

数列求和专题 1 分组求和

题目 1 已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + a_n = 3 \cdot 2^n$, $a_1 = 1$.

- (1) 若 $b_n = a_n - 2^n$, 求证: $\{b_n\}$ 是等比数列;
- (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

题目 2 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 0$, $b_1 = 3$, 且 $a_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{6}b_{n-1}$, $b_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{5}{6}b_{n-1}$.

- (1) 若 $\{\lambda a_n + b_n\}$ 为等比数列, 求 λ 值;
- (2) 在 (1) 的条件下, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

题目 3 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_{n+1} = 4a_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $a_1 = 4$.

- (1) 证明: $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 在① $bn = a_{n+1} - a_n$; ② $bn = \log_2 \frac{a_n}{n}$; ③ $bn = \frac{a_n + 2}{a_{n+1}a_n}$, 这三个条件中任选一个补充在下面横线上, 并加以解答. 已知数列 $\{bn\}$ 满足 _____, 求 $\{bn\}$ 的前 n 项和 T_n .

题目 4 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 前 n 项和 S_n 满足 $a_n = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$)

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $2a_n - 1 = \frac{b_1}{2+1} + \frac{b_2}{2^2+1} + \cdots + \frac{b_n}{2^n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

题目 5 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 $a_3 + 2a_4 = \frac{2}{3}$, $S_{10} = \frac{25}{3}$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若 $b_n = (a_n + 1)^2 \cos \frac{2n\pi}{3}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 18 项和 T_{18} .

题目 6 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 A_n, B_n , 若 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1, B_n = n^2 + 3n$

- (1) 求 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 定义 $a * b = \begin{cases} a, & a > b \\ b, & a \leq b \end{cases}$, 记 $c_n = a_n * b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

题目 7 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1 = 1, a_n + a_{n+1} = 2n + 1$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 记 $b_n = \begin{cases} 2^{a_n}, & n \text{ 为奇数} \\ a_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_n .

题目 8 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1} + a_n = 2n + 7$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $a_1 = 4$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 已知数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ \log_{(n+2)} a_n, & n \geq 2, n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$, 定义使 $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 为整数的 k 叫做“幸福数”, 求区间 $[1, 2022]$ 内所有“幸福数”的和.

题目 9 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , $a_1 = 1, a_n > 0, a_n a_{n+1} = 4S_n - 1$.

- (1) 计算 a_2 的值, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 $b_n = (-1)^n a_n a_{n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

题目 10 已知公差为正数的等差数列 $\{a_n\}$, a_2 与 a_8 的等差中项为 8, 且 $a_3 a_7 = 28$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 从 $\{a_n\}$ 中依次取出第 1 项、第 3 项、第 9 项、...、第 3^{n-1} 项, 按照原来的顺序组成一个新数列 $\{b_n\}$, 求数

列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

题目 11 已知递增数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = a_n^2 + n$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_1, b_4 = 4a_2, b_nb_{n+2} = b_{n+1}^2, n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n = \begin{cases} \frac{(6n-7)b_n}{8S_n-3}, & n \text{ 为奇数} \\ \log_2 b_{n+1}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 T_{2n} , 若不等式 $(-1)^n \lambda + \frac{4^n}{4n+1} < T_{2n}$ 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 求 λ 的取值范围.

题目 12 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列, 且 $a_1 + a_2 = b_3, b_2 + 3 = a_3$. 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} a_n, & n \neq 2^k \\ b_n, & n = 2^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbb{N}^*$, 其前 n 项和为 S_n .

(1) 求 S_{2^n} 的值.

(2) 若 $d_n = \frac{1}{S_{2^n} - 3}$, 求证: $d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n < \frac{11}{18}$.

题目 13 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 5, a_{n+1} = 3a_n - 4n + 2$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 设 $b_n = a_n - 2n$, 证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 试比较 S_n 与 $n^2 + 2022$ 的大小.

题目 14 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_n = 2a_n - 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{a_n}{2}}, & n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \\ \frac{2}{\sqrt{\log_2 a_n} + \sqrt{\log_2 a_{n+2}}}, & n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 15 项的和.

题目 15 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = na_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $(n-1)S_n + 2n$.

(1) 求 a_1, a_2 , 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 抽去数列 $\{a_n\}$ 中点第 1 项, 第 4 项, 第 7 项, $\cdots$, 第 $3n-2$ 项, 余下的项顺序不变, 组成一个新数列 $\{c_n\}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $\frac{12}{5} < \frac{T_{n+1}}{T_n} \leq \frac{11}{3}$.

题目 16 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差为 1, 且满足 $S_8 = 36$. 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列, 公比不为 1, 且 $b_3, \frac{3}{2}b_2, 2b_1$ 成等差数列, 其前 n 项和为 T_n .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $2S_n + (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = 2a_n + 4b_n$, 求正整数 n 的值;

(3) 记 $c_n = (-1)^{a_n} \left[\frac{a_n}{b_n} + \frac{3n+5}{(a_n+1)(a_n+2)b_n} \right] (n \in \mathbb{N}^*)$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 R_n .

题目 17 设有数列 $\{a_n\}$, 若存在唯一的正整数 $k (k \geq 2)$, 使得 $a_k < a_{k-1}$, 则称 $\{a_n\}$ 为“ k 坠点数列”. 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 判断: $a_n = (-2)^n, b_n = \begin{cases} 2n+1, & n \leq 2 \\ 2^{n-1}, & n > 2 \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$ 是否为“ k 坠点数列”, 并说明理由;

(2) 已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, |a_{n+1} - a_n| = a + 1$, 且是“5 坠点数列”, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} = 3$, 求 a 的值;

(3) 设数列 $\{a_n\}$ 共有 2022 项且 $a_1 > 0$. 已知 $a_1 - a_{p-1} + a_{q-1} = s, a_2 + a_3 + \cdots + a_{2022} = t$. 若 $\{a_n\}$ 为“ p 坠点数列”且 $\{S_n\}$ 为“ q 坠点数列”, 试用 s, t 表示 S_{2022} .

题目 18 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足: 存在 $k \in \mathbf{N}^*$, 对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $b_{n+k} = a_n + a_{n+k}$, 则称数列 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 成“ k 级关联”. 记 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 的前 n 项和分别为 T_n, S_n .

(1) 已知 $a_n = 2n, b_n = 2^n, n \in \mathbf{N}^*$, 判断 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 是否成“4 级关联”, 并说明理由;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 成“2 级关联”, 其中 $a_n = \cos \frac{n\pi}{2} + 1, n \in \mathbf{N}^*$, 且有 $b_1 = 1, b_2 = 2$, 求 $|T_{2022} - S_{2022}|$ 的值;

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 成“ k 级关联”且有 $b_n = 2022$, 求证: $\{S_n\}$ 为递增数列当且仅当 $a_1, a_2, \dots, a_{2k} > 0$.

题目 19 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数,} \\ 2a_n, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$

(1) 令 $b_n = a_{2n}$, 求 b_1, b_2 及 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} .

题目 20 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, $a_1 = b_1 = 1, a_5 = 5(a_4 - a_3), b_5 = 4(b_4 - b_3)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $S_n S_{n+2} < S_{n+1}^2 (n \in \mathbf{N}^*)$;

(3) 对任意的正整数 n , 设 $c_n = \begin{cases} \frac{(3a_n - 2)b_n}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$ 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.