

三角函数复习专题讲义

1. 考点明晰	1
2. 基础回顾	1
1 与三角函数计算相关的公式:	1
2 图像变换规律: 设函数为 $y = f(x)$ (所涉及参数均为正数)	2
3 三角函数及函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 性质	3
4 求解 A, ω, φ 的值以确定解析式 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$	5
5 解三角形	5
3. 例题精讲	8
2.1 三角函数求值问题	8
题型一: 象限角与终边相同的角	8
题型二: 扇形的弧长与面积问题	8
题型三: 三角函数的有关概念	9
题型四: 同角三角函数基本关系式的应用	9
1 命题角度: $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ 三者知一求二问题	9
2 命题角度: $\sin \alpha + \cos \alpha, \sin \alpha - \cos \alpha, \sin \alpha \cos \alpha$ 三者知一求二问题	10
3 命题角度: 关于 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的齐次式问题	10
题型五: 诱导公式的应用	11
题型六: 同角关系与诱导公式的综合应用	11
题型七: 和、差、倍角公式的简单应用	12
题型八: 简单的三角恒等变换	12
1 命题角度: 三角函数式的化简求值	12
2 命题角度: 给角求值	12
3 命题角度: 给值求值	13
4 命题角度: 给值求角	14
2.2 三角函数的图像和性质问题	14
题型一: 三角函数的定义域、值域	14
题型二: 三角函数的周期性	14
题型三: 三角函数的奇偶性	15
题型四: 三角函数的单调性	16
题型五: 三角函数图象的对称性	17
题型六: 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象及图象变换	17
题型七: 由图象确定 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的解析式	19
题型八: 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 图象与性质的综合应用	20
1 命题角度: 函数零点问题	20
2 命题角度: 三角函数模型	21
2.3 解三角形	21
题型一: 正弦定理的应用	21
题型二: 余弦定理的应用	22
题型三: 正、余弦定理的综合应用	22
1 命题角度: 判断三角形形状	22
2 命题角度: 计算三角形面积	22
3 命题角度: 最值范围问题	23

题型四：利用正、余弦定理解决实际问题	23
题型五：学科素养·传统文化背景下的解三角形问题	25
2.4 三角函数与解三角形的综合问题	25
题型一：三角函数的图象和性质	25
题型二：正余弦定理的综合应用	26
题型三：解三角形与恒等变换的综合问题	26
题型四：开放探索问题	26
题型五：平面图形中的计算问题	27
题型六：最值范围问题	27
4. 同步检测	28
一、选择题	28
二、选择题	28
三、填空题	29
四、解答题	30

第一部分

知识笔记

三角函数复习专题讲义



1. 考点明晰

考点 1: 三角函数的有关概念;

考点 2: 三角恒等变换; (两角和、差公式, 倍角半角公式、诱导公式、同角的三角函数关系式)

考点 3: 正弦函数、余弦函数、正切函数的图象和性质; (定义域、值域、最值; 单调区间、最小正周期、对称轴对称中心)

考点 4: 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图象与性质; (定义域、值域、最值; 单调区间、最小正周期、对称轴对称中心、图像的变换)

考点 5: 解三角形



2. 基础回顾

★ 与三角函数计算相关的公式:

(1) 两角和差的正余弦, 正切公式:

$$\textcircled{1} \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\textcircled{3} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\textcircled{5} \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\textcircled{2} \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$\textcircled{4} \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\textcircled{6} \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

(2) 倍半角公式:

$$\textcircled{1} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\textcircled{2} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\textcircled{3} \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$(3) \text{降幂公式: } \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$(4) \text{升幂公式: } \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$(5) \text{辅助角公式: } a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\alpha + \varphi), \text{ 其中 } \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

使用范围: 三个特点: ① 同角 (均为 α), ② 齐一次, ③ 正余全

操作手册: 如果遇到了符合以上三个条件的式子, 恭喜你, 可以使用合角公式将其化为 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的形式了, 通过以下三步:

① 一提: 提取系数: $\sqrt{a^2 + b^2}$, 表达式变为:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos\alpha \right)$$

② 二找: 由 $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, 故可看作同一个角的正余弦 (称 φ 为辅助

角), 如 $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 可得:



学习笔记

学习笔记



$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha)$$

③ 三合:利用两角和差的正弦公式进行合角: $a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\alpha + \varphi)$

注意事项:

- ① 在找角的过程中,一定要找“同一个角”的正余弦,因为辅助角的理论基础是两角和差的正余弦公式,所以构造的正余弦要同角
- ② 此公式不要死记硬背,找角的要求很低,只需同一个角的正余弦即可,所以可以从不同的角度构造角,从而利用不同的公式进行辅助角
- ③ 通常遇到的辅助角都是常见的特殊角,这也为我们的化简提供了便利,如果提完系数发现括号里不是特殊角的正余弦,那么可用抽象的 φ 来代替,再在旁边标注 φ 的一个三角函数值。

★ 2 图像变换规律:设函数为 $y=f(x)$ (所涉及参数均为正数)

1、函数图像的平移变换:

- (1) $f(x+a)$: $f(x)$ 的图像向左平移 a 个单位
- (2) $f(x-a)$: $f(x)$ 的图像向右平移 a 个单位
- (3) $f(x)+b$: $f(x)$ 的图像向上平移 b 个单位
- (4) $f(x)-b$: $f(x)$ 的图像向下平移 b 个单位

2、函数图像的放缩变换:

- (1) $f(kx)$: $f(x)$ 的图像横坐标变为原来的 $\frac{1}{k}$ (图像表现为横向的伸缩)
- (2) $kf(x)$: $f(x)$ 的图像纵坐标变为原来的 k 倍 (图像表现为纵向的伸缩)

3、函数图像的翻折变换:

- (1) $f(|x|)$: $f(x)$ 在 x 轴正半轴的图像不变,负半轴的图像替换为与正半轴图像关于 y 轴对称的图像
- (2) $|f(x)|$: $f(x)$ 在 x 轴上方的图像不变, x 轴下方的部分沿 x 轴向上翻折即可 (与原 x 轴下方图像关于 x 轴对称)

图像变换中要注意的几点:

1、如何判定是纵坐标变换还是横坐标变换?

在寻找到联系后可根据函数的形式了解变换所需要的步骤,其规律如下:

- ① 若变换发生在“括号”内部,则属于横坐标的变换
- ② 若变换发生在“括号”外部,则属于纵坐标的变换

例如: $y=f(3x+1)$: 可判断出属于横坐标的变换:有放缩与平移两个步骤

$y=f(-x)+2$: 可判断出横纵坐标均需变换,其中横坐标的为对称变换,纵坐标的为平移变换

2、解析式变化与图像变换之间存在怎样的对应? 由前面总结的规律不难发现:

- (1) 加“常数” $\Leftrightarrow$ 平移变换
- (2) 添“系数” $\Leftrightarrow$ 放缩变换
- (3) 加“绝对值” $\Leftrightarrow$ 翻折变换

3、多个步骤的顺序问题:在判断了需要几步变换以及属于横坐标还是纵坐标的变换后,在安排顺序时注意以下原则:

- ① 横坐标的变换与纵坐标的变换互不影响,无先后要求
- ② 横坐标的多次变换中,每次变换只有 x 发生相应变化

例如: $y=f(x) \rightarrow y=f(2x+1)$ 可有两种方案

方案一:先平移(向左平移 1 个单位),此时 $f(x) \rightarrow f(x+1)$ 。再放缩(横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$),此时系数 2 只是添给 x ,即 $f(x+1) \rightarrow f(2x+1)$

方案二:先放缩(横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$),此时 $f(x) \rightarrow f(2x)$,再平移时,若平移 a 个单位,



学习笔记

则 $f(2x) \rightarrow f(2(x+a)) = f(2x+2a)$ (只对 x 加 a), 可解得 $a = \frac{1}{2}$, 故向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位

③ 纵坐标的多次变换中, 每次变换将解析式看做一个整体进行

例如: $y = f(x) \rightarrow y = 2f(x) + 1$ 有两种方案

方案一: 先放缩: $y = f(x) \rightarrow y = 2f(x)$, 再平移时, 将解析式看做一个整体, 整体加 1, 即 $y = 2f(x) \rightarrow y = (2f(x)) + 1$

方案二: 先平移: $y = f(x) \rightarrow y = f(x) + 1$, 则再放缩时, 若纵坐标变为原来的 a 倍, 那么 $y = f(x) + 1 \rightarrow y = a(f(x) + 1)$, 无论 a 取何值, 也无法达到 $y = 2f(x) + 1$, 所以需要对前一步进行调整: 平移 $\frac{1}{2}$ 个单位, 再进行放缩即可 ($a = 2$)

3 三角函数及函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 性质

1、正弦函数、余弦函数和正切函数的图象与性质:

用五点法作正弦函数和余弦函数的简图

(1) 在正弦函数 $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象中, 五个关键点是: $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$, $(\pi, 0)$, $(\frac{3\pi}{2}, -1)$, $(2\pi, 0)$.

(2) 在余弦函数 $y = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象中, 五个关键点是: $(0, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\pi, -1)$, $(\frac{3\pi}{2}, 0)$, $(2\pi, 1)$.

函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
图象			
定义域	R	R	$\{x x \in R, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\}$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	R
周期性	2π	2π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
递增区间	$[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$	$[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$	$(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$
递减区间	$[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$	$[2k\pi, \pi + 2k\pi]$	无
对称中心	$(k\pi, 0)$	$(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{k\pi}{2}, 0)$
对称轴方程	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	$x = k\pi$	无

注: 正切函数的对称中心由两部分构成, 一部分是零点, 一部分是定义域取不到的 x 的值

2、 $y = |\sin x|$ 的性质: 与正弦函数 $y = \sin x$ 相比, 其图像可以看做是由 $y = \sin x$ 图像变换得到 (x 轴上方图像不变, 下方图像沿 x 轴向上翻折), 其性质可根据图像得到:

(1) 定义域: $x \in R$

(2) 值域: $y \in [0, 1]$

(3) 周期: $T = \pi$

(4) 对称轴: $x = \frac{k\pi}{2} (k \in Z)$

(5) 零点: $x = k\pi (k \in Z)$

(6) 单调增区间: $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in Z$

学习笔记



单调减区间: $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi), k \in \mathbb{Z}$

3、 $y = A\sin(\omega x + \varphi) (A > 0)$ 的性质: 此类函数可视为正弦函数 $y = \sin x$ 通过坐标变换所得, 通常此类函数的性质要通过计算所得。所涉及性质及计算方法如下:

(1) 最小正周期: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

(2) 定义域与值域: $y = A\sin(\omega x + \varphi), y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 值域为 $[-A, A]$.

(3) 最值

假设 $A > 0, \omega > 0$.

① 对于 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$,

$\begin{cases} \text{当 } \omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ 时, 函数取得最大值 } A; \\ \text{当 } \omega x + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ 时, 函数取得最小值 } -A; \end{cases}$

② 对于 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$,

$\begin{cases} \text{当 } \omega x + \varphi = 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ 时, 函数取得最大值 } A; \\ \text{当 } \omega x + \varphi = 2k\pi + \pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ 时, 函数取得最小值 } -A; \end{cases}$

(4) 对称轴与对称中心.

假设 $A > 0, \omega > 0$.

① 对于 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$,

$\begin{cases} \text{当 } \omega x_0 + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}), \text{ 即 } \sin(\omega x_0 + \varphi) \\ = \pm 1 \text{ 时, } y = \sin(\omega x + \varphi) \text{ 的对称轴为 } x = x_0 \\ \text{当 } \omega x_0 + \varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ 即 } \sin(\omega x_0 + \varphi) = 0 \\ \text{时, } y = \sin(\omega x + \varphi) \text{ 的对称中心为 } (x_0, 0). \end{cases}$

② 对于 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$,

$\begin{cases} \text{当 } \omega x_0 + \varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ 即 } \cos(\omega x_0 + \varphi) = \pm 1 \\ \text{时, } y = \cos(\omega x + \varphi) \text{ 的对称轴为 } x = x_0 \\ \text{当 } \omega x_0 + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}), \text{ 即 } \cos(\omega x_0 + \varphi) \\ = 0 \text{ 时, } y = \cos(\omega x + \varphi) \text{ 的对称中心为 } (x_0, 0). \end{cases}$

正、余弦曲线的对称轴是相应函数取最大(小)值的位置. 正、余弦的对称中心是相应函数与 x 轴交点的位置.

(5) 单调性.

假设 $A > 0, \omega > 0$.

① 对于 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$,

$\begin{cases} \omega x + \varphi \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \text{增区间}; \\ \omega x + \varphi \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \text{减区间}. \end{cases}$

② 对于 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$,

$\begin{cases} \omega x + \varphi \in [-\pi + 2k\pi, 2k\pi] (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \text{增区间}; \\ \omega x + \varphi \in [2k\pi, 2k\pi + \pi] (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \text{减区间}. \end{cases}$

(6) 平移与伸缩

由函数 $y = \sin x$ 的图像变换为函数 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 3$ 的图像的步骤:

方法一: $(x \rightarrow x + \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x + \frac{\pi}{3})$. 先相位变换, 后周期变换, 再振幅变换, 不妨采用谐音记忆: 我们“想欺负”(相一期一幅)三角函数图像, 使之变形.

$y = \sin x$ 的图像 $\xrightarrow{\text{向左平移 } \frac{\pi}{3} \text{ 个单位}}$ $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ 的图像 $\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{所有点的横坐标变为原来的 } \frac{1}{2}}$

$y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图像 $\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{所有点的纵坐标变为原来的 2 倍}}$ $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图像

$\xrightarrow{\text{向上平移 3 个单位}}$ $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 3$



方法二: $(x \rightarrow x + \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x + \frac{\pi}{3})$. 先周期变换, 后相位变换, 再振幅变换.

$y = \sin x$ 的图像 $\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{所有点的横坐标变为原来的 } \frac{1}{2}}$ $y = \sin 2x$ 的图像 $\xrightarrow{\text{向左平移 } \frac{\pi}{6} \text{ 个单位}}$

$y = \sin 2(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图像 $\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{所有点的纵坐标变为原来的 } 2 \text{ 倍}}$

$y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图像 $\xrightarrow{\text{向上平移 } 3 \text{ 各单位}}$ $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 3$

注: 在进行图像变换时, 提倡先平移后伸缩 (先相位后周期, 即“想欺负”), 但先伸缩后平移 (先周期后相位) 在题目中也经常出现, 所以必须熟练掌握, 无论哪种变化, 切记每一个变换总是对变量 x 而言的, 即图像变换要看“变量 x ”发生多大变化, 而不是“角 $\omega x + \varphi$ ”变化多少.

★ 4 求解 A, ω, φ 的值以确定解析式 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$

1、 A, ω, φ 的作用

(1) A : 称为振幅, 与 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 一个周期中所达到的波峰波谷有关

(2) ω : 称为频率, 与 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期 T 相关, 即 $\omega = \frac{2\pi}{T}$

(3) φ : 称为初相, 一定程度上影响 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的对称轴, 零点

2、 A, ω, φ 的常规求法:

(1) A :

① 对于 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 可通过观察在一个周期中所达到的波峰波谷 (或值域) 得到

② 对于 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ 可通过一个周期中最大, 最小值进行求 $A = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$

(2) ω :

由 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 可得: 只要确定了 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期, 即可立刻求出 ω , 而 T 的值可根据对称轴 (最值点) 和对称中心 (零点) 的距离进行求解

① 如果 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 相邻的两条对称轴为 $x = a, x = b (a < b)$, 则 $T = 2(b - a)$

② 如果 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 相邻的两个对称中心为 $(a, 0), (b, 0) (a < b)$, 则 $T = 2(b - a)$

③ 如果 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 相邻的对称轴与对称中心分别为 $x = a, (b, 0)$, 则 $T = 4|b - a|$

注: 在 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 中, 对称轴与最值点等价, 对称中心与零点等价.

3、 φ :

在图像或条件中不易直接看出 φ 的取值, 通常可通过代入曲线上的点进行求解, 要注意题目中对 φ 的限制范围

4、确定解析式要注意的几个问题:

(1) 求参数的顺序问题: 理论上, 三个参数均可以通过特殊点的代入进行求解, 但由于 A, ω 与函数性质联系非常紧密, 所用通常先抓住波峰波谷以确定 A 的值, 再根据对称轴对称中心的距离确定 T , 进而求出 ω , 最后再通过代入一个特殊点, 并根据 φ 的范围确定 φ .

(2) 求 φ 时特殊点的选取: 往往优先选择最值点, 因为最值点往往计算出的 φ 值唯一, 不会出现多解的情况. 如果代入其它点 (比如零点), 有时要面临结果取舍的问题.

★ 5 解三角形

1、正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, 其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径

正弦定理的主要作用是方程和分式中的边角互化. 其原则为关于边, 或是角的正弦值是否具备齐次的特征. 如果齐次则可直接进行边化角或是角化边, 否则不可行

例如: (1) $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin A \sin B = \sin^2 C \Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab = c^2$

(2) $b \cos C + c \cos B = a \Rightarrow \sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin A$ (恒等式)

(3) $\frac{bc}{a^2} = \frac{\sin B \sin C}{\sin^2 A}$

学习笔记



2、余弦定理： $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

变式：(1) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

① 此公式通过边的大小(角两边与对边)可以判断出 A 是钝角还是锐角

当 $b^2 + c^2 > a^2$ 时, $\cos A > 0$, 即 A 为锐角;

当 $b^2 + c^2 = a^2$ (勾股定理) 时, $\cos A = 0$, 即 A 为直角;

当 $b^2 + c^2 < a^2$ 时, $\cos A < 0$, 即 A 为钝角

② 观察到分式为齐二次分式, 所以已知 a, b, c 的值或者 $a:b:c$ 均可求出 $\cos A$

(2) $a^2 = (b+c)^2 - 2bc(1+\cos A)$ 此公式在已知 $b+c$ 和 bc 时不需要计算出 b, c 的值, 进行整体代入即可或此公式在已知 a, A 的情况下, 配合均值不等式可得到 $b+c$ 和 bc 的最值

3、三角形面积公式:

(1) $S = \frac{1}{2}a \cdot h$ (a 为三角形的底, h 为对应的高)

(2) $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$

(3) $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin A \cdot 2R\sin B\sin C = 2R^2\sin A\sin B\sin C$ (其中 R 为外接圆半径)

(4) $S = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r$ (r 为三角形内切圆半径, 此公式也可用于求内切圆半径)

(5) 海伦公式: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

(6) 向量方法: $S = \frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$ (其中 $\vec{a}, \vec{b}$ 为边 a, b 所构成的向量, 方向任意)

证明: $S = \frac{1}{2}ab\sin C \Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2 C = \frac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos^2 C)$

$\therefore S = \frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2 - (ab\cos C)^2}$, 而 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = ab\cos C$

$\therefore S = \frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$

坐标表示: $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$, 则 $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

4、三角形内角和 $A+B+C = \pi$ (两角可表示另一角)。

$\sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C$

$\cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$

5、确定三角形要素的条件:

(1) 唯一确定的三角形:

① 已知三边 (SSS): 可利用余弦定理求出剩余的两个角

② 已知两边及夹角 (SAS): 可利用余弦定理求出第三边, 进而用余弦定理 (或正弦定理) 求出剩余两角

③ 两角及一边 (AAS 或 ASA): 利用两角先求出另一个角, 然后利用正弦定理确定其它两条边

(2) 不唯一确定的三角形

① 已知三个角 (AAA): 由相似三角形可知, 三个角对应相等的三角形有无数多个。由正弦定理可得: 已知三个角只能求出三边的比例: $a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C$

② 已知两边及一边的对角 (SSA): 比如已知 a, b, A , 所确定的三角形有可能唯一, 也有可能是两个。其原因在于当使用正弦定理求 B 时, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b\sin A}{a}$, 而 $B \in$

$(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, 一个 $\sin B$ 可能对应两个角 (1 个锐角, 1 个钝角), 所以三角形可能不唯一。(判定是否唯一可利用三角形大角对大边的特点, 具体可参考例 1)

6、解三角形的常用方法:

(1) 直接法: 观察题目中所给的三角形要素, 使用正余弦定理求解



学习笔记

(2) 间接法: 可以根据所求变量的个数, 利用正余弦定理, 面积公式等建立方程, 再进行求解

7、三角形的中线定理与角平分线定理

(1) 三角形中线定理: 如图, 设 AD 为 $\triangle ABC$ 的一条中线, 则

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2) \quad (\text{知三求一})$$

证明: 在 $\triangle ABD$ 中

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \angle ADB \quad ①$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos \angle ADC \quad ②$$

$$\because D \text{ 为 } BC \text{ 中点} \quad \therefore BD = CD$$

$$\because \angle ADB + \angle ADC = \pi \quad \therefore \cos \angle ADB = -\cos \angle ADC$$

$\therefore$ ① + ② 可得:

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

(2) 角平分线定理: 如图, 设 AD 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的角

$$\text{平分线, 则 } \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

证明: 过 D 作 $DE \parallel AC$ 交 AB 于 E

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BE}{AE} \quad \angle EDA = \angle DAC$$

$\because AD$ 为 $\angle BAC$ 的角平分线

$$\therefore \angle EAD = \angle DAC \quad \therefore \angle EDA = \angle EAD$$

$$\therefore \triangle EAD \text{ 为等腰三角形} \quad \therefore EA = ED$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BE}{AE} = \frac{BE}{ED} \quad \text{而由 } \triangle BED \sim \triangle BAC \text{ 可得: } \frac{BE}{ED} =$$

$$\frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

8、三角形中的不等关系

(1) 任意两边之和大于第三边: 在判定是否构成三角形时, 只需验证较小的两边之和是否比第三边大即可。由于不存在等号成立的条件, 在求最值时使用较少

(2) 在三角形中, 边角以及角的三角函数值存在等价关系:

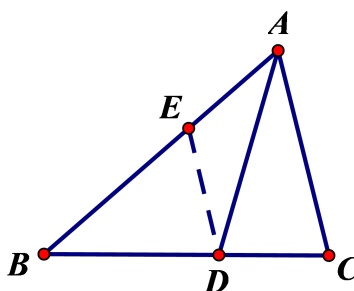
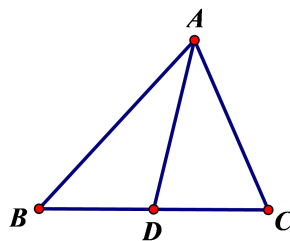
$$a > b \Leftrightarrow A > B \Leftrightarrow \sin A > \sin B \Rightarrow \cos A < \cos B$$

其中由 $A > B \Leftrightarrow \cos A < \cos B$ 利用的是余弦函数单调性, 而 $A > B \Leftrightarrow \sin A > \sin B$ 仅在一个三角形内有效。

9、解三角形中处理不等关系的几种方法

(1) 转变为一个变量的函数: 通过边角互化和代入消元, 将多变量表达式转变为函数, 从而将问题转化为求函数的值域

(2) 利用均值不等式求得最值



第二部分

题型方法



3. 例题精讲

2.1 三角函数求值问题

题型一：象限角与终边相同的角

题目 1 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 和角 β 的顶点均与原点 O 重合, 始边均与 x 轴的非负半轴重合, 它们的终边关于直线 $y = -x$ 对称, 若 $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, 则 $\sin \beta =$ ()

A. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

方法归纳 【点拨】

①象限角的确定, 一般先写出不等式, 由不等式性质确定, 一般需要对 k 分类讨论. ②与角 α 终边相同的角的集合为 $\{\beta | \beta = 2k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$, 常用来判断所给角的象限, 写终边相同角的集合, 以及求与终边相同的相关角.

题目 2 【多选题】下列说法正确的是 ()

A. 第二象限角比第一象限角大

B. 60° 角与 600° 角是终边相同的角

C. 钝角一定是第二象限角

D. 将表的分针拨慢 10min, 则分针转过的角的弧度数为 $\frac{\pi}{3}$

题目 3 “角 α 与角 β 的终边关于直线 $y = x$ 对称”是“ $\sin(\alpha + \beta) = 1$ ”的 ()

A. 充要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件

D. 既不充分也不必要条件

题型二：扇形的弧长与面积问题

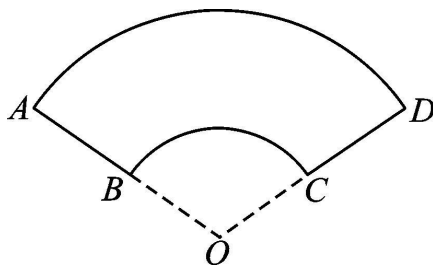
题目 1 已知扇形 AOB 的周长为 8, 则扇形 AOB 的面积的最大值是 4, 此时弦长 $AB =$ _____

方法归纳 【点拨】

直接用公式 $l = |\alpha|R$ 可求弧长, 利用 $S = \frac{1}{2}|\alpha|r^2$ 可求扇形面积, 利用 $S_{\text{弓}} = S_{\text{扇}} - S_{\Delta}$ 可求弓形面积. 关于扇形的弧长公式和面积公式有角度制与弧度制这两种形式, 一般使用弧度制.

题目 2 一个半径为 r 的扇形, 若它的周长等于弧所在的半圆的弧长, 则扇形的圆心角是 $\pi - 2$ 弧度; 扇形的面积是 _____

题目 3 如图, 是由杭州 2022 年第 19 届亚运会会徽抽象出的几何图形. 设弧 AD 的长度是 l_1 , 弧 BC 的长度是 l_2 , 几何图形 $ABCD$ 的面积为 S_1 , 扇形 BOC 的面积为 S_2 , 若 $\frac{l_1}{l_2} = 2$, 则 $\frac{S_1}{S_2} =$ ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

题型三：三角函数的有关概念

题目 1 【多选题】已知角 α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，它的终边过点 $P(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ ，将角 α 的终边逆时针旋转 90° 得到角 β ，则下列结论正确的是 ()

A. $\tan \alpha = \frac{4}{3}$

B. $\cos \beta = -\frac{3}{5}$

C. $\sin(\alpha - \beta) = -1$

D. $\sin(\beta + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$

方法归纳 【点拨】

三角函数定义应用问题的解题思路：①直接利用三角函数的定义，找到或根据已知给定角的终边上一个点的坐标，及这点到原点的距离，确定这个角的三角函数值；②已知角的某一个三角函数值，可以通过三角函数的定义列出关于参数的方程，求参数的值。牢记各象限三角函数值的符号，在计算或化简三角函数关系时，要注意对角的范围以及三角函数值的正负进行必要的讨论。

题目 2 已知点 $P(\cos \frac{2\pi}{3}, 1)$ 是角 α 终边上一点，则 $\cos \alpha =$ ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

题目 3 在平面直角坐标系 xOy 中，将向量 $\vec{OA} = (\sqrt{3}, -1)$ 绕原点 O 按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后得到向量 $\vec{OB} = (m, n)$ ，则 $mn =$ _____.

题目 4 已知角 α 的终边经过点 $P(3m-9, m+2)$

(1) 若 $m=2$ ，求 $5\sin \alpha + 3\tan \alpha$ 的值；

(2) 若 $\cos \alpha \leq 0$ 且 $\sin \alpha > 0$ ，求实数 m 的取值范围。

题型四：同角三角函数基本关系式的应用

1 命题角度： $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ 三者知一求二问题

题目 1 已知 $\triangle ABC$ 中， $\tan A = -\frac{5}{12}$ ，则 $\cos A =$ ()

A. $\frac{12}{13}$

B. $-\frac{12}{13}$

C. $-\frac{5}{13}$

D. $\frac{5}{13}$

题目 2 若点 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 在直线 $y = -2x$ 上，则 $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{2}) =$ ()

A. $-\frac{4}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $-\frac{3}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

方法归纳 【点拨】

这类知一求二问题，注意判断角的范围，另外熟记以下常见勾股数，可以提高解题速度：① $3^2 + 4^2 = 5^2$ ， $6^2 + 8^2 = 10^2$ ， $9^2 + 12^2 = 15^2$ ，...；② $5^2 + 12^2 = 13^2$ ， $8^2 + 15^2 = 17^2$ ， $7^2 + 24^2 = 25^2$ ，...

题目 3 已知 $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, 且 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, 则 $\tan\alpha =$ ()

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $\pm\frac{3}{4}$

题目 4 已知 α 为锐角, 且 $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\tan\alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

2 命题角度: $\sin\alpha + \cos\alpha$, $\sin\alpha - \cos\alpha$, $\sin\alpha\cos\alpha$ 三者知一求二问题

题目 1 已知 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{4}{3}$, $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, 则 $\sin\theta - \cos\theta$ 的值为 ()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

题目 2 已知 $\alpha \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, 且 $\frac{1}{2}\sin 2\alpha + \sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{23}{25}$, 则 $\tan\alpha =$ ()

- A. $\frac{4}{3}$ 或 $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{3}$ 或 3

方法归纳 【点拨】

对于已知 $\sin\alpha \pm \cos\alpha$ 的求值问题, 一般应用三角恒等式, 利用整体代入的方法来解决, 涉及的三角恒等式有 $(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm 2\sin\alpha\cos\alpha$, $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$, $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 4\sin\alpha\cos\alpha$ 等.

题目 3 已知 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{5}$, $\theta \in (0, \pi)$, 则 $\sin^2\theta - \cos^2\theta$ 的值为 _____.

题目 4 已知 $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 4$, 则 $\sin^4\theta + \cos^4\theta =$ ()

- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{7}{8}$

题目 5 已知函数 $f(x) = \sin x + \cos x + 2\sin x \cos x + 2$, 则 $f(x)$ 的最大值为 _____.

3 命题角度: 关于 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 的齐次式问题

题目 1 已知 $\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha - 1} = -1$, 则 $\frac{\sin\alpha - 3\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} =$ _____.

题目 2 若 $\tan\theta = -2$, 则 $\frac{\sin\theta(1 + \sin 2\theta)}{\sin\theta + \cos\theta} =$ ()

- A. $-\frac{6}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{6}{5}$

方法归纳 【点拨】

形如 $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ 和 $a\sin^2\alpha + b\sin\alpha\cos\alpha + c\cos^2\alpha$ 的式子分别称为关于 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 的一次齐次式和二次齐次式, 对涉及它们的三角变换通常转化为正切 (分子分母同除以 $\cos\alpha$ 或 $\cos^2\alpha$) 求解. 如果分母为 1, 为了弦化切, 常将 1 写成 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

题目 3 若 $\tan\alpha = -3$, 则 $\frac{2\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ 的值为 ()

- A. $-\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

题目 4 若 $\tan\theta = 3$, 则 $8\cos^2\theta + 2\sin 2\theta =$ ()

A. $-\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{5}$

C. -2

D. 2

题目 5 若 $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = -2$, 则 $\frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha\cos\alpha + 3\cos^3\alpha} = (\quad)$

A. $\frac{5}{2}$

B. 2

C. $-\frac{5}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

题型五: 诱导公式的应用

题目 1 【多选题】在 $\triangle ABC$ 中, 下列等式一定成立的是 $(\quad)$

A. $\sin\frac{A+B}{2} = -\cos\frac{C}{2}$

B. $\sin(2A+2B) = -\cos 2C$

C. $\tan(A+B) = -\tan C$

D. $\sin(A+B) = \sin C$

题目 2 若 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5}{13}$, 且 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

题目 3 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于 y 轴对称. 若 $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\sin\beta = (\quad)$

A. $\frac{1}{3}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

方法归纳 【点拨】

①三角式的化简通常先用诱导公式, 将角统一后再用同角三角函数关系式; ②正确理解“奇变偶不变, 符号看象限”可以提高解题效率.

题目 4 【多选题】下列化简正确的是 $(\quad)$

A. $\tan(\pi+1) = \tan 1$

B. $\frac{\sin(-\alpha)}{\tan(360^\circ-\alpha)} = \cos\alpha$

C. $\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)} = \tan\alpha$

D. $\frac{\cos(\pi-\alpha)\tan(-\pi-\alpha)}{\sin(2\pi-\alpha)} = 1$

题目 5 若 $\cos\left(\alpha + \frac{7\pi}{3}\right) = \frac{4}{5}$, 则 $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

题目 6 【多选题】已知函数 $f(x) = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$, 则 $(\quad)$

A. $f(x)$ 是奇函数B. $f(x)$ 是偶函数C. $\forall x \in R, f(x-2\pi) = f(x)$ D. 函数 $g(x) = f(x+\pi) + f(x)$ 的最大值为 2

题型六: 同角关系与诱导公式的综合应用

题目 1 已知 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 3$, 则 $\frac{\sin(\alpha+\pi) + \cos(\pi-\alpha)}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} = (\quad)$

A. $-\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. -3

D. 3

方法归纳 【点拨】

①此类问题一般先化简再求值; ②准确利用“奇变偶不变, 符号看象限”; ③注意角的范围对三角函数符号的影响.

题目 2 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$, 则 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi + \alpha) = (\quad)$

A. $-\frac{15}{17}$

B. $\frac{15}{17}$

C. $-\frac{8}{17}$

D. $\frac{8}{17}$

题目 3 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\frac{\sin^3(\pi - \alpha) + \cos(\alpha + \pi)}{5\cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + 3\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)}$ 的值为 _____.

题型七: 和、差、倍角公式的简单应用

题目 1 【多选题】下列各式的值小于 1 的是 ()

A. $\cos 10^\circ \cos 340^\circ + \sin 190^\circ \sin 20^\circ$

B. $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12}$

C. $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$

D. $\cos 15^\circ - \sqrt{3} \sin 15^\circ$

方法归纳 【点拨】

和、差、倍角公式对使公式有意义的任意角都成立, 使用中要注意观察角之间的和、差、倍、互补、互余等关系.

题目 2 【多选题】下列计算正确的是 ()

A. $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{3}$

B. $\cos^4 22.5^\circ - \sin^4 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sin 15^\circ \sin 45^\circ \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}$

D. $\tan 37^\circ + \tan 23^\circ + \sqrt{3} \tan 37^\circ \tan 23^\circ = 1$

题型八: 简单的三角恒等变换

1 命题角度: 三角函数式的化简求值

题目 1 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $2\sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1$, 则 $\sin \alpha =$ ()

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

题目 2 若 $\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \beta$, 则 ()

A. $\tan(\alpha - \beta) = 1$

B. $\tan(\alpha + \beta) = 1$

C. $\tan(\alpha - \beta) = -1$

D. $\tan(\alpha + \beta) = -1$

方法归纳 【点拨】

三角函数式化简、求值的一般思路: 异名三角函数化为同名三角函数, 异角化为同角, 异次化为同次, 切化弦, 特殊值与特殊角的三角函数互化等.

题目 3 已知 $\cos^2 \alpha = \sin \alpha$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()

A. $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

B. $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\sqrt{5} - 2$

题目 4 若 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $(1 + \cos 2\alpha)(1 + \sin \beta) = \sin 2\alpha \cos \beta$, 则下列结论正确的是 ()

A. $\sin(\alpha + \beta) = 1$

B. $\sin(\alpha - \beta) = 0$

C. $\sin(2\alpha + \beta) = 0$

D. $\sin(2\alpha - \beta) = 1$

题目 5 已知锐角 α 满足 $2\cos 2\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{7}{8}$

2 命题角度: 给角求值

题目 1 $\frac{2\cos 5^\circ - \sin 25^\circ}{\sin 65^\circ} =$ _____.

题目 2 $\sin 50^\circ (1 + \sqrt{3} \tan 10^\circ) =$ _____.

★方法归纳【点拨】★

解决非特殊角求值问题的基本思路有：①化非特殊角为特殊角；②化为正负相消的项，消去后求值；③化分子、分母使之出现公因数，进行约分求值；④当有 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha$ 同时出现在一个式子中时，一般将 α 向 $2\alpha, 3\alpha$ (或 4α) 向 2α 转化，再求关于 2α 式子的值。

题目 3 $\tan 255^\circ = (\quad)$

- A. $-2 - \sqrt{3}$ B. $-2 + \sqrt{3}$ C. $2 - \sqrt{3}$ D. $2 + \sqrt{3}$

题目 4 $\frac{\sqrt{3}\tan 12^\circ - 3}{\sin 12^\circ (4\cos^2 12^\circ - 2)} = \underline{\hspace{2cm}}$

★3 命题角度：给值求值

题目 1 已知 $\tan \alpha = -2$, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{7}$, 则 $\tan \beta$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

题目 2 已知 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}$, 则 $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{3}) = (\quad)$

- A. $-\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

题目 3 已知 $\sin \alpha + 2\sin \beta = 1$, $\cos \alpha + 2\cos \beta = \sqrt{3}$, 则 $\cos 2(\alpha - \beta) = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{7}{8}$ D. $\frac{7}{8}$

★方法归纳【点拨】★

给值求值型恒等变换问题，重在对所给条件进行挖掘，如由某角正弦值可得其余弦、正切值，由所给值的符号判断角所在的象限等。必要时还要进行估算，如锐角 α 的余弦值为 $\frac{3}{5}$ ，由 $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，及余弦函数在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减可知 $45^\circ < \alpha < 60^\circ$ ，从而 $2\alpha \in (90^\circ, 120^\circ)$ ，或 $3\alpha \in (135^\circ, 180^\circ)$ 等。另外，注意三种主要变换：①变角，通常是“配凑”，常用的角的拆拼有 $2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)$ ， $\alpha = (\alpha + \beta) - \beta = (\alpha - \beta) + \beta$ 等；②变名，通过变换函数名称达到减少函数种类的目的，其手段通常有“切化弦”“升幂与降幂”等；③变式，根据式子的结构特征进行变形，使其更贴近某个公式或某个期待的目标，其手段通常有：“常值代换”（如 $1 = \tan \frac{\pi}{4}$, $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ ）“逆用变换公式”“通分约分”“分解与组合”“配方与平方”等。其中角的变换居核心地位。

题目 4 已知 α 为锐角，且 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{5}$ ，则 $\cos 2\alpha = (\quad)$

- A. $\frac{24}{25}$ B. $\frac{7}{25}$ C. $-\frac{24}{25}$ D. $\pm \frac{24}{25}$

题目 5 若 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$, $\alpha \in (0, \pi)$, 则 $\sin \alpha$ 的值为 $(\quad)$

- A. $\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{1 + 2\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{7}{18}$

题目 6 已知 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{3}$, 且 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\cos(\alpha - \beta) = (\quad)$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{23}{27}$

题目 7 $\triangle ABC$ 中， $\tan A = \frac{3}{4}$, $\cos B = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\tan 2(A + B) = (\quad)$

- A. $-\frac{11}{2}$ B. $-\frac{8}{7}$ C. $\frac{44}{117}$ D. -11

4 命题角度: 给值求角

题目 1 已知 $\tan \alpha = 2, \tan \beta = 3, \alpha, \beta \in (0, \pi)$, 则 $\alpha + \beta$ 的值为 ()

- A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$ C. $\frac{5\pi}{4}$ D. $\frac{7\pi}{4}$

题目 2 已知 α, β 均为锐角, 且 $3\sin \alpha = 2\sin \beta, 3\cos \alpha + 2\cos \beta = 3$, 则 $\alpha + 2\beta$ 的值为 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. π

方法归纳 【点拨】

①在给值求角时, 一般选择一个适当的三角函数, 根据题设确定所求角的范围, 利用三角函数的单调性求出角. 确定角的范围是关键, 一定要使所选的函数在此范围内是单调的, 必要时, 还需根据已知三角函数值缩小角的范围. ②已知三角函数值求角, 选三角函数时可按下列规则: (i) 已知正切值, 常选正切函数; (ii) 已知正、余弦值, 常选正弦或余弦函数; (iii) 若角的范围是 $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, 常选正、余弦函数; (iv) 若角的范围是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 常选正弦函数; (v) 若角的范围是 $(0, \pi)$, 常选余弦函数.

题目 3 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos B = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, 且 A 为锐角, 则 $C =$ _____.

题目 4 已知 $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $x^2 + 3\sqrt{3}x + 4 = 0$ 的两根, 且 $\alpha, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, 则 $\alpha + \beta$ 的值为 ()

- A. $\frac{4\pi}{3}$ B. $\frac{7\pi}{3}$ C. $\frac{4\pi}{3}$ 或 $\frac{7\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{3}$

2.2 三角函数的图像和性质问题

题型一: 三角函数的定义域、值域

题目 1 【多选题】下列函数中, 最大值 M 满足 $M \geq 1$ 的是 ()

- A. $y = 2\sin x - \cos x$ B. $y = \cos^2 x + 4\sin x - 4$
C. $y = \cos x \tan x$ D. $y = \sin x + \cos x + 2\sin x \cos x$

题目 2 已知函数 $f(x) = 4\sin(3x - \frac{\pi}{6})$ 的定义域为 $[0, m]$, 值域为 $[-2, 4]$, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $(\frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9})$ B. $(\frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}]$ C. $[\frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}]$ D. $[\frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9})$

方法归纳 【点拨】

求三角函数的定义域事实上就是解最简单的三角不等式(组). 三角函数值域的求法: ①形如 $y = a\sin x + b\cos x + c$ 的三角函数化为 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + k$ 的形式, 再求值域; ②形如 $y = a\sin^2 x + b\sin x + c$ 的三角函数, 可先设 $\sin x = t$, 化为关于 t 的二次函数求值域; ③形如 $y = a\sin x \cos x + b(\sin x \pm \cos x) + c$ 的三角函数, 可先设 $t = \sin x \pm \cos x$, 化为关于 t 的二次函数求值域.

题目 3 函数 $y = \sqrt{16 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ 的定义域是 _____.

题目 4 已知函数 $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$, 写出一个使得 $f(x) \leq f(x_0)$ 恒成立的 x_0 的值为 $x_0 =$ _____ (答案不唯一).

题目 5 已知函数 $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ 在 $x = \varphi$ 处取得最大值, 则最大值为 _____, $\cos \varphi =$ _____.

题型二: 三角函数的周期性

题目 1 求下列函数的最小正周期.

(1) $y = (a\sin x + \cos x)^2 (a \in \mathbb{R})$;

(2) $y = 2\cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\sin^2 x + \sin x \cos x$;

(3) $y = 2\left|\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$;

(4) $y = |\tan x|$.

题目 2 若 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ 在 $[0, 1]$ 上至少存在 50 个最小值点, 则 ω 的取值范围是 _____.

★方法归纳【点拨】★

求三角函数周期的方法: ①利用周期函数的定义; ②利用公式 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 和 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$, $y = A\tan(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{|\omega|}$; ③对于形如 $y = a\sin \omega x + b\cos \omega x$ 的函数, 一般先将其化为 $y = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(\omega x + \varphi)$ 的形式再求周期; ④带绝对值的三角函数的周期是否减半, 要根据图象来确定.

题目 3 给出如下四个函数:

① $f(x) = (\sqrt{3}\sin x + \cos x)(\sqrt{3}\cos x - \sin x)$;

② $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$;

③ $f(x) = \sin^2 x + b\sin x + c$, b, c 为常数;

④ $f(x) = |\sin 2x + \cos 2x|$.

其中最小正周期一定为 π 的所有函数序号为 ()

A. ①②

B. ①

C. ②③

D. ①③④

题目 4 设 $f(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2022) =$ _____.

题型三: 三角函数的奇偶性

题目 1 判断下列函数的奇偶性.

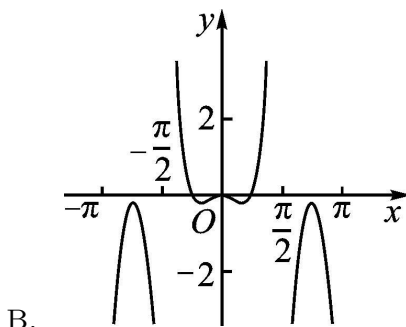
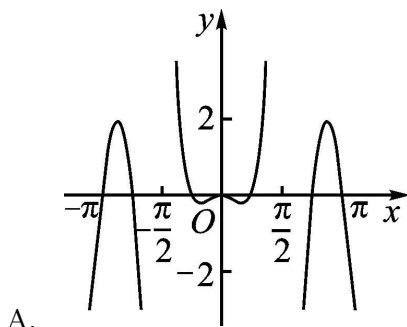
(1) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)\cos(\pi + x)$;

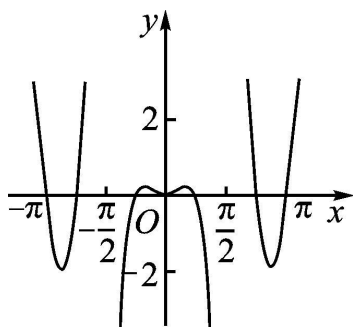
(2) $f(x) = \sqrt{2\sin 2x - 1}$;

(3) $f(x) = \lg(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$;

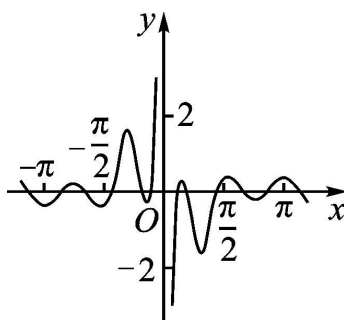
(4) $f(x) = \frac{6\cos^4 x + 5\sin^2 x - 4}{\cos 2x}$.

题目 2 函数 $y = (\tan x - \sin 2x) \cdot (2^x - 2^{-x})$ 的部分图象大致为 ()





C.



D.

题目 3 将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到曲线 C , 若 C 关于 y 轴对称, 则 ω 的最小值是 ()

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

题目 4 判断下列函数的奇偶性.

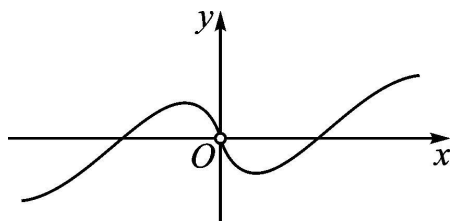
(1) $f(x) = \sqrt{2} \sin 2x$;

(2) $f(x) = \sin(\frac{3x}{4} + \frac{3\pi}{2})$;

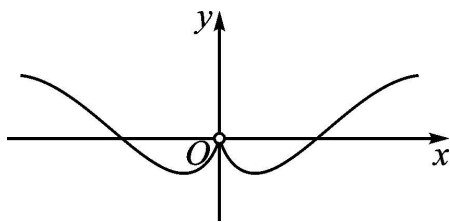
(3) $f(x) = \sin|x|$;

(4) $f(x) = \sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{\cos x - 1}$.

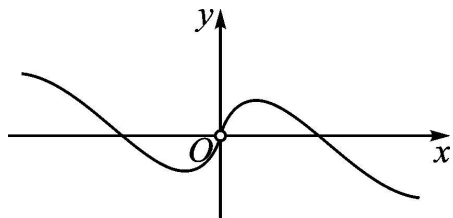
题目 5 函数 $f(x) = \ln|x| \cdot \sin x$ 的部分图象大致为 ()



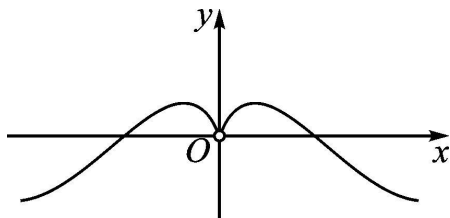
A.



B.



C.



D.

题目 6 若将函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度所得到的图象对应函数为奇函数, 则 $\varphi =$ _____.

题型四: 三角函数的单调性

题目 1 求下列函数的单调区间.

(1) $y = \cos(-2x + \frac{\pi}{3})$ 的单调递减区间;

(2) $y = 3 \tan(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4})$ 的单调区间;

(3) $y = -|\sin(x + \frac{\pi}{4})|$ 的单调递减区间.

题目 2 已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递增, 则 ω 的取值范围是 ()

A. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$

B. $[\frac{1}{2}, \frac{11}{6}]$

C. $[\frac{3}{4}, \frac{5}{3}]$

D. $[\frac{5}{3}, \frac{11}{6}]$

★方法归纳【点拨】★

求函数的单调区间应遵循简化原则,将解析式先化简,并注意复合函数单调性“同增异减”的规律.对于逆向的已知三角函数的单调区间求参数问题,常先求出函数的单调区间,然后利用集合间的关系求解.

题目 3 已知函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, 则 ()

- A. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6})$ 上单调递减 B. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12})$ 上单调递增
C. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调递减 D. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12})$ 上单调递增

题目 4 若函数 $y = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$ 在区间 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 则 ω 的取值范围是 _____.

题型五: 三角函数图象的对称性

题目 1 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, 函数 $f(x) = \sin(x + \varphi)$ 取得最小值, 则函数 $y = f(\frac{3\pi}{4} - x)$ ()

- A. 是奇函数且图象关于点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称 B. 是偶函数且图象关于点 $(\pi, 0)$ 对称
C. 是奇函数且图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称 D. 是偶函数且图象关于直线 $x = \pi$ 对称

题目 2 记函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) + b (\omega > 0)$ 的最小正周期为 T . 若 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$, 且 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ 中心对称, 则 $f(\frac{\pi}{2}) =$ ()

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3

★方法归纳【点拨】★

正、余弦函数关于其零点中心对称, 在最值点 x_0 处关于直线 $x = x_0$ 对称; 正切函数关于点 $(\frac{k\pi}{2}, 0) (k \in \mathbb{Z})$ 中心对称, 需要注意的是当 k 为奇数时, $(\frac{k\pi}{2}, 0)$ 不在 $y = \tan x$ 的定义域内.

题目 3 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$ 的最小正周期为 π , 则该函数的图象 ()

- A. 关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称 B. 关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称
C. 关于点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 对称 D. 关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称

题目 4 已知函数 $y = \sin(2x + \varphi) (-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, 则 φ 的值是 _____.

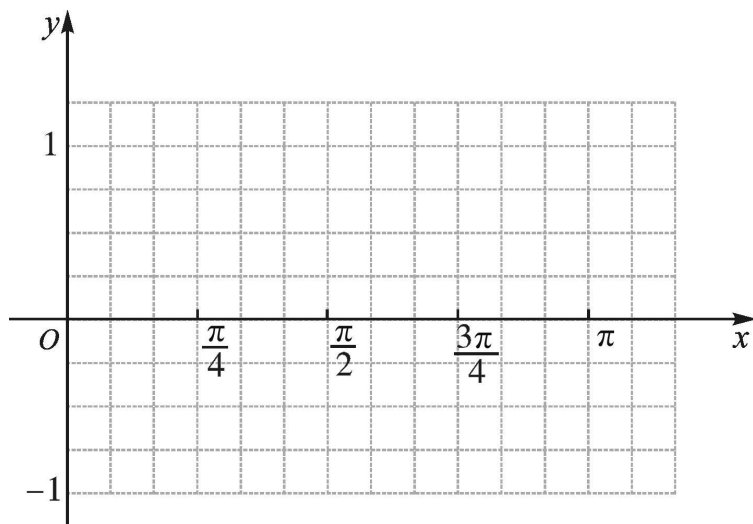
由题意可得 $\sin(\frac{2\pi}{3} + \varphi) = \pm 1$, 所以 $\frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\varphi = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $k = 0$, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$. 故填 $-\frac{\pi}{6}$.

题型六: 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象及图象变换

题目 1 【多选题】要得到 $y = \sin x$ 的图象, 可以将函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{5})$ 的图象上所有的点 ()

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度, 再把所得各点横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$
B. 向左平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度, 再把所得各点横坐标扩大到原来的 2 倍
C. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 再把所得各点向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度
D. 横坐标扩大到原来的 2 倍, 再把所得各点向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度

题目 2 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}\sin\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x (\omega > 0)$ 的最小正周期为 π .



(1) 求 ω 的值, 并在上面提供的直角坐标系中画出函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的图象;

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图象可由函数 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变换得到?

方法归纳 【点拨】

注意平移变换时, 当自变量 x 的系数不为 1 时, 要将系数先提出, 对称变换要注意翻折的方向; 三角函数名不同的图象变换问题, 应先将三角函数名统一, 再进行变换.

题目 3 把 $y=\sin x$ 图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 再把所得图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $y=f(x)$ 的图象, 则 ()

A. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$

B. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{12}\right)$

C. $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

D. $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

题目 4 把函数 $y=f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y=\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象, 则 $f(x) = ()$

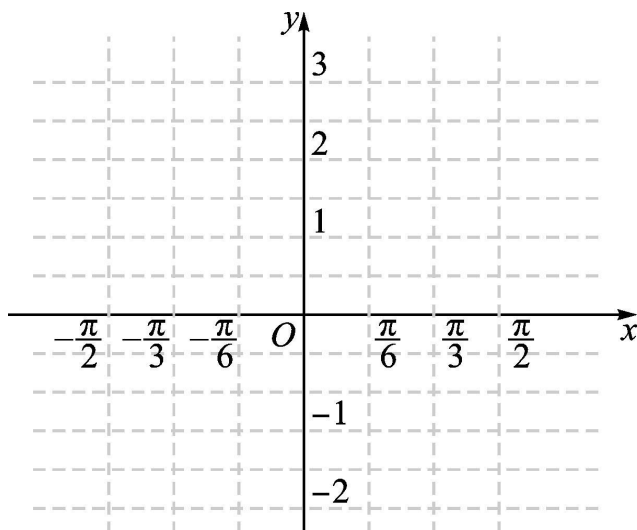
A. $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{12}\right)$

B. $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$

C. $\sin\left(2x - \frac{7\pi}{12}\right)$

D. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$

题目 5 将函数 $f(x) = 2\sin x$ 的图象向左平移 $\varphi (0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 个单位, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 函数 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 记函数 $h(x) = f(x)g(x)$.

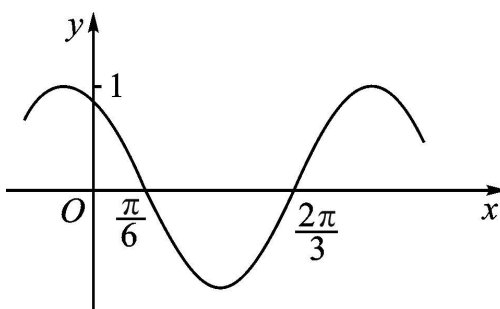


(1) 求函数 $y = h(x)$ 的最小正周期和单调递增区间；

(2) 在如图坐标系中画出函数 $y = h(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的大致图象.

题型七: 由图象确定 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的解析式

题目 1 【多选题】如图是函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象, 则 $\sin(\omega x + \varphi) = (\quad)$



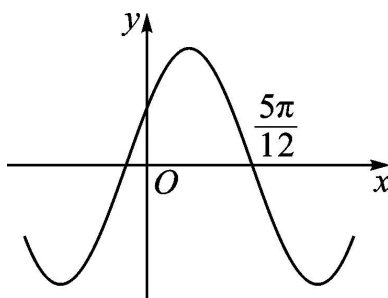
A. $\sin(x + \frac{\pi}{3})$

B. $\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)$

C. $\cos(2x + \frac{\pi}{6})$

D. $\cos(\frac{5\pi}{6} - 2x)$

题目 2 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 的图象如图所示, 则下列说法正确的是 ()



A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. $f(x)$ 的图象关于 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称

C. $f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称

D. 将 $f(x)$ 图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到 $y = 2\sin 2x$ 的图象

方法归纳 【点拨】

已知 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的部分图象求其解析式, 常用如下两种方法: ①升降零点法, 由 $\omega =$

$\frac{2\pi}{T}$, 即可求出 ω . 求 φ 时, 若能求出离原点最近的右侧图象上升 (或下降) 的“零点”横坐标 x_0 , 则令 $\omega x_0 + \varphi = 0$ (或 $\omega x_0 + \varphi = \pi$), 即可求出 φ . ②代入最值法, 将最值点 (最高点、最低点) 坐标代入解析式, 再结合图形解出 ω 和 φ .

题目 3 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的大致图象如图所示, 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 $g(\frac{5\pi}{12}) =$ ()

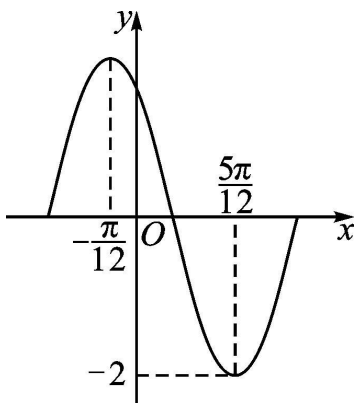
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

题目 4 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再将所得函数图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{3}{2}$ 倍, 得到函数 $g(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的图象. 已知函数 $g(x)$ 的部分图象如图所示, 则下列关于函数 $f(x)$ 的说法正确的是 ()



A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{3}$

B. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递减

C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{9}$ 对称

D. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{9}, 0)$ 成中心对称

题型八: 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 图象与性质的综合应用

1 命题角度: 函数零点问题

题目 1 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$, 其中常数 $\omega > 0$.

(1) 令 $\omega = 2$, 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 纵坐标变为原来的 2 倍, 再向上平移 1 个单位, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 求函数 $y = g(x)$ 的解析式;

(2) 若 $y = f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增, 求 ω 的取值范围;

(3) 在 (1) 的条件下的函数 $y = g(x)$, 区间 $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$) 满足: $y = g(x)$ 在 $[a, b]$ 上至少含有 20 个零点, 在所有满足条件的 $[a, b]$ 中, 求 $b - a$ 的最小值.

方法归纳 【点拨】

研究 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega \neq 0$) 的性质时, 一般将 $\omega x + \varphi$ 视为一个整体, 利用换元法和数形结合思想解题. 与三角函数相关的方程根的问题 (零点问题) 等常通过函数与方程思想化为图象交点问题, 再借助图象分析.

题目 2 设常数 a 使方程 $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = a$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上恰有五个解 x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), 则 $\sum_{i=1}^5 x_i =$ ()

A. $\frac{7\pi}{3}$

B. $\frac{25\pi}{6}$

C. $\frac{13\pi}{3}$

D. $\frac{14\pi}{3}$

题目 3 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ 在区间 $(0, \pi)$ 恰有三个极值点、两个零点, 则 ω 的取值范围是 ()

A. $[\frac{5}{3}, \frac{13}{6})$

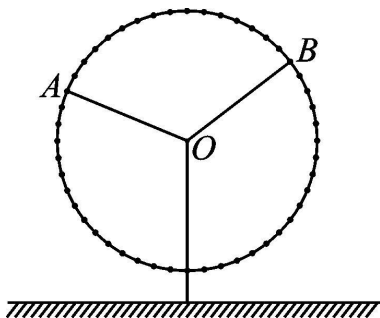
B. $[\frac{5}{3}, \frac{19}{6})$

C. $(\frac{13}{6}, \frac{8}{3}]$

D. $(\frac{13}{6}, \frac{19}{6}]$

★ 命题角度: 三角函数模型

题目 1 如图所示, 摩天轮直径为 $110m$, 最高点距离地面 $120m$, 相当于 40 层楼高, 摩天轮的圆周上均匀的安了 48 个透明座舱, 每个座舱最多可坐 8 人, 整个摩天轮可同时供 380 余人观光, 并且运行时按逆时针匀速旋转, 转一周需要 30min.



- (1) 某游客自最低点处登上摩天轮, 请问 5min 后他距离地面的高度是多少?
- (2) 若甲、乙两游客分别坐在 A, B 两个座舱里, 且他们之间间隔 15 个座舱, 求 A, B 两个座舱的直线距离;
- (3) 若游客在距离地面至少 $92.5m$ 的高度才能够获得最佳视觉效果, 请问摩天轮转动一周能有多长时间会有这种最佳视觉效果.

★ 方法归纳 【点拨】 ★

三角函数能模拟现实生活中的许多周期现象, 匀速圆周运动是比较典型的一个. 解决这类问题时, 首先寻找与角有关的信息, 确定三角函数模型; 其次搜集数据, 求出三角函数解析式, 再利用三角函数的性质解决有关问题.

题目 2 已知某海滨浴场海浪的高度 $y(m)$ 是时间 t ($0 \leq t \leq 24$, 单位: h) 的函数, 记作: $y = f(t)$, 下表是某日各时的浪高数据:

t/h	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y/m	1.5	1.0	0.5	1.0	1.5	1.0	0.5	0.99	1.5

经长期观测, $y = f(t)$ 的曲线可近似地看成是函数 $y = A \cos \omega t + b$.

- (1) 根据以上数据, 求函数 $y = A \cos \omega t + b$ 的最小正周期 T , 振幅 A 及函数表达式;
- (2) 依据规定, 当海浪高度高于 $1.25m$ 时才对冲浪爱好者开放, 请依据 (1) 的结论, 判断一天内有多少时间可供冲浪者进行运动.

2.3 解三角形

题型一: 正弦定理的应用

题目 1 【多选题】 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 则下列命题正确的是 ()

A. $\frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 C}$

B. 若 $a \cos B = b \cos A$, 则 $C = 90^\circ$

C. 若 $B = 60^\circ, b^2 = ac$, 则 $\triangle ABC$ 是等边三角形

D. “ $A > B$ ”是“ $a + \sin A > b + \sin B$ ”的充要条件

★方法归纳【点拨】★

解三角形问题,多为边和角的求值问题,这就需要根据正、余弦定理结合已知条件灵活转化边和角之间的关系.由正弦定理求角,注意利用条件判断角的范围,即确定是一解还是两解.

题目 2 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $a \cos C + \sqrt{3} a \sin C = b + c$. 则 $A =$ _____.

题目 3 在 $\triangle ABC$ 中,已知角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a = x, b = 3, B = 60^\circ$, 若 $\triangle ABC$ 有两解,则 x 的取值范围是 _____.

题型二: 余弦定理的应用

题目 1 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = \frac{2}{3}$, $AC = 4, BC = 3$, 则 $\cos B =$ ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

题目 2 在 $\triangle ABC$ 中,若 $(a - c)(\sin A + \sin C) = \sin B(b - c)$, 则 $A =$ ()

- A. 90° B. 60° C. 120° D. 150°

★方法归纳【点拨】★

边、角混合的条件,一般需要先利用正弦定理将其转化为边(或角)的条件.

题目 3 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 $\sqrt{3}$, $B = 60^\circ, a^2 + c^2 = 3ac$, 则 $b =$ _____.

题目 4 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $ab \sin C = 20 \sin B, a + c = 9$, 且 $\cos B = \frac{1}{8}$, 则 $b =$ ()

- A. $4\sqrt{2}$ B. 6 C. $3\sqrt{5}$ D. 7

题型三: 正、余弦定理的综合应用

1 命题角度: 判断三角形形状

题目 1 对于 $\triangle ABC$, 有如下命题:

- ①若 $\sin 2A = \sin 2B$, 则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形;
② $\sin A = \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 为直角三角形;
③若 $\sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2 C < 1$, 则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形.

其中所有正确命题的序号是 _____

★方法归纳【点拨】★

注意等式两边的公因式一般不要随意约掉,而要移项提取公因式,否则有可能漏掉一种形状.

题目 2 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\frac{\tan B}{b^2} = \frac{\tan C}{c^2}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ()

- A. 等腰三角形或直角三角形 B. 等腰直角三角形
C. 等腰三角形 D. 直角三角形

题目 3 在 $\triangle ABC$ 中,“ $0 < \frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} < 1$ ”是“ $\triangle ABC$ 是锐角三角形”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

2 命题角度: 计算三角形面积

题目 1 已知 $\triangle ABC$ 的三个角 A, B, C 成等差数列, 三条边 a, b, c 成等差数列, 且 $b = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

A. $\sqrt{3}$

B. 2

C. $\sqrt{5}$

D. 3

★方法归纳【点拨】★

三角形面积计算问题要选用恰当公式, 可以根据正弦定理和余弦定理进行边角互化. 面积最值问题, 常化为边的关系用基本不等式, 或化为角的关系用三角函数性质求解.

题目 2 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 3\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{3}$, $\cos C = \frac{1}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.

★3 命题角度: 最值范围问题

题目 1 【多选题】设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $c = 2$, $C = \frac{\pi}{3}$, 则下列选项正确的是 ()

A. $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$ C. $a + 2b$ 的最大值为 $\frac{4\sqrt{21}}{3}$ D. $a^2 + b^2$ 的最小值为 8

题目 2 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $\angle ADB = 120^\circ$, $AD = 2$, $CD = 2BD$. 当 $\frac{AC}{AB}$ 取得最小值时, $BD =$ _____.

★方法归纳【点拨】★

解三角形相关最值范围问题, 在近年高考中频繁考查, 常见的解题思路有: ①化为某一角的三角函数, 由三角函数性质确定范围; ②化为边的关系, 由基本不等式确定范围; ③化为关于某变量的函数, 通过求函数值域确定范围.

题目 3 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $2b\cos B = a\cos C + c\cos A$, $b = 2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是 ()

A. 1

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. 4

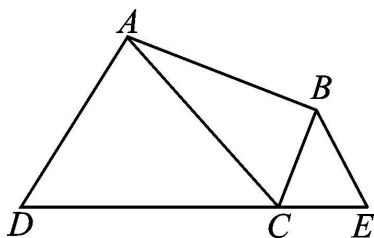
题目 4 在锐角三角形 ABC 中, 若 $\sqrt{3}\sin B + \cos B = 2$, 且 $b = 2\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 ()

A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{3}$

题目 5 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AC 上, $CD = BD = 2AD$, 则 $\frac{BC}{BA}$ 的取值范围为 _____.

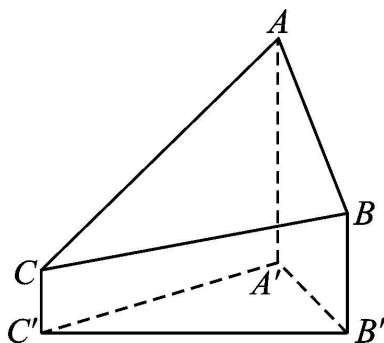
题型四: 利用正、余弦定理解决实际问题

题目 1 某环保监督组织为了监控和保护洞庭湖候鸟繁殖区域, 需测量繁殖区域内某湿地 A, B 两地间的距离 (如图), 环保监督组织测绘员在 (同一平面内) 同一直线上的三个测量点 D, C, E , 从 D 点测得 $\angle ADC = 67.5^\circ$, 从点 C 测得 $\angle ACD = 45^\circ$, $\angle BCE = 75^\circ$, 从点 E 测得 $\angle BEC = 60^\circ$, 并测得 $DC = 2\sqrt{3}$, $CE = \sqrt{2}$ (单位: km), 则 A, B 两点间的距离为 _____.



题目 2 2020 年 12 月 8 日, 中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86 (单位: m), 三角高程测量

法是珠峰高程测量方法之一. 如图是三角高程测量法的一个示意图, 现有 A, B, C 三点, 且 A, B, C 在同一水平面上的投影 A', B', C' 满足 $\angle A'C'B' = 45^\circ$, $\angle A'B'C' = 60^\circ$. 由 C 点测得 B 点的仰角为 15° , BB' 与 CC' 的差为 100; 由 B 点测得 A 点的仰角为 45° , 则 A, C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA' - CC'$ 约为 $(\sqrt{3} \approx 1.732)$ ()



- A. 346

- B. 373

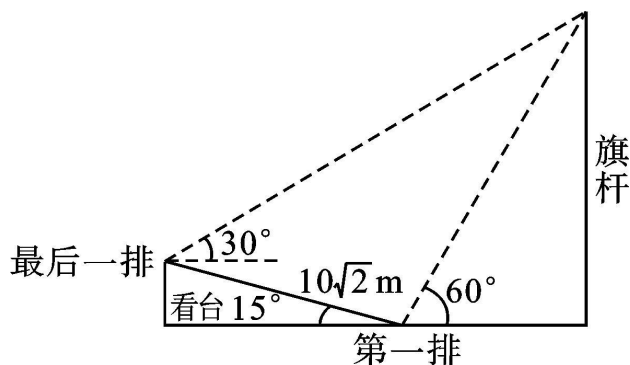
- C. 446

- D. 473

★ 方法归纳 ★ 【点拨】 ★

新高考更强调“学以致用”,解三角形问题是高中阶段较为典型的数学应用,涉及测距、测高、测角等诸多方面.

题目 3 奏唱中华人民共和国国歌需要 46s . 某校周一举行升旗仪式, 旗杆正好处在坡度为 15° 看台的某一列的正前方, 从这一列的第一排和最后一排测得旗杆顶部的仰角分别为 60° 和 30° , 第一排和最后一排的距离为 $10\sqrt{2}\text{m}$ (如图所示), 旗杆底部与第一排在同一个水平面上. 要使国歌结束时国旗刚好升到旗杆顶部, 则升旗手升旗的速度应为 ()



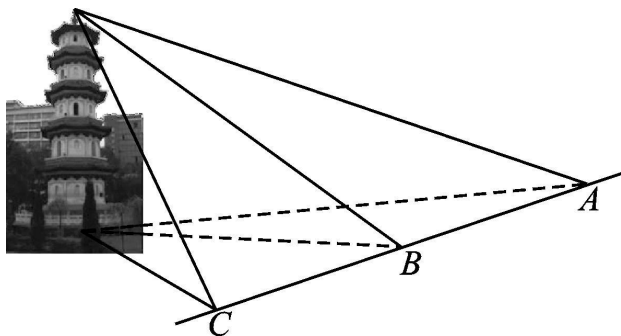
- A. $\frac{3\sqrt{3}}{23}\text{m/s}$

- B. $\frac{5\sqrt{3}}{23}\text{m/s}$

- C. $\frac{7\sqrt{3}}{23}\text{m/s}$

- D. $\frac{8\sqrt{3}}{23}\text{m/s}$

题目 4 鄂州十景之一“二宝塔”中的文星塔位于文星路与南浦路交汇处,至今四百六十多年的历史,该塔为八角五层楼阁式砖木混合结构塔.现在在塔底共线三点 A, B, C 处分别测得塔顶的仰角为 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$, 且 $AB = BC = \frac{70\sqrt{6}}{9}m$, 则文星塔高为 ()



- A. $20m$

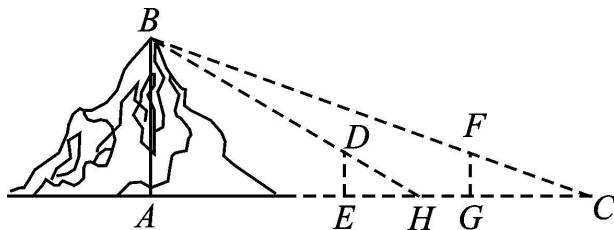
- B. $\frac{70}{3}m$

- C. $\frac{80}{3}m$

- D.
- $30m$

题型五：学科素养·传统文化背景下的解三角形问题

题目 1 魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作，其中第一题是测量海岛的高. 如图，点 E, H, G 在水平线 AC 上， DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”， EG 称为“表距”， GC 和 EH 都称为“表目距”， GC 与 EH 的差称为“表目距的差”. 则海岛的高 $AB =$ ()



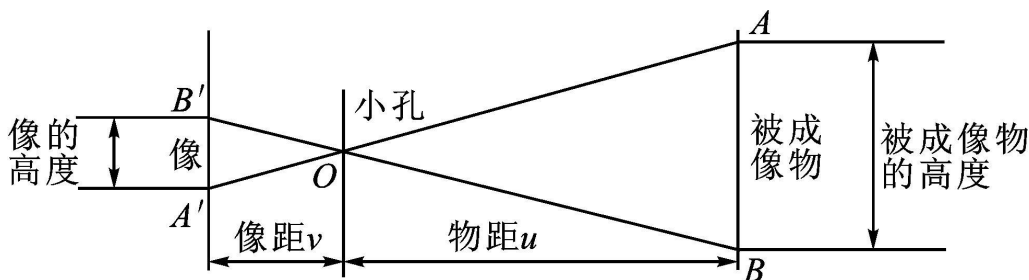
A. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$
 C. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$

B. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$
 D. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$

方法归纳 【点拨】

近年高考卷中显著增强了传统文化渗透，尤其是记载于各类古代书籍中的测量技术，体现了古人的智慧及数学的应用价值. 解决这类问题，重在理解题意，同时需要加以强化训练，以提升自己的阅读理解能力与文化素养.

题目 2 《墨经·经说下》中有这样一段记载：“光之人，煦若射. 下者之人也高，高者之人也下. 足蔽下光，故成景于上；首蔽上光，故成景于下. 在远近有端，与于光，故景库内也.” 这对小孔成像有了第一次的描述. 如图为一次小孔成像实验，已知物距：像距 $= 6:1$ ， $OA = OB = 12$ ， $\cos \angle A'OB' = \frac{23}{32}$ ，则像高为 ()



A. 1

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{\sqrt{21}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{41}}{2}$

2.4 三角函数与解三角形的综合问题

题型一：三角函数的图象和性质

题目 1 已知向量 $a = (2\cos\omega x, \sin\omega x)$ ， $b = (\cos\omega x, 2\sqrt{3}\cos\omega x)$ ($0 < \omega < 1$)，函数 $f(x) = a \cdot b$ ，直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象上各点的横坐标缩短到原来的一半，然后再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $g(x)$ 的图象，当 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时，求函数 $g(x)$ 的最值.

方法归纳 【点拨】

三角函数的图象与性质的综合问题，常将三角函数的单调性、周期性、奇偶性、最值及图象、三角恒等变换等综合起来考查，有时也会与向量、解三角形等综合，属于基础题型，难度一般不高.

题目 2 设函数 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) + a$ 的最小值是 -1 .

(1) 求 a 的值及 $f(x)$ 的对称中心;

(2) 将函数 $f(x)$ 图象的横坐标压缩为原来的一半 (纵坐标不变), 再向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 得到 $g(x)$ 的图象, 若 $g(x) \geq -\frac{1}{2}$, 求 x 的取值范围.

题型二: 正余弦定理的综合应用

题目 1 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 分别以 a, b, c 为边长的三个正三角形的面积依次为 S_1, S_2, S_3 , 已知 $S_1 - S_2 + S_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin B = \frac{1}{3}$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $\sin A \sin C = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 求 b .

方法归纳 【点拨】

解三角形问题中, 正余弦定理的综合应用问题是基本问题, 也是常考问题, 要依据题目要求, 灵活应用正余弦定理进行边角互化.

题目 2 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C \sin(A - B) = \sin B \sin(C - A)$.

(1) 证明: $2a^2 = b^2 + c^2$;

(2) 若 $a = 5$, $\cos A = \frac{25}{31}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

题型三: 解三角形与恒等变换的综合问题

题目 1 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a(2 - \cos C) = c(2\cos B + \cos A)$.

(1) 求 $\cos C$ 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 且 $\sin(A - B) = 2\sin 2B - \sin(A + B)$, 求 c 的值.

方法归纳 【点拨】

在含有边角关系的等式中, 利用正弦定理的变形 $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, 可直接将等式两边的边化为角; 也能利用余弦定理的变形如 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 将角化为边. 在三角形中利用三角变换求三角式的值时, 要注意角的范围的限制.

题目 2 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $2a\cos B = c - a$.

(1) 求 $\frac{B}{A}$;

(2) 若 $A < C < B$, 且 $\triangle ABC$ 的三条边为连续的自然数, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

题型四: 开放探索问题

题目 1 在① $ac = \sqrt{3}$, ② $c\sin A = 3$, ③ $c = \sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求 c 的值; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.

问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sin A = \sqrt{3}\sin B$, $C = \frac{\pi}{6}$, ____?

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

方法归纳 【点拨】

本例具有创新开放性及存在探索性, 解此类结构不良问题, 关键在于寻求更简洁 (更熟悉) 的解题路径, 需要对备选条件的推理量及计算量进行判断分析, 进而还原为结构良好试题求解.

题目 2 在① $2b + c = 2a\cos C$; ② $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}(a^2 - b^2 - c^2)}{4}$; ③ $c\sin A = 3a\sin B$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求 $\triangle ABC$ 的周长; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.
问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a = \sqrt{3}b, c = 1$, _____?
注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

题型五: 平面图形中的计算问题

题目 1 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD = CD = BD = 1$.

- (1) 若 $AB = \frac{3}{2}$, 求 BC ;
- (2) 若 $AB = 2BC$, 求 $\cos \angle BDC$.

方法归纳 【点拨】

与传统解三角形问题不同的是, 新高考中强化了对分析问题能力的考查.

题目 2 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2AC$, $\angle BAC$ 的平分线交 BC 边于 D 点.

- (1) 证明: $BC = 3DC$.
- (2) 若 $AD = AC$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{7}$, 求 BC 的长.

题型六: 最值范围问题

题目 1 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $(b - c) \cdot \sin B = b \sin(A - C)$.

- (1) 求角 A ;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 求 $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{S}$ 的取值范围.

方法归纳 【点拨】

解三角形中的取值范围问题时, 要着眼于边长之间的关系, 可以将边的关系转化为角的关系, 也可以将角的关系转化为边的关系. 解这类问题的主要思路是: 全部转化为角的关系, 建立函数关系式, 借助于三角函数的有界性, 从而求出范围或最值, 或利用余弦定理以及基本不等式求范围或最值.

题目 2 [2023 届江西“红色十校”一联] 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $2(a\cos C + c\cos A)\sin B = b(\sin A + \sin C)$.

- (1) 求证: a, b, c 依次成等差数列;
- (2) 若 $a + c = 4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

题目 3 在锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $b\sin A = a^2 - (b - c)^2$.

- (1) 求 $\tan A$;
- (2) 求 $\frac{a^2}{b^2 + c^2}$ 的取值范围.



4. 同步检测

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题目 1 角 $-\frac{29}{12}\pi$ 的终边所在的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

题目 2 角 α 的终边过点 $P(3a, 4)$, 若 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 则 a 的值为 ()

- A. 1 B. -1 C. ± 1 D. ± 5

题目 3 若扇形圆心角的弧度数为 2, 且扇形弧所对的弦长也是 2, 则这个扇形的面积为 ()

- A. $\frac{1}{\sin^2 1}$ B. $\frac{2}{\sin^2 2}$ C. $\frac{1}{\cos^2 1}$ D. $\frac{2}{\cos^2 2}$

题目 4 已知 $\frac{\sin(\theta - \pi) + 2\cos\theta}{\sin(\theta + \frac{5\pi}{2}) + 2\cos(\theta - \frac{\pi}{2})} = 1$, 则 $\tan\theta =$ ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. 3 D. $\frac{1}{3}$

题目 5 若 $\tan\theta = 2$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\frac{\sin\theta(1 - \sin 2\theta)}{\sin\theta - \cos\theta} =$ ()

- A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $-\frac{2}{5}$ D. $-\frac{6}{5}$

题目 6 函数 $f(x) = \cos x \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 的最小正周期为 ()

- A. 4π B. 2π C. π D. $\frac{\pi}{2}$

题目 7 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期是 π , 若将该函数的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的函数图象关于点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称, 则函数 $f(x)$ 的解析式是 ()

- A. $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ B. $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$
C. $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ D. $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$

题目 8 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状一定是 ()

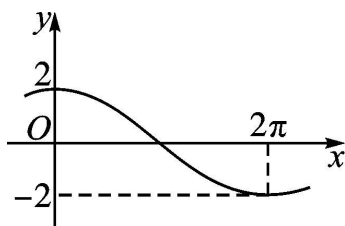
- A. 正三角形 B. 直角三角形 C. 等腰三角形 D. 等腰直角三角形

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

题目 9 下列各式的值计算正确的是 ()

- A. $\sin 30^\circ \cos 0^\circ = 0$
 B. $-\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{7}{6}\pi = -1$
 C. $\sqrt{3}(\tan 55^\circ - \tan 25^\circ) - \tan 55^\circ \tan 25^\circ = 1$
 D. $\sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{2}} = \frac{1}{2}$

题目 10 如图是函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的部分图象, 则 ()



- A. $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$
 B. $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$
 C. $f(x) = -2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$
 D. $f(x) = 2\cos\frac{x}{2}$

题目 11 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $b\sin A = (3b - c)\sin B$, 且 $\cos A = \frac{1}{3}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $a + c = 3b$
 B. $\tan A = 2\sqrt{2}$
 C. $\triangle ABC$ 的周长为 $4c$
 D. $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{2}}{9}a^2$

题目 12 下列说法正确的是 ()

- A. 函数 $f(x) = |\cos x|$ 的最小正周期为 2π
 B. 函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3}\cos x - \frac{3}{4}$ 的最大值是 1
 C. 若函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$), 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) \leq \left|f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|$, 并且 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上不单调, 则 ω 的最小值是 4
 D. 若函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\frac{\omega x}{2} \cos\frac{\omega x}{2} + \cos^2\frac{\omega x}{2} - \frac{1}{2}$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值可以是 $\frac{3}{2}$

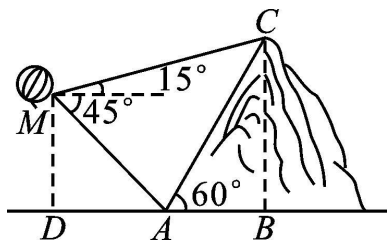
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

题目 13 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) =$ _____.

题目 14 已知函数 $f(x) = 2\cos(2x + \varphi)$ 图象的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{8}$. 若 $0 < \varphi < 4\pi$, 则 φ 的最大值为 _____.

题目 15 若 $3\sin\alpha - \sin\beta = \sqrt{10}$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos 2\beta =$ _____.

题目 16 如图,在离地面高 800m 的热气球上,观测到山顶 C 处的仰角为 15° ,山脚 A 处的俯角为 45° ,已知 $\angle BAC = 60^\circ$,则山的高度 BC 为 _____ m .



四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

题目 17 (10 分) 已知 $\tan \theta = \frac{3}{2}$.

(1) 求 $\frac{\sin \theta (\sin \theta + \cos \theta)}{\cos^2 \theta - 1}$ 的值;

(2) 求 $\frac{2\sin^3(\pi + \theta)\tan(3\pi - \theta)\sin(-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta)}$ 的值.

题目 18 (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin 2C = \sqrt{3} \sin C$.

(1) 求 C ;

(2) 若 $b = 6$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

题目 19 (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a = \sqrt{6}$, $b = 2c$, $\cos A = -\frac{1}{4}$.

(1) 求 c 的值;

(2) 求 $\sin B$ 的值;

(3) 求 $\sin(2A - B)$ 的值.

题目 20 (12 分) 某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象时,列表并填入了部分数据,如下表:

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x + \varphi)$	0	5		-5	0

(1) 请将上表数据补充完整,写出函数 $f(x)$ 的解析式,并画出 $y = f(x)$ 的简图;

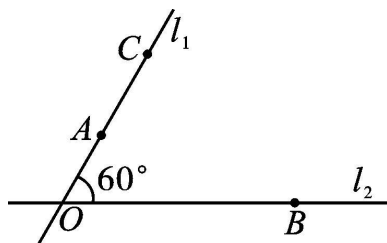
(2) 将 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平移 θ ($\theta > 0$) 个单位长度,得到 $y = g(x)$ 的图象. 若 $y = g(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$, 求 θ 的最小值.

题目 21 (12 分) 设 $f(x) = \sin x \cos x - \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $f\left(\frac{A}{2}\right) = 0, a = 1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

题目 22 (12分) 如图, 有两条相交成 60° 角的直路 l_1, l_2 , 交点是 O , 警务岗 A, B 分别在 l_1, l_2 上, 警务岗 A 离 O 点 1km , 警务岗 B 离 O 点 3km . 若警员甲从 A 出发沿 OA 方向, 警员乙从 B 出发沿 BO 方向, 同时以 4km/h 的速度沿途巡逻.



(1) 当警员甲行至点 C 处时, $\angle OBC = 45^\circ$, 求 OC 的距离;

(2) $t\text{h}$ 后甲乙两人的距离是多少? 什么时候两人的距离最短?