加绝对值, 要注意“一点一线”的位置

跟踪训练 1 设 $m, n \in \mathbb{Z}$, 已知函数 $f(x) = \log_2(-|x| + 4)$ 的定义域是 $[m, n]$, 值域是 $[0, 2]$, 若关于 x 的方程 $2^{|1-x|} + m + 1 = 0$ 有唯一的实数解, 则 $m + n =$ _____.

跟踪训练 2 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(-x+1), & -1 \leq x \leq t \\ -2|x-1|+1, & t < x \leq a \end{cases}$, 若存在实数 t , 使 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

跟踪训练 3 . 若函数 $f(x) = |x^2 - ax|$, $x \in [1, 3]$ 的值域为 $[0, f(3)]$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

题型八: 值域基础 8: “无理函数”求值域

题目 1 函数 $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2-x}$ 的值域为 _____.

方法归纳 基本规律

1. 对于根式函数求值域时, 若 $f(x) = \sqrt{ax+b}$ 可用换元法(代数换元或者三角换元)进行求解;
2. 若 $f(x) = \sqrt{(x-a)^2+b^2} \pm \sqrt{(x-c)^2+d^2}$ 可用几何意义法求解.

跟踪训练 1 函数 $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2} + x$ 的值域为 _____.

跟踪训练 2 函数 $y = \frac{\sqrt{-x^2+4x-3}+3}{x+1}$ 的值域为 _____.

跟踪训练 3 对于函数 $f(x) = \sqrt{ax^2+bx}$, 其中 $b > 0$, 若 $f(x)$ 的定义域与值域相同, 则非零实数 a 的值为 _____.

题型九: “高斯函数”与值域

题目 1 定义函数 $f(x) = [x[x]]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $[1.3] = 1$, $[-1.5] = -2$, $[2] = 2$, 当 $x \in [0, n)$ 时, $f(x)$ 的值域为 A_n , 记集合 A_n 中元素的个数为 a_n , 则 $\frac{1}{a_2-1} + \frac{1}{a_3-1} + \frac{1}{a_4-1} + \cdots + \frac{1}{a_{2021}-1}$ 的值为 _____.

方法归纳 基本规律

取整函数(高斯函数)

1. 具有“周期性”
 2. 一端是“空心头”, 一端是“实心头”
 3. 还可以引入“四舍五入”函数作对比
- 因为它具有“类周期性”, 所以考查函数值域多与数列关联.

【变式演练】

跟踪训练 1 定义函数 $f(x) = \{x\{x\}\}$, 其中 $\{x\}$ 表示不小于 x 的最小整数, 如 $\{1.4\} = 2$, $\{-2.3\} = -2$, 当 $x \in (0, n]$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 时, 函数 $f(x)$ 的值域为 A_n , 记集合 A_n 中元素的个数为 a_n , 则 $a_n =$ _____.

跟踪训练 2 定义函数 $f(x) = [x[x]]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如: $[1.3] = 1$, $[-1.5] = -2$, $[2] = 2$. 当 $x \in [0, n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 时, $f(x)$ 的值域为 A_n . 记集合 A_n 中元素的个数为 a_n , 则 $\sum_{i=2}^{2020} \frac{1}{a_i-1}$ 的值为 _____.

跟踪训练 3 函数 $f(x) = [3x] - 3[x]$ 的值域是 _____. (注: 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)

题型十: “保值函数”与值域

题目 1 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若函数 $f(x)$ 满足条件: 存在 $[a, b] \subseteq D$, 使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域是 $[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$, 则 $f(x)$ 称为“倍缩函数”, 若函数 $f(x) = \log_2(2^x + t)$ 为“倍缩函数”, 则实数 t 的取值范围是 _____.

方法归纳 基本规律

“保值函数”, 如【典例分析】可以建立 $\begin{cases} f(a) = k(a+1) \\ f(b) = k(b+1) \end{cases}$ 得到方程 $f(x) = k(x+1)$, 从而将问题转化为图像有两个交点的问题.

跟踪训练 1 设函数 $f(x) = x \ln x + 2$, 若存在区间 $[a, b] \subseteq [\frac{1}{e}, e]$, 使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ ($a \neq b$) 上的值域为 $[k(a+1), k(b+1)]$, 则实数 k 的取值范围是 _____.

跟踪训练 2 设函数 $f(x) = m + \sqrt{x+3}$, 若存在实数 a, b ($a < b$), 使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域为 $[a, b]$, 则实数 m 的取值范围是 _____.

跟踪训练 3 函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若满足: (1) $f(x)$ 在 D 内是单调函数; (2) 存在 $[\frac{m}{2}, \frac{n}{2}] \subseteq D$, 使得 $f(x)$ 在 $[\frac{m}{2}, \frac{n}{2}]$ 上的值域为 $[m, n]$, 那么就称函数 $f(x)$ 为“梦想函数”. 若函数 $f(x) = \log_a(a^x + t)$ ($a > 0, a \neq 1$) 是“梦想函数”, 则 t 的取值范围是 _____.

题型十一: “放大镜”函数与值域

题目 1 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对 $\forall x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(2x) = 2f(x)$, 当 $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = 2 - x$, 给出如下结论, 其中所有正确结论的序号是: _____.

- ① 对 $\forall m \in \mathbb{Z}$, 有 $f(2^m) = 0$;
- ② 函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$;
- ③ 存在 $n \in \mathbb{Z}$, 使得 $f(2^n + 1) = 9$;

方法归纳 基本规律

“似周期函数”或者“类周期函数”, 俗称放大镜函数, 要注意以下几点辨析:

1. 是从左往右放大, 还是从右往左放大.
2. 放大(缩小)时, 要注意是否函数值有 0.
3. 放大(缩小)时, 是否发生了上下平移.

跟踪训练 1 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$, 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = x^2 + x$, 且对任意 x , 满足 $f(x+3) = 2f(x)$, 则 $f(x)$ 在区间 $[5, 7]$ 上的值域是 _____.

跟踪训练 2 已知函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) = -\frac{1}{2}f(x+2)$, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = -x^2 + 2x$, 则函数 $f(x)$ 在 $[-2, 6]$ 上的值域为 ()

- A. $[0, 1]$ B. $[-\frac{1}{2}, 0]$ C. $[-2, 0]$ D. $[-2, 4]$

跟踪训练 3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - |2x - 3|, & x \in [1, 2] \\ -f(\frac{1}{2}x), & x \in (2, 8] \end{cases}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $f(2) = f(7)$ B. 函数 $f(x)$ 有 5 个零点
C. 函数 $f(x)$ 在 $[3, 6]$ 上单调递增 D. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-2, 4]$

题型十二: 抽象函数、复合函数与值域

题目 1 已知定义在 R 上的单调函数 $f(x)$, 其值域也是 R , 并且对任意 $x, y \in R$, 都有 $f(xf(y)) = xy$, 则 $|f(2021)|$ 等于 _____.

跟踪训练 1 已知函数 $f(x) = a \ln x - x + 2$ (a 为大于 1 的整数), 若 $y = f(x)$ 与 $y = f(f(x))$ 的值域相同, 则 a 的最小值是 _____. (参考数据: $\ln 2 \approx 0.6931$, $\ln 3 \approx 1.0986$, $\ln 5 \approx 1.6094$)

跟踪训练 2 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = a^x + x^2 - x \ln a + a - 3, x \in R$. 记函数 $f(x)$ 的值域为 M , 函数 $f(f(x))$ 的值域为 N , 若 $M \subseteq N$, 则 a 的最大值是 _____.

跟踪训练 3 已知 $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & (x \leq 1) \\ 2x - 1, & (x > 1) \end{cases}$, 则函数 $F(x) = f(f(x)) - 2f(x)$ 的值域为 _____.



2. 当堂检测

例 1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ (\frac{1}{2})^x, & x > a \end{cases}$ 若 $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

例 2 规定, 若函数 $f(x)$ 在定义域 $[m, n]$ ($1 < m < n$) 上的值域是 $[m^3, n^3]$, 则称该函数为“绅士风度”函数. 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 为“绅士风度”函数, 则 a 的取值范围是 _____.

例 3 设函数 $h(x)$ 的定义域为 D , 若满足条件: 存在 $[a, b] \subseteq D$, 使 $h(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域为 $[2a, 2b]$, 则称 $h(x)$ 为“倍胀函数”. 若函数 $f(x) = \ln x + t$ 为“倍胀函数”, 则实数 t 的取值范围是 _____.

例 4 已知函数 $f(x) = 3 \ln x - \frac{1}{2}ax^2 + (a-3)x + 2a - 1$ ($a > 0$), $f(x) > 0$ 的解集为 (m, n) , 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的值域与函数 $f(f(x))$ 在 (m, n) 上的值域相同, 则实数 a 的取值范围为 _____.

例 5 二次函数 $f(x)$ 满足: $f(2-x) = f(2+x)$, 又 $f(2) = 1, f(1) = 2$, 若 $y = f(x)$ 在 $[-1, t]$ 上的值域为 $[1, 10]$, 则实数 t 的取值范围是 _____.

例 6 已知 $a > 2b$ ($a, b \in R$), 函数 $f(x) = ax^2 + x + 2b$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 $\frac{a^2 + 4b^2}{a - 2b}$ 的最小值为 _____.

例 7 函数 $f(x) = (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)(\sqrt{1-x^2} + 1)$ 的值域为 _____.

例 8 若二次函数 $f(x) = ax^2 - 4x + 2c$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 $\frac{a}{4c^2 + 4} + \frac{2c}{a^2 + 4}$ 的最小值为 _____.

例 9 已知函数 $f(x) = x|x^2 - 3a|$ 在 $x \in [0, 2]$ 的值域为 $[0, 4m]$, 则实数 m 的最小值为 _____.

例 10 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $[-2.5] = -3$, $[2.5] = 2$, 设函数 $f(x) = [x[x]]$, 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, n)$, $n \in \mathbb{N}_+$, 则其值域中元素个数为 _____.

例 11 已知函数 $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^{x+1} + a}$ ($a \in \mathbb{R}$) 为奇函数, 且 $y = f(x)$ 的图象和函数 $g(x) = m + 2^x$ 的图象交于不同的两点 A, B , 若线段 AB 的中点 M 在直线 $y = \frac{1}{4}$ 上, 则 $g(x)$ 的值域为 ()

A. $(-2, +\infty)$ B. $(-1, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

例 12 下列函数中, 值域为 $(0, +\infty)$ 的是 ()

- A. $y = 3^{\frac{1}{x}}$ B. $y = 3^{1-x}$ C. $y = \sqrt{3^x - 1}$ D. $y = \sqrt{1 - 3^x}$

例 13 函数 $f(x) = \frac{2^{x+1}}{2^x + 1}$ 的值域为 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(0, 1]$ C. $(0, 2)$ D. $(1, 2)$

例 14 下列函数中与函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$ 的值域相同的是 ()

- A. $y = x^2 - 1$ B. $y = 2^x + 1$ C. $y = \tan 2x$ D. $y = \frac{1}{x-1}$

例 15 若函数 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x+1}$ ($x \geq 0$) 的值域为 $[a, +\infty)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[0, 1]$ C. $(-\infty, 1]$ D. $[1, 2]$

例 16 方程 $\frac{x|x|}{16} + \frac{y|y|}{9} = -1$ 的曲线即为函数 $y = f(x)$ 的图像, 对于函数 $y = f(x)$, 有如下结论: ① $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减; ② 函数 $F(x) = 4f(x) + 3x$ 不存在零点; ③ 函数 $y = f(x)$ 的值域是 $\mathbb{R}$; ④ 若函数 $g(x)$ 和 $f(x)$ 的图像关于原点对称, 则 $y = g(x)$ 由方程 $\frac{x|x|}{16} + \frac{y|y|}{9} = -1$ 确定. 其中所有正确的命题序号是 _____.