

5. 6 平面向量的数量积及运算律

新疆石河子第一中学 曹丽梅

一、教学目标

- 1.正确理解平面向量的数量积的概念，能够运用这一概念求两个向量的数量积，并能根据条件逆用等式求向量的夹角；
- 2.掌握平面向量的数量积的 5 条重要性质及运算律，并能运用这些性质解决有关问题；
- 3.通过平面向量的数量积的概念，几何意义，重要性质及运算律的应用，培养学生的应用意识.

二、教学重点，教学难点

教学重点 平面向量的数量积的概念、重要性质及运算律

教学难点 平面向量的数量积的重要性质及运算律的理解和应用.

三、教 具 三角尺，实物投影仪，多媒体

四、教学方法

启发引导式

本节学习的关键是启发学生理解平面向量数量积的定义，理解定义之后便可引导学生推导数量积的性质及运算律，然后通过习题加深学生对于平面向量数量积的认识.

五、教学过程

(一) 设置情境

复习：前面我们已经学过：向量的加法，减法，实数与向量的积。它们有一个共同的特点，即运算的结果还是向量，但这些运算与实数的运算已有了很大的区别。引入：在物理课中，我们学过功的概念，即如果一个物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生位移 $\boldsymbol{S}$ ，那么力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 $\boldsymbol{W}$ 可由下式计算：

$$\boldsymbol{W} = |\boldsymbol{F}| |\boldsymbol{S}| \cos \theta \quad (\text{其中 } \theta \text{ 是 } \boldsymbol{F} \text{ 与 } \boldsymbol{S} \text{ 的夹角.})$$

问：力 $\boldsymbol{F}$ 和位移 $\boldsymbol{S}$ 分别是什么量？功 $\boldsymbol{W}$ 呢？

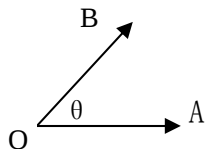
从力所做的功出发，我们引入向量数量积的概念.

(二) 讲授新课

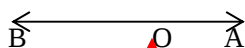
师：我们首先来学习平面内两个向量的夹角.

1. 平面向量的夹角：

已知非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ ，作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，则 $\angle AOB = \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 叫向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.



特殊: (1)当 $\theta=0$ 时, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向; 

(2)当 $\theta=\pi$ 时, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向; 

(3)当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直, 记 $\vec{a} \perp \vec{b}$; 

(4)注意在两向量的夹角定义中, 两向量必须是同起点的.

(教师用教具演示)

2、平面向量数量积定义:

师: 已知两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$, 它们的夹角为 θ , 我们把数量 $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积 (或内积), 记作: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, 即: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$

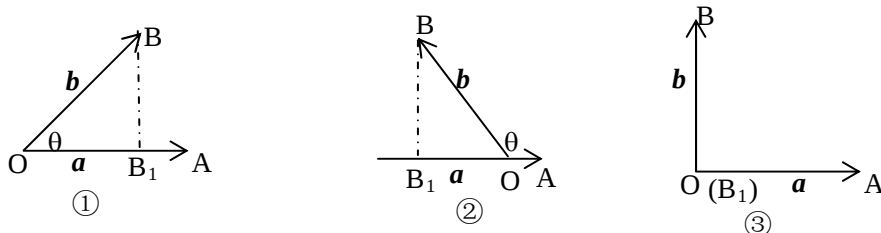
规定: 零向量与任意向量的数量积为 0, 即: $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$

注意:

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 表示数量而不表示向量, 符号由 $\cos \theta$ 决定;
- (2) 符号 “ $\cdot$ ” 在数量积运算中既不能省略也不能用 “ $\times$ ” 代替
- (3) 在运用数量积公式解题时, 一定要注意向量夹角的取值范围是: $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

3、平面向量数量积的几何意义:

师: 你能从图中作出 $|\vec{b}| \cos \theta$ 的几何图形吗? $|\vec{a}| \cos \theta$ 表示的几何意义是什么?



生: 如图①, 过 $\vec{b}$ 的终点B作 $\vec{OA}=\vec{a}$ 的垂线段 BB_1 , 垂足为 B_1 , 则由直角三角形的性质得: $|OB_1|=|\vec{b}| \cos \theta$; 同理: θ 为钝角或直角也可作 (如图②, ③)。

所以 $|\vec{b}| \cos \theta$ 叫做向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影; $|\vec{a}| \cos \theta$ 叫做向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影.

师: 因此我们得到 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的几何意义: 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 等于 $\vec{a}$ 的长度 $|\vec{a}|$ 与 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 的方向上的投影 $|\vec{b}| \cos \theta$ 的积.

注意: 1° 投影也是一个数量, 可正, 可负, 可为 0; 2° 当 θ 为锐角时投影为正值;

3° 当 θ 为钝角时投影为负值;

4° 当 θ 为直角时投影为 0;

4、平面向量数量积的重要性质:

设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 都是非零向量, $\vec{e}$ 是与 $\vec{b}$ 方向相同的单位向量, 向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 和夹角

为 θ ，则：（利用填空形式引导学生总结，并利用定义每写一条证一条）

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta$$

$$(2) \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (\text{判定两向量垂直的充要条件})$$

$$(3) \text{当 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 方向相同时, } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\text{当 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 方向相反时, } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\text{特别的: } \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \text{ 或 } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \quad (\text{用于计算向量的模})$$

$$(4) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad (\text{用于计算向量的夹角, 以及判断三角形的形状})$$

$$(5) |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

5. 平面向量数量积的运算律:

$$(1) \text{交换律: } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(2) \text{数乘向量的结合律: } (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$$

$$(3) \text{分配律: } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

（引导学生利用数量积的定义证明）

不满足结合律: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ （作为思考题留给学生课余去证明）

（三）例题讲解

例1、求证：

$$(1) (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

例2、已知: $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = 12$

求: (1) 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角

$$(2) |\vec{a} - 2\vec{b}|$$

(3) 向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影

$$(4) k \text{ 为何值时, } (k\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + 2\vec{b})$$

（四）巩固练习

1、判断正误，说明理由。

①若 $\vec{a} = \vec{0}$ ，则对任一向量 $\vec{b}$ ，有 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ；

②若 $\vec{a} \neq \vec{0}$ 则对任一向量 $\vec{b} \neq \vec{0}$ ，有 $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ ；

③若 $\vec{a} \neq \vec{0}$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，则 $\vec{b} = \vec{0}$ ；

④若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，则 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 中至少有一个为 $\vec{0}$ ；

⑤对任一向量 $\vec{a}$ ，有 $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ ；

$$\textcircled{6} \vec{0} \cdot \vec{a} = 0\vec{a}$$

2、已知 $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, 当① $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ② $\vec{a} \perp \vec{b}$ ③ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 150° 时, 分别求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积。

(五) 归纳小结:

1、平面向量的夹角:

(1) 两向量要共起点; (2) 范围: $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

2、平面向量的数量积定义和几何意义;

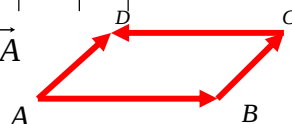
3、熟练掌握两个向量数量积的 5 个重要性质 ;

4、平面向量的数量积的运算律。

课外作业: P130 3、4、5

1、如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $|\vec{AB}|=4$, $|\vec{AD}|=3$, $\angle DAB=60^\circ$,

求: (1) $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$; (2) $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$; (3) $\vec{AB} \cdot \vec{DA}$



2、已知 $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=10$, $|\vec{a} + \vec{b}|=16$,

求: $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角 θ 的余弦值。

思考题: 四边形 $ABCD$ 中, $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{c}$, $\vec{DA} = \vec{d}$ 且

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{a}$ 。试问四边形 $ABCD$ 的形状。

板书设计

平面向量的数量积与运算律

基本概念:

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----|
| 1. 平面向量夹角的定义 | 4. 平面向量数量积的重要性质 | 例 1 |
| 2. 平面向量数量积的定义 | | |
| | 5. 平面向量数量积的运算律: | 例 2 |
| 3. 平面向量数量积的几何意义 | | |

《平面向量的数量积及运算律》的教案说明

新疆石河子第一中学

曹丽梅

一、教学内容的本质：

本教案是人教版高中数学第一册（下）第五章平面向量的第六节内容，整个课题按照课程标准分两个课时，这是第一课时的教案。

平面向量数量积第一课时的教学，通常要求形成数量积的概念，得出数量积运算的公式，并把培养学生的探究精神和应用意识的目标，有机地融入知识学习和技能形成的过程之中。平面向量数量积是平面向量的重点内容之一，也是难点之一，这一节主要介绍两个向量的数量积是两个向量之间的一种乘法，是中学代数中从未遇到过的一种新的乘法，与数的乘法有区别，同时这一节与下一节平面向量的数量积的坐标表示有着紧密联系。由于向量既能体现“形”的直观位置特征，又具有“数”的良好运算性质，是数形结合和转换的桥梁。而这一切之所以能够实现，平面向量的数量积功不可没。通过对这一节的学习，既可以让学生掌握平面向量的数量积，几何意义，重要性质及运算律，又可使学生了解用平面向量的数量积可以处理有关长度，角度，和垂直问题，而且为平面向量的数量积的坐标表示的学习做了充分准备，对后面正，余弦定理的证明起到至关重要的作用，因此本节课的教学内容起着承前启后的作用。

根据“平面向量的数量积及运算律”在高中数学中的地位与作用，并且考虑到学生已有的认知结构心理特征，我认为本节课的教学目标应以人为本注重对学生自主能力的培养，启发引导学生发现问题，观察问题，进而得以解决问题，在这一过程中希望能充分调动学生的积极性，不断激发学生学数学的兴趣。

二、教学内容的应用及渗透

平面向量作为一种工具，重在应用，而且今后用向量方法特别便于研究空间里涉及直线和平面的各种问题；而平面向量的数量积作为一种特殊的运算也有它不可替代的作用，如：求向量的模长，夹角，推导正、余弦定理等。

由于向量来源于物理，并且兼具“数”和“形”的特点，所以它在物理和几何中具有广泛的应用，众所周知，物理与数学是密不可分的，而向量在物理中的应用比比皆是，举不胜举，反过来物理又可为某些数学知识作有效的解释。比如：本课时的引入就是以物体在力的作用下所做的功为模型，事实上这也就是平面向量数量积的物理意义，这样可以更贴近生活，使学生更容易理解平面向量数量积的概念，符合学生的认知习惯。同时解析几何也往往将向量作为有力的解题工具。

三、教学分析

《数学课程标准》中强调：“数学课程要实现：人人学有价值的数学；人人都获得必需的数学；不同的人数学上得到不同的发展。”同时，她倡导的“关注过程”“强调本质”“体现数学的文化价值”“发展数学的应用意识”等都向我们昭示出高中数学课程的价值取向。

为使《数学课程标准》得以顺利实施，教师理应不断更新教学观念，努力成为数学学习活动的组织者、引导者、合作者。通过精心设计、实践与反思，不断改进教学方法和教学手段……以优化课堂教学，提高课堂教学的效率。课程设计必须从学生的角度出发，要与学生的经历和经验相联系，关注学生的体验、感悟和实践过程。

基于以上认识，对于“平面向量数量积及运算律”引入，我进行了这样的

教学设计：首先演示一个外力做功的实验： $W=|F| |S|\cos \theta$ ，并揭示这个物理模型的实质，即：力与位移的数量积。

其次，具体分析平面向量的夹角，向量的数量积、重要性质等概念，并巩固练习。再者，基本概念均简明有效的给出，为之后学生深入学习、探究提供了时间上的保证，从定义出发推导运算律也变得简单易行。随后，从特殊到一般，得出数量积的几何表示。在教师为主导、学生为主体的教学模式中，学习活动进展顺利，学生们都显得游刃有余。在教学过程中，学生对平面向量数量积的定义及运算律的理解有些难度，总的感觉是：在核心问题上的处理不太容易把握，学生需要较多的时间去探究和体验。

结合多年教学发现学生对数量积的结果是数量重视不够，解题中往往忽略，导致出错，因此教学中应重点强调；性质中 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ 学生容易忽略；书写中符号“ $\cdot$ ”学生容易省略不写，教学和作业中发现问题教师应时常提醒学生及时纠正，避免重复错误；运算律中消去律和结合律不能乱用，要给学生讲清楚一定不能与实数的运算律混淆，这些地方应反复给学生强调。

最后，在有效落实教学目标的同时，如何让学生的“学”更轻松些，让教师的“教”更顺畅些，使“数量积”的概念形成更具一般性，更能揭示“数量积”的本质内含就显得尤为重要。

四、教法及教学反思

教学过程中采用启发引导式与讲练相结合，并借助多媒体教学手段，使学生理解平面向量数量积的定义，理解定义之后引导学生推导数量积的性质，通过例题和练习加深学生对平面向量数量积定义的认识，初步掌握平面向量数量积定义的运用。这一切主要是通过课堂教学来实现的，因此，要精于课堂教学设计，并在实践中进行反思和再设计，形成一系列适合学生认知、发展的教学方案。同时，在教学中要注意引导学生不断增强自主性、探索性、合作性和思辨性，促使他们成为学习的主人。而贯彻数形结合思想是克服难点的有效举措。通过例题、练习的分析讲评和学生积极主动的解题实践，运用知识解决问题的能力将得到提高。由于课堂教学准备的较充分，基本能达到预定目标。

教学反思，是教师对自身教学工作的检查与评定，是整理教学中的反馈信息，适时总结经验教训、找出教学的成功与不足的重要过程。因此教学后适时的反思有利于促进教学，以上就是我对本节课的理解和反思。