

值域 12 类归纳



1. 一、热点题型归纳

题型一：值域基础 1：幂函数求值域

题目 1 若函数 $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$) 的定义域和值域分别为集合 A, B ,

且集合 $\{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ 表示的平面区域是边长为 1 的正方形, 则 $b + c$ 的最大值为 _____.

【答案】5

【详解】由题可知, $a < 0, b^2 - 4ac > 0$, 则 $A = \left[\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right], B = \left[0, \sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a}} \right]$,

因为 $\{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ 表示的平面区域是边长为 1 的正方形, 所以 $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-a} = \sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a}} = 1$, 可得 $a = -4, b^2 + 16c = 16, c = 1 - \frac{b^2}{16}$, 所以 $b + c = -\frac{b^2}{16} + b + 1 = -\frac{1}{16}(b - 8)^2 + 5$, 当 $b = 8$ 时有最大值 5.



方法归纳 基本规律

★ 1. 幂函数主要考察一元二次函数

★ 2. 二次函数在进行讨论的时候要首先考虑二次项系数为 0 的情况, 然后根据题意, 去讨论开口或者讨论 Δ .

跟踪训练 1 设二次函数 $f(x) = mx^2 - 2x + n$ ($m, n \in \mathbf{R}$), 若函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 且 $f(1) \leq 2$, 则

$\frac{m^2}{n^2 + 1} + \frac{n^2}{m^2 + 1}$ 的取值范围为 _____.

【答案】 $[1, 13]$

【详解】二次函数 $f(x)$ 对称轴为 $x = \frac{1}{m}$,

$\therefore f(x)$ 值域为 $[0, +\infty)$,

$\therefore m > 0$ 且 $f\left(\frac{1}{m}\right) = 0 \Rightarrow m \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^2 - \frac{2}{m} + n = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{m} \Rightarrow mn = 1, n > 0$.

$f(1) \leq 2 \Rightarrow m - 2 + n \leq 2 \Rightarrow m + n \leq 4$,

$\therefore \frac{m^2}{n^2 + 1} + \frac{n^2}{m^2 + 1} = \frac{m^2(m^2 + 1) + n^2(n^2 + 1)}{(m^2 + 1)(n^2 + 1)} = \frac{m^4 + n^4 + m^2 + n^2}{m^2n^2 + m^2 + n^2 + 1}$

$= \frac{(m^2 + n^2)^2 - 2m^2n^2 + m^2 + n^2}{m^2 + n^2 + 2} = \frac{(m^2 + n^2)^2 + (m^2 + n^2) - 2}{m^2 + n^2 + 2} = \frac{(m^2 + n^2 + 2)(m^2 + n^2 - 1)}{m^2 + n^2 + 2} = m^2 + n^2 - 1$

$\therefore m^2 + n^2 - 1 \geq 2mn - 1 = 1, m^2 + n^2 - 1 = (m + n)^2 - 3 \leq 4^2 - 3 = 13$,

$\therefore \frac{m^2}{n^2 + 1} + \frac{n^2}{m^2 + 1} \in [1, 13]$. 故答案为: $[1, 13]$.

跟踪训练 2 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 在 $x \in (5 - m^2, m - 1)$ 的值域为 $[a, b]$ ($b > a$), 则实数 m 的取值范围为 _____.

【答案】 $(\sqrt{6}, \sqrt{7}]$

【详解】由解析式知: $f'(x) = 3(x^2 - 1)$,

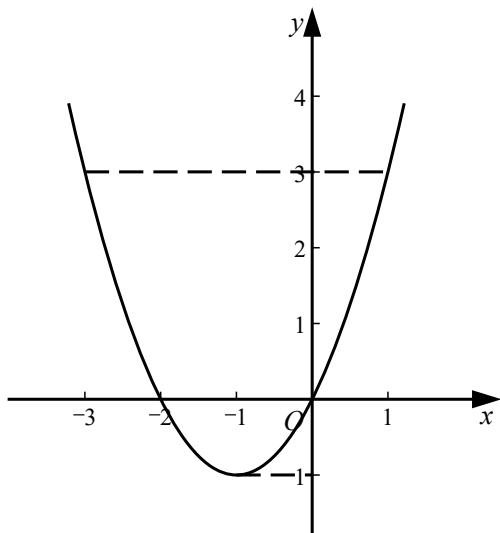
$\therefore (-\infty, -1), (1, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 单调递增; $(-1, 1)$ 上 $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 单调递减;

$\therefore f(x)$ 有极大值 $f(-1) = 2$, 极小值 $f(1) = -2$,

由题意知: $a = -2, b = 2$, 即有:
$$\begin{cases} m-1 > 5-m^2 \\ 5-m^2 < -1 \\ m-1 > 1 \\ f(5-m^2) \geq -2 \\ f(m-1) \leq 2 \end{cases}, \text{解得 } \sqrt{6} < m \leq \sqrt{7}, \text{故答案为: } (\sqrt{6}, \sqrt{7}]$$

跟踪训练 3 已知函数 $y = x^2 + 2x$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[-1, 3]$, 则 $a \cdot b$ 的最大值为 _____.

【答案】3



【详解】

画出函数 $f(x) = x^2 + 2x$ 的图像可知, 要使其在闭区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[-1, 3]$,

由于有且仅有 $f(-1) = -1$, 所以 $-1 \in [a, b] \Rightarrow a \leq -1 \leq b$,

而 $f(-3) = f(1) = 3$, 所以有 $[a, b] \subseteq [-3, 1], a = -3$ 或 $b = 1$,

又 $\because a < 0, a \cdot b$ 的最大值为正值时, $b < 0$,

$\therefore b \neq 1, a = -3$,

所以 $a \cdot b = -3b$, 当 b 取最小值时, $a \cdot b$ 有最大值.

又 $\because b \geq -1$,

$\therefore a \cdot b$ 的最大值为 $(-3) \times (-1) = 3$;

故答案为: 3.

题型二: 值域基础 2: 指数函数求值域

题目 1 函数 $f(x) = a + \frac{b}{e^x + 1} (a, b \in \mathbb{R})$ 是奇函数, 且图象经过点 $(\ln 3, \frac{1}{2})$, 则函数 $f(x)$ 的值域为 _____

【答案】 $(-1, 1)$

【详解】 函数是奇函数, 则: $f(0) = a + \frac{b}{e^0 + 1} = a + \frac{b}{2} = 0$ ①,

结合函数所过的点可得: $f(\ln 3) = a + \frac{b}{e^{\ln 3} + 1} = a + \frac{b}{4} = \frac{1}{2}$ ②, ①②联立可得: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$, 则函数的解析

式为: $f(x) = 1 + \frac{-2}{e^x + 1}$, 结合指数函数的性质可得: $e^x + 1 > 1, \frac{-2}{e^x + 1} \in (-2, 0), f(x) = 1 + \frac{-2}{e^x + 1} \in (-1, 1)$.

故答案为: $(-1, 1)$.

★方法归纳 基本规律★

1、底数讨论单增单减讨论。

2、“一点一线”伴随。

跟踪训练 1 函数 $f(x) = 3^{-x^2+1} (x \in R)$ 的值域为 _____.

【答案】 $(0, 3]$.

【详解】 试题分析: 设 $t = -x^2 + 1$, 因为 $x \in R$ 所以 $t \leq 1$ 又函数 $y = 3^x$ 为增函数, 有 $0 < 3^t \leq 3^1$ 所以函数的值域为 $(0, 3]$.

跟踪训练 2 关于函数 $f(x) = \frac{1}{4^x + 2}$ 的性质, 有如下四个命题:

- ① 函数 $f(x)$ 的定义域为 R ;
- ② 函数 $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$;
- ③ 方程 $f(x) = x$ 有且只有一个实根;
- ④ 函数 $f(x)$ 的图象是中心对称图形.

其中正确命题的序号是 _____.

【答案】 ①③④

【分析】 ① 可以利用指数函数的值域得到 $4^x > 0$, 从而求出定义域; ② 利用 $4^x > 0$ 得到值域; ③ 构造函数, 求导, 求出单调性, 结合零点存在性定理求出答案; ④ 求出 $f(x+1) + f(-x) = \frac{1}{2}$, 从而得到函数 $f(x)$ 关于点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 对称, 故 $f(x)$ 的图象是中心对称图形.

【详解】 ① 因为 $4^x > 0$, 所以函数 $f(x) = \frac{1}{4^x + 2}$ 的定义域为 R , ① 正确;

② 因为 $4^x > 0$, 所以函数 $f(x) = \frac{1}{4^x + 2}$ 的值域为 $(0, \frac{1}{2})$, ② 错误;

③ 令 $g(x) = \frac{1}{4^x + 2} - x$, 则 $g'(x) = -\frac{4^x \ln 4}{(4^x + 2)^2} - 1 < 0$ 恒成立, 故 $g(x) = \frac{1}{4^x + 2} - x$ 单调递减, 又 $g(0) = \frac{1}{3} > 0$, $g(1) = \frac{1}{6} - 1 < 0$, 故由零点存在性定理及函数单调性可知: 方程 $f(x) = x$ 只有一个实根, ③ 正确;

④ $f(x+1) + f(-x) = \frac{1}{4^{x+1} + 2} + \frac{1}{4^{-x} + 2} = \frac{1}{2}$, 所以函数 $f(x)$ 关于点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 对称, ④ 正确.

故答案为: ①③④

跟踪训练 3 已知函数 $f(x) = 4^x - 2^{x+1} + 4$, $x \in [-1, 1]$, 则函数 $y = f(x)$ 的值域为 ().

- A. $[3, +\infty)$ B. $[3, 4]$ C. $[3, \frac{13}{4}]$ D. $[\frac{13}{4}, 4]$

【答案】 B

【分析】 根据给定条件换元, 借助二次函数在闭区间上的最值即可作答.

依题意, 函数 $f(x) = (2^x)^2 - 2 \times 2^x + 4$, $x \in [-1, 1]$, 令 $2^x = t$, 则 $t = 2^x$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上单调递增, 即 $\frac{1}{2} \leq t \leq 2$,

于是有 $y = t^2 - 2t + 4 = (t-1)^2 + 3$, 当 $t = 1$ 时, $y_{\min} = 3$, 此时 $x = 0$, $f(x)_{\min} = 3$,

当 $t = 2$ 时, $y_{\max} = 4$, 此时 $x = 1$, $f(x)_{\max} = 4$,

所以函数 $y = f(x)$ 的值域为 $[3, 4]$.

故选: B

题型三: 值域基础 3: 对数函数求值域

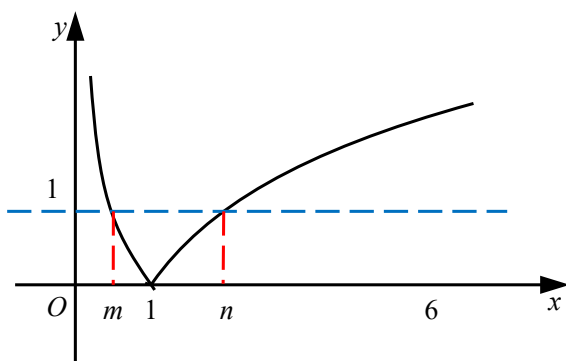
题目 1 设函数 $f(x) = |\log_a x|$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的定义域为 $[m, n]$ ($m < n$), 值域为 $[0, 1]$, 若 $n - m$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$, 则实数 a 的值是 _____.

【答案】 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$

【分析】 根据题意 $f(x) = |\log_a x|$, 利用函数图像的变换, 作出 $f(x) = |\log_a x|$ 的图像, 根据图像特点, 结合题

意,分 $0 < a < 1$ 和 $a > 1$ 进行讨论,列出关于 a 的等式关系,即可求解出结果.

【详解】如图所示,做出 $f(x) = |\log_a x|$ 的图像,



若 $0 < a < 1$, 当 $n = 1$ 时, $\log_a m = 1$ 时, $n - m = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$.

若 $a > 1$ 时, 当 $n = 1$ 时, $\log_a m = -1$, $n - m = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$. 综上所述, $a = \frac{3}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$

★方法归纳 基本规律★

1. 对数函数中 $y = |\log_a x|$ 要注意 $f(b) = f(c)$ 时, $bc = 1$ 这个特征。

2. 对数函数源于指数函数, 所以和指数函数互为反函数。

跟踪训练 1 若函数 $f(x) = \log_2[kx^2 + (2k-1)x + \frac{1}{4}]$ 的值域为 R , 则实数 k 的取值范围为_____.

【答案】 $[0, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty)$

【分析】将问题转化为 $kx^2 + (2k-1)x + \frac{1}{4}$ 能取尽所有的正数, 然后再分 $k=0$ 和 $k \neq 0$ 两种情况, 并结合函数的性质求解即可.

【详解】∵ 函数 $f(x) = \log_2[kx^2 + (2k-1)x + \frac{1}{4}]$ 的值域为 R ,

∴ $g(x) = kx^2 + (2k-1)x + \frac{1}{4}$ 能取尽所有的正数.

① 当 $k=0$ 时, $g(x) = -x + \frac{1}{4}$, 能取尽所有的正数, 符合题意;

② 当 $k \neq 0$ 时, 要使 $g(x) = kx^2 + (2k-1)x + \frac{1}{4}$ 能取尽所有的正数,

则需满足 $\begin{cases} k > 0 \\ \Delta = (2k-1)^2 - k = 4k^2 - 5k + 1 \geq 0 \end{cases}$, 解得 $0 < k \leq \frac{1}{4}$ 或 $k \geq 1$,

综上可得 $0 \leq k \leq \frac{1}{4}$ 或 $k \geq 1$,

∴ 实数 k 的取值范围为 $[0, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty)$.

跟踪训练 2 已知函数 $f(x) = \log_3 \frac{2x^2 + bx + c}{x^2 + 1}$ 的值域为 $[0, 1]$, 则 b 与 c 的和为_____.

【答案】4 或 0

【详解】试题分析: 本题是已知函数值域, 求参数值问题, 可根据题意知函数定义域为 R , 由值域反过来

求, 即由已知得 $\frac{2x^2 + bx + c}{x^2 + 1}$ 的值域是 $[1, 3]$, 从而有 $\begin{cases} \frac{2x^2 + bx + c}{x^2 + 1} \geq 1 \\ \frac{2x^2 + bx + c}{x^2 + 1} \leq 3 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x^2 + bx + c - 1 \geq 0 \\ x^2 - bx + 3 - c \geq 0 \end{cases}$, 注意两个不

等式中等号一定成立, 因此两式的判别式为 0, 由此可求得 b, c 值.

试题解析: 因为 $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$,

$$\text{即 } 0 \leq \log_3 \frac{2x^2 + bx + c}{x^2 + 1} \leq 1, \text{ 所以 } \begin{cases} \frac{2x^2 + bx + c}{x^2 + 1} \geq 1, \\ \frac{2x^2 + bx + c}{x^2 + 1} \leq 3 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x^2 + bx + c - 1 \geq 0, \\ x^2 - bx + 3 - c \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = b^2 - 4(c-1) \geq 0, \\ \Delta_2 = b^2 - 4(3-c) \geq 0, \end{cases} \text{ 当且仅当 } \begin{cases} \Delta_1 = 0, \\ \Delta_2 = 0 \end{cases} \text{ 时, } 0 \leq \frac{2x^2 + bx + c}{x^2 + 1} \leq 1 \text{ 取等号.}$$

$$\text{解方程组可得 } \begin{cases} b=2 \\ c=2 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} b=-2 \\ c=2 \end{cases},$$

跟踪训练 3 已知函数 $f(x) = \lg(ax^2 + x + 1)$. 设命题 $p: f(x)$ 的定义域为 R , 命题 $q: f(x)$ 的值域为 R . 若 $p \vee q$ 为真, $p \wedge q$ 为假, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(\frac{1}{4}, +\infty)$

B. $[0, \frac{1}{4}]$

C. $[0, +\infty)$

D. $(0, +\infty)$

【答案】C

【分析】根据一元二次不等式恒成立和二次函数值域可求得 p, q 为真命题时 a 的取值范围, 根据 $p \vee q$ 和 $p \wedge q$ 的真假性可知 p, q 一真一假, 分类讨论可得结果.

若命题 p 为真, 则 $ax^2 + x + 1 > 0$ 在 R 上恒成立, $\therefore \begin{cases} a > 0 \\ 1 - 4a < 0 \end{cases}, \therefore a \in (\frac{1}{4}, +\infty)$;

若命题 q 为真, 则 $y = ax^2 + x + 1$ 的值域包含 $(0, +\infty)$,

则 $a = 0$ 或 $\begin{cases} a > 0 \\ 1 - 4a \geq 0 \end{cases}, \therefore a \in [0, \frac{1}{4}]$;

$\therefore p \vee q$ 为真, $p \wedge q$ 为假, $\therefore p, q$ 一真一假,

若 p 真 q 假, 则 $a \in (\frac{1}{4}, +\infty)$; 若 p 假 q 真, 则 $a \in [0, \frac{1}{4}]$;

综上所述: 实数 a 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

故选: C.

题型四: 值域基础 4: 分式 (类反比例) 型函数求值域

题目 1 已知 a, b, c 为非零实数, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, x \in R$, 且 $f(2) = 2, f(3) = 3$. 若当 $x \neq -\frac{d}{c}$ 时, 对于任意实数 x , 均有 $f(f(x)) = x$, 则 $f(x)$ 值域中取不到的唯一的实数是 _____.

【答案】 $\frac{5}{2}$

【详解】试题分析: 因为当 $x \neq -\frac{d}{c}$ 时, 对于任意实数 x , 均有 $f[f(x)] = x$, 所以 $\frac{a \times \frac{ax+b}{cx+d} + b}{c \times \frac{ax+b}{cx+d} + d} = x$, 即

$(a+d)cx^2 + (d^2 - a^2)x - b(a+d) = 0$, 因为 $(a+d)cx^2 + (d^2 - a^2)x - b(a+d) = 0$ 对 $x \neq -\frac{d}{c}$ 恒成立, 所以 $a+d=0$ 且 $d^2 - a^2 = 0$, 所以 $d = -a$, 因为 $f(2) = 2, f(3) = 3$, 所以 2 和 3 是方程 $\frac{ax+b}{cx+d} = x$ 的两个根, 即 2 和

3 是方程 $cx^2 + (d-a)x - b = 0$ 的两个根, 所以 $\frac{a-d}{c} = 5, -\frac{b}{c} = 6$, 由 $\begin{cases} d = -a \\ \frac{a-d}{c} = 5 \\ -\frac{b}{c} = 6 \end{cases}$ 得: $\begin{cases} a = \frac{5}{2}c \\ b = -6c \\ d = -\frac{5}{2}c \end{cases}$, 所以 $f(x) = \frac{\frac{5}{2}cx + b}{cx - \frac{5}{2}c}$

$= \frac{\frac{5}{2}cx - 6c}{cx - \frac{5}{2}c} = \frac{5x - 12}{2x - 5} = \frac{5}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x - 5}$, 即 $f(x)$ 取不到 $\frac{5}{2}$ 这个数, 所以 $f(x)$ 值域中取不到的唯一的实数是

$\frac{5}{2}$, 所以答案应填: $\frac{5}{2}$.

★方法归纳★ 基本规律

1. 分离常数,通过“左加右减上加下减”可求得分式函数的对称中心。

2. 特殊的,形如形如 $y = \frac{a^x + m}{a^x + 1}$ 对称中心为 $(0, \frac{1+m}{2})$

3. 注意“水平渐近线和竖直渐近线”

跟踪训练 1 设 $x \in R$, 函数 $INT(x)$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $INT(-0.1) = -1$, $INT(2.8) = 2$, 若函数

$$f(x) = \frac{2-x^2}{x^2+1}, \text{ 则函数 } y = INT(f(x)) \text{ 的值域是 ()}$$

- A. $\{2\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{0, 1\}$

【答案】C

【分析】 $f(x) = -1 + \frac{3}{x^2+1}$ 可得 $-1 < f(x) \leq 2$, 分 $-1 < f(x) < 0$, $0 \leq f(x) < 1$, $1 \leq f(x) < 2$, $f(x) = 2$

根据定义可得答案.

$$f(x) = \frac{2-x^2}{x^2+1} = \frac{3-(x^2+1)}{x^2+1} = -1 + \frac{3}{x^2+1}, \text{ 因为 } x^2+1 \geq 1, \text{ 所以 } 0 < \frac{3}{x^2+1} \leq 3,$$

所以 $-1 < f(x) \leq 2$, 当 $-1 < f(x) < 0$ 时, $y = INT(f(x)) = -1$;

当 $0 \leq f(x) < 1$ 时, $y = INT(f(x)) = 0$;

当 $1 \leq f(x) < 2$ 时, $y = INT(f(x)) = 1$;

当 $f(x) = 2$ 时, $y = INT(f(x)) = 2$, 所以函数 $y = INT(f(x))$ 的值域为 $\{-1, 0, 1, 2\}$,

故选: C.

跟踪训练 2 定义区间 $[x_1, x_2]$ 长度 $x_2 - x_1 (x_2 > x_1)$ 为, 已知函数 $f(x) = \frac{(a^2+a)x-1}{a^2x} (a \in R, a \neq 0)$ 的定义域与值域都是 $[m, n]$, 则区间 $[m, n]$ 取最大长度时 a 的值为 _____.

【答案】3

【分析】 先分析函数单调性, 根据单调性结合值域列方程, 转化为对应一元二次方程根的情况, 再根据求根公式求 $[m, n]$ 长度, 根据二次函数性质求其最大值, 即得 a 的值.

【详解】 因为 $f(x) = \frac{(a^2+a)x-1}{a^2x} = \frac{a+1}{a} - \frac{1}{a^2x}$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上都是单调递增函数, 所以 $m < n < 0$ 或 $0 < m < n$

$$\text{因为值域是 } [m, n], \text{ 所以 } m = \frac{a+1}{a} - \frac{1}{a^2m}, n = \frac{a+1}{a} - \frac{1}{a^2n},$$

即 m, n 为方程 $x = \frac{a+1}{a} - \frac{1}{a^2x}, a^2x^2 - (a^2+a)x + 1 = 0$ 两个不同的实根,

所以 $\Delta = (a^2+a)^2 - 4a^2 > 0 \therefore a > 1$ 或 $a < -3$

$$[m, n] \text{ 长度为 } \frac{\Delta}{a^2} = \frac{\sqrt{(a^2+a)^2 - 4a^2}}{a^2} = \sqrt{1 + \frac{2}{a} - \frac{3}{a^2}} = \sqrt{-3\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}}$$

所以当 $\frac{1}{a} = \frac{1}{3}, a = 3$ 时, $[m, n]$ 长度取最大值,

故答案为: 3

跟踪训练 3 关于函数 $f(x) = \frac{2x}{1+|x|} (x \in R)$ 的如下结论:

- ① $f(x)$ 是奇函数; ② 函数 $f(x)$ 的值域为 $(-2, 2)$;
③ 若 $x_1 \neq x_2$, 则一定有 $f(x_1) \neq f(x_2)$; ④ 函数 $g(x) = f(x) - 3x$ 在 R 上有三个零点.
其中正确结论的序号有 _____. (请将你认为正确的结论的序号都填上)

【答案】①②③

【分析】根据函数的解析式，逐一判断以下结论是否正确。

【详解】函数 $f(x)$ 的定义域为 R ，定义域关于原点对称， $f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$ ， $f(-x) = \frac{-2x}{1+|x|}$ ，

所以 $f(-x) = -f(x)$ ， $f(x)$ 是奇函数，①正确；当 $x > 0$ 时， $f(x) = \frac{2x}{1+x} = \frac{2}{1+\frac{1}{x}} \in (0, 2)$ ，

因为 $f(x)$ 是奇函数，当 $x < 0$ 时， $f(x) \in (-2, 0)$ ，又 $f(0) = 0$ ，所以函数 $f(x)$ 的值域为

$(-2, 2)$ ，②正确；当 $x > 0$ 时， $f(x) = \frac{2x}{1+x} = \frac{2}{1+\frac{1}{x}}$ ，函数在 $(0, +\infty)$ 上递增，因为 $f(x)$ 是奇函数，所以

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增，故若 $x_1 \neq x_2$ ，则一定有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，

③正确；由方程 $g(x) = f(x) - 3x = 0$ ，得 $x = 0$ 或 $\frac{2}{1+|x|} = 3$ ，显然方程 $\frac{2}{1+|x|} = 3$ 无实解，故函数 $g(x) = f(x) - 3x$ 在 R 上有一个零点，④不正确；综上，正确结论的序号有①②③。

题型五：值域基础5：“对钩”与“双曲”函数求值域

题目 1 已知定义在 $(0, 3]$ 上的函数 $f(x) = x + \frac{1-a+b}{x+1} + a - 1$ 的值域为 $[4, 5]$ ，若 $b - a \in (-1, 5)$ ，则 $a + b$ 的值为 _____。

【答案】7

将函数变形为 $f(x) = x + 1 + \frac{1-a+b}{x+1} + a - 2$ ，令 $t = x + 1 \in (1, 4]$ ， $g(t) = t + \frac{1-a+b}{t} + a - 2$ ，由 $1 - a + b \in (0, 6)$ ，利用对勾函数的性质求解。

【详解】因为 $f(x) = x + \frac{1-a+b}{x+1} + a - 1 = x + 1 + \frac{1-a+b}{x+1} + a - 2$ ，令 $t = x + 1 \in (1, 4]$ ，

所以 $g(t) = t + \frac{1-a+b}{t} + a - 2$ ，因为 $b - a \in (-1, 5)$ ，所以 $1 - a + b \in (0, 6)$ ，

所以 $g(t)$ 在 $[1, \sqrt{1-a+b}]$ 上递减，在 $[\sqrt{1-a+b}, 4]$ 递增，所以 $g(t)_{\min} = g(\sqrt{1-a+b}) = 2\sqrt{1-a+b} + a - 2 = 4$ ①，

又 $g(1) = g(\sqrt{1-a+b}) = b$ ， $g(4) = \frac{9+3a+b}{4}$ ， $t \in (1, 4]$ ，所以 $g(t)_{\max} = g(4) = \frac{9+3a+b}{4}$ ②，

所以 $b \leq \frac{9+3a+b}{4}$ ，由①②得 $a = -6, b = 29$ 或 $a = 2, b = 5$ ，因为 $b - a \in (-1, 5)$ ，所以 $a = 2, b = 5$ ，

所以 $a + b = 7$ 。故答案为：7

方法归纳 基本规律

1. 对勾函数图像的特征：(1) 渐近线；(2) 拐点。

2. 双刀函数，可用 $\nearrow - \searrow \Rightarrow \nearrow$ 或者 $\searrow - \nearrow \Rightarrow \searrow$ 简单判断，要注意“渐近线”。

跟踪训练 1 已知函数 $f(x) = x + \frac{k}{x}$ 具有以下性质：如果常数 $k > 0$ ，那么函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{k})$ 上单调递减，在区间 $[\sqrt{k}, +\infty)$ 上单调递增，若函数 $y = x + \frac{a-1}{x} (x \geq 1)$ 的值域为 $[a, +\infty)$ ，则实数 a 的取值范围是 _____。

【答案】 $(-\infty, 2]$

【分析】当 $a \leq 1$ 判断单调性，进而确定最值即可求范围，当 $a > 1$ 再讨论 $\sqrt{a-1}$ ，1 的大小关系，结合 $f(x) = x + \frac{k}{x}$ 的性质，判断 $[1, +\infty)$ 上的单调性，进而确定最值，结合已知值域求参数范围。

【详解】1、当 $a - 1 \leq 0$ 时， $y = x + \frac{a-1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上递增，故 $y|_{x=1} = a$ ，满足题设；

2、当 $a - 1 > 0$ ，即 $a > 1$ ，

若 $\sqrt{a-1} \geq 1$ ，即 $a \geq 2$ 时，函数在 $[1, \sqrt{a-1})$ 上递减，在 $(\sqrt{a-1}, +\infty)$ 上递增，故 $y|_{x=\sqrt{a-1}} = 2\sqrt{a-1} =$

a , 可得 $a=2$;

若 $\sqrt{a-1} < 1$, 即 $1 < a < 2$ 时, 函数在 $[1, +\infty)$ 上递增, 故 $y|_{x=1} = a$, 满足题设;

综上, $a \in (-\infty, 2]$.

故答案为: $(-\infty, 2]$.

跟踪训练 2 已知函数 $f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^6 - 16x^3 - 1}, x \in [0, 1]$, 则该函数的值域为 _____.

【答案】 $[0, \frac{1}{15}]$

【分析】 当 $x=0$ 时, $f(0)=0$, 当 $x=1$ 时, $f(1)=0$, 当 $0 < x < 1$ 时, 将 $f(x)$ 化为

$$\frac{1}{(\frac{1}{x} - x)^2 + 3 + \frac{16}{\frac{1}{x} - x}}, \text{再换元, 令 } t = \frac{1}{x} - x, g(t) = t^2 + \frac{16}{t} + 3, t \in (0, +\infty), \text{利用导数求出 } g(t) \text{ 的值域后,}$$

可得 $f(x)$ 的值域.

【详解】 当 $x=0$ 时, $f(0)=0$, 当 $x=1$ 时, $f(1)=0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = \frac{x^2(x^2-1)}{(x^2)^3 - 1 - 16x^3} =$

$$\frac{x^2(x^2-1)}{(x^2-1)(x^4+x^2+1)-16x^3} = \frac{1}{\frac{x^4+x^2+1}{x^2} - \frac{16x}{x^2-1}} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{16}{x - \frac{1}{x}}}, \text{令 } t = \frac{1}{x} - x, \text{因为 } t = \frac{1}{x} -$$

x 在 $(0, 1)$ 上为减函数, 所以 $t \in (0, +\infty)$, 设 $g(t) = t^2 + \frac{16}{t} + 3, t \in (0, +\infty)$, 则 $g'(t) = 2t - \frac{16}{t^2} = \frac{2(t^3 - 8)}{t^2}$,

当 $0 < t < 2$ 时, $g'(t) < 0$, 当 $t > 2$ 时, $g'(t) > 0$, 所以 $g(t)$ 在 $(0, 2)$ 上递减, 在 $(2, +\infty)$ 上递增,

所以当 $t=2$ 时, $g(t)$ 取得最小值, 最小值为 $g(2) = 2^2 + \frac{16}{2} + 3 = 15$,

所以 $g(t) \in [15, +\infty)$, 所以 $(\frac{1}{x} - x)^2 + 3 + \frac{16}{\frac{1}{x} - x} \in [15, +\infty)$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) \in (0, \frac{1}{15}]$,

综上所述: 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) \in [0, \frac{1}{15}]$. 故答案为: $[0, \frac{1}{15}]$

跟踪训练 3 函数 $f(x) = \frac{4^x + 2^{x+1} + 5}{2^x + 1}$ 的值域为 ()

A. $[5, +\infty)$

B. $[4, +\infty)$

C. $(5, +\infty)$

D. $(4, +\infty)$

【答案】 B

【分析】 把 $2^x + 1$ 作为一个整体, 求出其范围, 再利用基本不等式求解.

$$\text{由已知 } f(x) = \frac{(2^x + 1)^2 + 4}{2^x + 1} = (2^x + 1) + \frac{4}{2^x + 1} \geq 2\sqrt{(2^x + 1) \times \frac{4}{2^x + 1}} = 4,$$

当且仅当 $2^x + 1 = \frac{4}{2^x + 1}$, 即 $x=0$ 时等号成立,

所以 $f(x)$ 的值域是 $[4, +\infty)$.

故选: B.

题型六: 值域基础 6: 分段函数与值域

题目 1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{ax^2-x+1}, & x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + \frac{1}{2}), & x \leq 0 \end{cases}$ 的值域为 R , 则实数 a 的取值范围是 _____

【答案】 $(0, \frac{1}{4}]$

【分析】可由题意,根据对数函数的定义域和单调性确定其范围,要满足值域为 R ,指数函数的值域也就确定了,然后把指数部分的二次三项式重新设函数,通过分类讨论去求解对应的取值范围.

【详解】函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{ax^2-x+1}, & x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right), & x \leq 0 \end{cases}$, 所以当 $x \leq 0$ 时, $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) \leq 1$,

所以 $x > 0$ 时, 2^{ax^2-x+1} 得取遍所有大于 1 的数,故其指数得取遍所有大于 0 的数.

因为 $x > 0$, $g(x) = ax^2 - x + 1$,

当 $a = 0$ 时, $g(x) = -x + 1 < 1$ 不成立;

当 $a < 0$ 时,其开口向下,有最大值,无法去到正无穷,舍去;

当 $a > 0$ 时,其开口向上,对称轴大于 0,故需对称轴对应的值小于等于 0,故有: $a > 0$ 且

$\frac{4a-1}{4a} \leq 0 \Rightarrow 0 < a \leq \frac{1}{4}$, 综上所述,实数 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{4}]$.

故答案为: $(0, \frac{1}{4}]$.

★方法归纳 基本规律★

分段函数,要注意两段交接处,函数的变化

跟踪训练 1 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x}, & x \geq 1 \\ ax, & x < 1 \end{cases}$ 是单调函数. 若 $f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$, 且方程 $f(x) = \ln(x+m)$ 没

有实根,则 m 的取值范围是 _____.

【答案】 $(-\infty, \ln\sqrt{2e})$

【分析】根据函数 $f(x)$ 的值域为 R 可求得 $a = 2$, 利用导数求出当直线 $y = 2x$ 与函数 $g(x) = \ln(x+m)$ 的图象相切时实数 m 的值, 数形结合可得出实数 m 的取值范围.

【详解】当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} \geq 0$, 所以, 函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为增函数, 此时, $f(x) \geq f(1) = 2$,

所以, 函数 $f(x) = ax$ 在 $(-\infty, 1)$ 上的值域应包含 $(-\infty, 2)$, 则 $a > 0$.

由于函数 $f(x)$ 在 R 上为单调函数, 则该函数在 R 上为增函数,

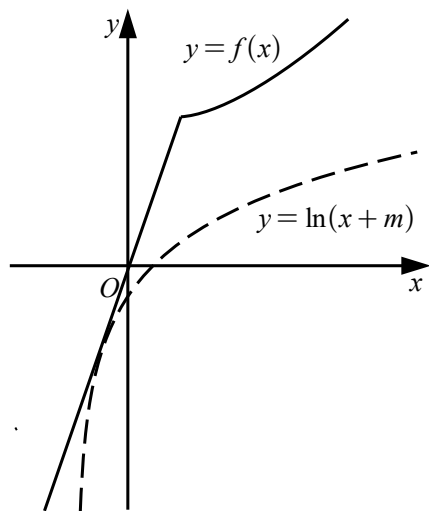
所以 $\begin{cases} a > 0 \\ a \leq f(1) = 2 \end{cases}$, 解得 $0 < a \leq 2$, 即实数 a 的取值范围是 $(0, 2]$;

当 $x < 1$ 时, $f(x) = ax < a$, 由题意可得 $(-\infty, 2) \subseteq (-\infty, a)$, 可得 $a \geq 2$.

又 $0 < a \leq 2$, $\therefore a = 2$.

设 $g(x) = \ln(x+m)$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x+m}$.

设直线 $y = 2x$ 与曲线 $y = g(x)$ 的图象相切于点 $(t, \ln(t+m))$, 如图,



所以, $\begin{cases} \frac{1}{t+m} = 2 \\ \ln(t+m) = 2t \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} t = -\frac{1}{2}\ln 2 \\ m = \frac{1+\ln 2}{2} \end{cases}$.

由图象可知, 当 $m < \frac{1+\ln 2}{2} = \ln\sqrt{2e}$, 直线 $y = 2x$ 与函数 $g(x) = \ln(x+m)$ 的图象没有公共点.

故答案为: $(-\infty, \ln\sqrt{2e})$.

跟踪训练 2 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^3 - x + 2 + m, & x < 1 \\ x + 1 - \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 的值域为 $[2, +\infty)$, 给出下列命题: ① $f(3) > f(2)$; ②

$m \geq 2$; ③ $f(\frac{\ln 2}{2}) < f(\frac{1}{e})$; ④ $\log_m(m+1) > \log_{m+1}(m+2)$. 其中所有正确命题的编号是 _____.

【答案】 ①②④

【分析】 ①用导数法判断 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的单调性即可; ②判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上的单调性求值域即可; ③令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 判断 $\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{e}$ 的大小, 再利用函数的单调性判断; ④利用基本不等式结合等式运算判断.

【详解】 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x + 1 - \ln x$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上递增, 所以 $f(3) > f(2)$, 故①正确;

当 $x < 1$ 时, $f(x) = -x^3 - x + 2 + m$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上递减, 所以 $f(x) > f(1) = m$, 则 $f(x)$ 的值域是 $(m, +\infty)$,

又因为 $f(x)$ 的值域是 $[2, +\infty)$, 所以 $m \geq 2$, 故②正确;

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $0 < x < e$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上递增,

则 $g(2) < g(e)$, 即 $\frac{\ln 2}{2} < \frac{1}{e} < 1$, 由②知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上递减, 所以 $f(\frac{\ln 2}{2}) > f(\frac{1}{e})$, 故③错误;

当 $m \geq 2$ 时, $\lg m \cdot \lg(m+2) \leq \left(\frac{\lg m + \lg(m+2)}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lg(m+2)}{2}\right)^2 < \lg^2(m+1)$, 所以 $\frac{\lg(m+1)}{\lg m} >$

$\frac{\lg(m+2)}{\lg(m+1)}$,

即 $\log_m(m+1) > \log_{m+1}(m+2)$ 故④正确,

故答案为: ①②④

跟踪训练 3 . 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(1-x), & -1 \leq x \leq n \\ 2^{2-|x-2|} - 2, & n < x \leq m \end{cases}$ ($n < m$) 的值域是 $[-1, 2]$, 当 $n \in [0, \frac{1}{2})$ 时, 实数

m 的取值范围是 _____.

【答案】 $[2, 4]$

【分析】根据第一段函数的单调性求出函数值的取值范围,再根据第二段函数的单调性结合函数的值域进而确定 m 的取值范围.

【详解】当 $-1 \leq x \leq n$ 时,函数 $f(x)$ 为增函数,此时 $f(-1) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$

因为 $n \in [0, \frac{1}{2})$, 当 $n = \frac{1}{2}$ 时, $f(n) = \log_{\frac{1}{2}}(1-n) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$

当 $n < x \leq m$ 时, $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称,且 $f(x)$ 在 $(n, 2)$ 单调递增,在 $(2, +\infty)$ 单调递减,

当 $x=2$ 时, $f(2) = 4-2=2$

当 $n=0$ 时, $f(0) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$

由 $2^{2-|x-2|} - 2 = 0$ 得 $2 - |x-2| = 1$, 则 $x=1$ 或 $x=3$,

由 $2^{2-|x-2|} - 2 = -1$ 得 $2 - |x-2| = 0$, 则 $x=0$ (舍) 或 $x=4$,

因为 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 2]$, 所以 m 的取值范围是 $[2, 4]$

故答案为: $[2, 4]$

题型七: 值域基础 7: 绝对值函数求值域

【题目 1】设函数 $f(x) = |x^2 - 1|$ 的定义域和值域都是 $[a, b]$, 则 $a + b =$ _____.

【答案】1 或 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【分析】易得 $0 \leq a < b$, 然后再分别讨论 $0 \leq a < b \leq 1$, $0 \leq a < 1 < b$, $1 \leq a < b$ 三种情况即可求解.

【详解】因为 $f(x)$ 是偶函数且 $f(x) \geq 0$, 易得 $0 \leq a < b$,

(1) 当 $0 \leq a < b \leq 1$ 时, $\begin{cases} -a^2 + 1 = b \\ -b^2 + 1 = a \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -a^2 + 1 = b \\ -b^2 + 1 = a \end{cases}$, 解得 $a=0, b=1$, 即 $a+b=1$;

(2) 当 $0 \leq a < 1 < b$ 时, 此时值域 $f(x) \geq 0$, 所以此时 $a=0$, 此时 $b > 1$, 且 $f(b) = b$, 即 $b^2 - b = 1$, 解得 $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 所以 $a+b = 0 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$;

(3) 当 $1 \leq a < b$ 时, $\begin{cases} f(a) = a \\ f(b) = b \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a^2 - 1 = a \\ b^2 - 1 = b \end{cases}$ 解得 $a+b=1$, 此时不符合题意舍去;

综上所述: $a+b=1$ 或者 $a+b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 故答案为: 1 或 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

★方法归纳 基本规律★

绝对值函数, 主要是分类讨论.

1. 一元一次函数加绝对值, 是折线
2. 一元二次函数加绝对值, 要注意与轴的交点
3. 指数函数上下平移后加绝对值, 要注意“一点一线”的位置

【跟踪训练 1】设 $m, n \in \mathbb{Z}$, 已知函数 $f(x) = \log_2(-|x|+4)$ 的定义域是 $[m, n]$, 值域是 $[0, 2]$, 若关于 x 的方程 $2^{|1-x|} + m + 1 = 0$ 有唯一的实数解, 则 $m+n =$ _____.

【答案】1

【分析】根据函数值域求出 $|x| \in [0, 3]$, 根据方程唯一实数解求出 $m=-2$, 即可求解.

【详解】 $\because f(x) = \log_2(-|x|+4)$ 的值域是 $[0, 2]$,

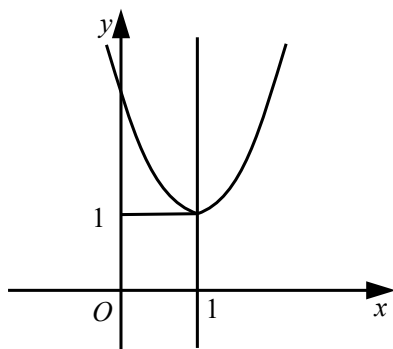
$\therefore (-|x|+4) \in [1, 4], \therefore -|x| \in [-3, 0], \therefore |x| \in [0, 3]$ ①

关于 x 的方程 $2^{|1-x|} + m + 1 = 0$ 有唯一的实数解,

即关于 x 的方程 $2^{|1-x|} = -m-1$ 有唯一的实数解,

作出 $y = 2^{|1-x|}$ 函数图象, 与 $y = -m-1$ 有唯一实数解,

即 $-m-1=1$



则 $m = -2$

又由函数 $f(x) = \log_2(-|x| + 4)$ 在 $(-4, 0)$ 递增, 在 $(0, 4)$ 递减, $f(0) = 2, f(-3) = f(3) = 0$

当 $f(x) = \log_2(-|x| + 4)$ 定义域是 $[-2, n]$, 值域是 $[0, 2]$, 得 $n = 3$ 即: $m + n = 1$. 故答案: 1

跟踪训练 2 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(-x+1), & -1 \leq x \leq t \\ -2|x-1|+1, & t < x \leq a \end{cases}$, 若存在实数 t , 使 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$, 则实数

a 的取值范围是 _____.

【答案】 $(\frac{1}{2}, 2]$

【分析】 根据 $f(a) \geq -1, f(t) \leq 1$ 解得 $0 \leq a \leq 2, t \leq \frac{1}{2}$, 讨论 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2} < a \leq 2$ 两种情况, 计算最值得到答案.

【详解】 根据题意知 $f(a) = -2|a-1|+1 \geq -1$, 解得 $0 \leq a \leq 2, f(t) = \log_{\frac{1}{2}}(-t+1) \leq 1$, 解得 $t \leq \frac{1}{2}$;

当 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, t]$ 上的最大值为 $f(t) < 1$,

在 $(t, a]$ 上的最大值为 $f(a) = 2a-1 \leq 0$, 不成立;

当 $\frac{1}{2} < a \leq 2$ 时, 取 $t = \frac{1}{2}$, 故 $f(x)$ 在 $[-1, \frac{1}{2}]$ 上的值域为 $[-1, 1]$,

在 $(\frac{1}{2}, a]$ 上的满足 $-2|\frac{1}{2}-1|+1=0 \in [-1, 1], -2|1-1|+1=1 \in [-1, 1],$

$-2|a-1|+1 \in [-1, 1]$, 故满足条件;

综上所述: $a \in (\frac{1}{2}, 2]$. 故答案为: $(\frac{1}{2}, 2]$.

跟踪训练 3 . 若函数 $f(x) = |x^2 - ax|, x \in [1, 3]$ 的值域为 $[0, f(3)]$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $1 \leq a \leq 6\sqrt{2} - 6$

【分析】 分别讨论对称轴与给定的区间的关系, 得出函数在给定的区间上的单调性, 从而得出最值求解不等式组.

【详解】 (1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增,

当 $x \in [1, 3]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[f(1), f(3)]$, 不满足题意;

(2) 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调递增,

当 $x \in [1, 3]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[f(1), f(3)]$, 不满足题意;

(3) 当 $1 \leq a \leq 2$ 时, $f(x)$ 在 $[1, a]$ 单调递减, 在 $[a, +\infty)$ 单调递增,

要使当 $x \in [1, 3]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[0, f(3)]$, 则需 $f(1) \leq f(3)$;

即 $a-1 \leq 9-3a$, 解得 $1 \leq a \leq 2$;

(4) 当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $[1, \frac{a}{2}]$ 单调递增, 在 $[\frac{a}{2}, a]$ 单调递减, 在 $[a, +\infty)$ 单调递增,

要使当 $x \in [1, 3]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[0, f(3)]$, 则需 $f(\frac{a}{2}) \leq f(3)$;

即 $-\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \leq 9 - 3a$, 解得 $2 \leq a \leq -6 + 6\sqrt{2}$;

综上得知实数 a 的取值范围是 $1 \leq a \leq 6\sqrt{2} - 6$.

故得解.

题型八: 值域基础 8: “无理函数”求值域

题目 1 函数 $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2-x}$ 的值域为 _____.

【答案】 $\left[\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$

【分析】构造一个与原函数定义域一致, 在定义域上单调, 且与原函数平方和为定常数的函数 $h(x) = -\sqrt{4-2x} + \sqrt{x-\frac{1}{2}}$, 即可利用所构造函数的值域求出 $f(x)$ 的值域.

【详解】由已知得, $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2-x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$,

构造函数 $h(x) = -\sqrt{4-2x} + \sqrt{x-\frac{1}{2}}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 则 $h(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上单调递增,

即可得 $h(x) \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ 因为 $f^2(x) + h^2(x) = \frac{9}{2}$, 所以 $f^2(x) = \frac{9}{2} - h^2(x) \in \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]$, 所以 $f(x) \in \left[\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$

故答案为: $\left[\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$

★方法归纳 基本规律★

1. 对于根式函数求值域时, 若 $f(x) = \sqrt{ax+b}$ 可用换元法(代数换元或者三角换元)进行求解;

2. 若 $f(x) = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} \pm \sqrt{(x-c)^2 + d^2}$ 可用几何意义法求解.

跟踪训练 1 函数 $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2} + x$ 的值域为 _____.

【答案】 $\left[1, \frac{3}{2}\right) \cup [2, +\infty)$.

令 $y - x = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, 两边平方, 用 y 将 x 表示出来, 结合 $y \geq x$ 可求出 y 的取值范围.

【详解】解: 设 $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + x$, 则 $y - x = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

所以 $\begin{cases} y \geq x \\ x = \frac{y^2 - 2}{2y - 3} \end{cases}$, 即 $y \geq \frac{y^2 - 2}{2y - 3}$ 整理得 $\frac{y^2 - 3y + 2}{2y - 3} \geq 0$. 解得 $1 \leq y < \frac{3}{2}$ 或 $y \geq 2$

故答案为: $\left[1, \frac{3}{2}\right) \cup [2, +\infty)$.

跟踪训练 2 函数 $y = \frac{\sqrt{-x^2 + 4x - 3} + 3}{x + 1}$ 的值域为 _____.

【答案】 $\left[\frac{3}{4}, \frac{9 + \sqrt{17}}{8}\right]$

【分析】先根据条件求出 x 的范围, 再令 $x - 2 = \cos\theta$, 利用三角换元法结合三角函数的值域即可得出结论.

【详解】 $\because -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$. 令 $x - 2 = \cos\theta$ 且 $\theta \in [0, \pi]$

$\therefore y = \frac{\sqrt{-x^2 + 4x - 3} + 3}{x + 1} = \frac{\sin\theta + 3}{\cos\theta + 3}$, 表示两点 $(-3, -3)$ 和 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 的斜率, $\cos^2\theta + \sin^2\theta =$

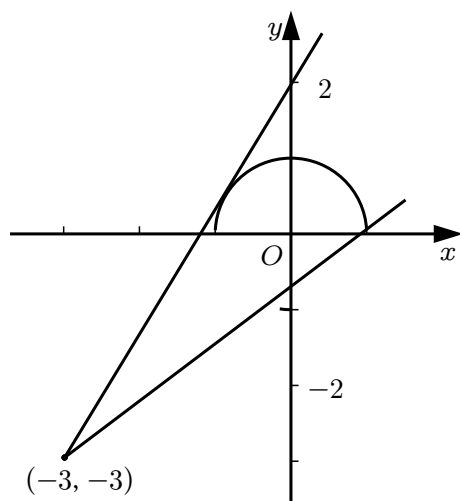
$1 (\theta \in [0, \pi])$, 故点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 在单位圆的上半部分.

如图, 斜率最小为 $\frac{-3-0}{-3-1} = \frac{3}{4}$, 斜率最大值为直线与半圆相切时的斜率, $\frac{\sin\theta - (-3)}{\cos\theta - (-3)} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -1$, 化

简得 $\sin\theta + \cos\theta = -\frac{1}{3}$, 由 $\begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = -\frac{1}{3} \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ -1 < \cos\theta < 0 \\ 0 < \sin\theta < 1 \end{cases}$, 解得 $\sin\theta = \frac{\sqrt{17}-1}{6}$, $\cos\theta = \frac{-\sqrt{17}-1}{6}$, 故切线的斜率为

$\frac{\sin\theta - (-3)}{\cos\theta - (-3)} = \frac{\frac{\sqrt{17}-1}{6} + 3}{\frac{-\sqrt{17}-1}{6} + 3} = \frac{9+\sqrt{17}}{8}$. 所以斜率的取值范围, 也即函数的值域为 $\left[\frac{3}{4}, \frac{9+\sqrt{17}}{8}\right]$. 故答

案为: $\left[\frac{3}{4}, \frac{9+\sqrt{17}}{8}\right]$



跟踪训练 3 对于函数 $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx}$, 其中 $b > 0$, 若 $f(x)$ 的定义域与值域相同, 则非零实数 a 的值为 _____.

【答案】 -4

【分析】 根据函数的定义域与值域相同, 可以求出参数表示的函数的定义域与值域, 由两者相同, 比较二区间的端点得出参数满足的方程, 解方程求参数即可.

【详解】 函数 $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx}$, 其中 $b > 0$

若 $a > 0$, 由于 $ax^2 + bx \geq 0$, 即 $x(ax + b) \geq 0$,

$\therefore$ 对于正数 b , $f(x)$ 的定义域为: $D = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right] \cup [0, +\infty)$,

但 $f(x)$ 的值域 $A \subseteq [0, +\infty)$, 故 $D \neq A$, 不合要求.

若 $a < 0$, 对于正数 b , $f(x)$ 的定义域为 $D = \left[0, -\frac{b}{a}\right]$.

由于此时 $[f(x)]_{\max} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b}{2\sqrt{-a}}$, 故函数的值域 $A = \left[0, \frac{b}{2\sqrt{-a}}\right]$.

由题意, 有 $-\frac{b}{a} = \frac{b}{2\sqrt{-a}}$, 由于 $b > 0$, 所以 $a = -4$.

故答案为: -4

题型九: “高斯函数”与值域

题目 1 定义函数 $f(x) = [x[x]]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $[1.3] = 1$, $[-1.5] = -2$, $[2] = 2$,

当 $x \in [0, n)$ 时, $f(x)$ 的值域为 An , 记集合 An 中元素的个数为 a_n , 则 $\frac{1}{a_2-1} + \frac{1}{a_3-1} + \frac{1}{a_4-1} + \cdots + \frac{1}{a_{2021}-1}$ 的值为 _____.

【答案】 $\frac{4040}{2021}$

【分析】根据函数的定义判断 $f(x)$ 在 $x \in [0, n)$ 上值域中元素的个数 a_n , 进而可得 $\frac{1}{a_n-1}$ 通项公式, 应用裂项相消法求目标式的值.

【详解】由题设, $x[x] = \begin{cases} 0, 0 \leq x < 1 \\ x, 1 \leq x < 2 \\ 2x, 2 \leq x < 3 \\ \dots \\ (n-1)x, n-1 \leq x < n \end{cases},$

所以 $f(x)$ 在各区间上值域中元素个数为 $1, 1, 2, \dots, n-1$,

所以 $a_n = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n^2 - n + 2}{2}$, 则 $\frac{1}{a_n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$,

所以 $\frac{1}{a_2-1} + \dots + \frac{1}{a_{2021}-1} = 2 \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{2021} \right) = \frac{4040}{2021}$.

故答案为: $\frac{4040}{2021}$.

★方法归纳 基本规律★

取整函数 (高斯函数)

1. 具有“周期性”

2. 一端是“空心头”, 一端是“实心头”

3. 还可以引入“四舍五入”函数作对比

因为它具有“类周期性”, 所以考查函数值域多与数列关联.

【变式演练】

跟踪训练 1 定义函数 $f(x) = \{x\{x\}\}$, 其中 $\{x\}$ 表示不小于 x 的最小整数, 如 $\{1.4\} = 2$, $\{-2.3\} = -2$, 当 $x \in (0, n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 时, 函数 $f(x)$ 的值域为 A_n , 记集合 A_n 中元素的个数为 a_n , 则 $a_n =$ _____.

【答案】 $\frac{n(n+1)}{2}$

【分析】根据 $\{x\}$ 的定义, 依次求出数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项, 再归纳出 $a_n = a_{n-1} + n$, 利用累加法求出 a_n 即可

【详解】解: 由题意得, 当 $n=1$ 时, 由于 $x \in (0, 1)$, 所以 $\{x\} = 1$, 所以 $\{x\{x\}\} = 1$,

则 $A_1 = \{1\}$, $a_1 = 1$,

当 $n=2$ 时, 由于 $x \in (1, 2)$, 所以 $\{x\} = 2$, 所以 $\{x\{x\}\} \in (2, 4)$,

则 $A_2 = \{1, 3, 4\}$, $a_2 = 3$,

当 $n=3$ 时, 由于 $x \in (2, 3)$, 所以 $\{x\} = 3$, 所以 $\{x\{x\}\} \in (6, 9)$,

则 $A_3 = \{1, 3, 4, 7, 8, 9\}$, $a_3 = 6$,

当 $n=4$ 时, 由于 $x \in (3, 4)$, 所以 $\{x\} = 4$, 所以 $\{x\{x\}\} \in (12, 16)$,

则 $A_4 = \{1, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16\}$, $a_4 = 10$, 以此类推, 得 $a_n = a_{n-1} + n$, 利用累加法得, $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$,

故答案为: $\frac{n(n+1)}{2}$

跟踪训练 2 定义函数 $f(x) = [x[x]]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如: $[1.3] = 1$, $[-1.5] = -2$, $[2] = 2$. 当 $x \in [0, n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 时, $f(x)$ 的值域为 A_n . 记集合 A_n 中元素的个数为 a_n , 则 $\sum_{i=2}^{2020} \frac{1}{a_i-1}$ 的值为 _____.

【答案】 $\frac{2019}{1010}$

先由题意求出 $[x]$, 再求 $x[x]$, 接着求出 $[x[x]]$, 即可得到 a_n 的通项公式, 表示出 $\frac{1}{a_n-1}$, 用裂项相消法求出 $\sum_{i=2}^{2020} \frac{1}{a_i-1}$ 即可.

【详解】 $\because [x]$ 表示不超过 x 的最大整数, $\therefore$ 当 $x \in [0, n) (n \in \mathbb{N}^*)$ 时, $[x] = \begin{cases} 0, x \in [0, 1) \\ 1, x \in [1, 2) \\ \dots \\ n-1, x \in [n-1, n) \end{cases}$,

$\therefore x[x] = \begin{cases} 0, x \in [0, 1) \\ x, x \in [1, 2) \\ \dots \\ (n-1)x, x \in [n-1, n) \end{cases}$, $\therefore [x[x]]$ 在各区间内的元素个数为 $1, 1, 2, 3, \dots, n-1$,

$\therefore a_n = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = 1 + \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$, $\therefore \frac{1}{a_n-1} = \frac{2}{n(n-1)} =$

$2\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$,

$\therefore \sum_{i=2}^{2020} \frac{1}{a_i-1} = 2 \sum_{i=2}^{2020} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2020}\right) = \frac{2019}{1010}$. 故答案为: $\frac{2019}{1010}$.

跟踪训练 3 函数 $f(x) = [3x] - 3[x]$ 的值域是 _____. (注: 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)

【答案】 $\{0, 1, 2\}$

【分析】 $f(x)$ 为周期函数, 故只要考虑函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的函数值的取值集合, 分 $0 \leq x < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \leq x < 1, x = 1$ 四种情形分类讨论即可.

【详解】 $f(x+1) = [3x+3] - 3[x+1]$, $[3x+3] = [3x] + 3, 3[x+1] = 3([x] + 1)$,

故 $f(x+1) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为周期函数. 故考虑 $[0, 1]$ 上的 $f(x)$ 的取值集合.

当 $x \in [0, \frac{1}{3})$ 时, $0 \leq 3x < 1$, 故 $[3x] = 0, 3[x] = 0$, 所以 $f(x) = 0$;

当 $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 时, $1 \leq 3x < 2$, 所以 $[3x] = 1, 3[x] = 0$, 所以 $f(x) = 1$;

当 $x \in [\frac{2}{3}, 1)$ 时, $2 \leq 3x < 3$, 所以 $[3x] = 2, 3[x] = 0$, 所以 $f(x) = 2$;

当 $x = 1$ 时, $f(x) = 0$, 综上, $f(x)$ 的值域为 $\{0, 1, 2\}$.

题型十: “保值函数”与值域

题目 1 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若函数 $f(x)$ 满足条件: 存在 $[a, b] \subseteq D$, 使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域是 $[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$, 则 $f(x)$ 称为“倍缩函数”, 若函数 $f(x) = \log_2(2^x + t)$ 为“倍缩函数”, 则实数 t 的取值范围是 _____.

【答案】 $(0, \frac{1}{4})$

【分析】由题意得, 函数是增函数, 构造出方程组, 利用方程组的解都大于 0, 求出 t 的取值范围.

【详解】因为函数 $f(x) = \log_2(2^x + t)$ 为“倍缩函数”, 即满足存在 $[a, b] \subseteq D$, 使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域是 $[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$

由复合函数单调性可知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增函数

所以 $\begin{cases} f(a) = f(x)_{\min} \\ f(b) = f(x)_{\max} \end{cases}$, 则 $\begin{cases} \log_2(2^a + t) = \frac{a}{2} \\ \log_2(2^b + t) = \frac{b}{2} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 2^a + t = 2^{\frac{a}{2}} \\ 2^b + t = 2^{\frac{b}{2}} \end{cases}$

所以方程 $2^x - 2^{\frac{x}{2}} + t = 0$ 有两个不等的实根, 且两根都大于 0

则 $\begin{cases} (-1)^2 - 4t > 0 \\ t > 0 \end{cases}$, 解得 $0 < t < \frac{1}{4}$ 所以实数 t 的取值范围是 $(0, \frac{1}{4})$. 故答案为: $(0, \frac{1}{4})$



方法归纳

基本规律



“保值函数”, 如【典例分析】可以建立 $\begin{cases} f(a) = k(a+1) \\ f(b) = k(b+1) \end{cases}$ 得到方程 $f(x) = k(x+1)$, 从而将问题转化为图像有两个交点的问题.

跟踪训练 1 设函数 $f(x) = x \ln x + 2$, 若存在区间 $[a, b] \subseteq [\frac{1}{e}, e]$, 使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ ($a \neq b$) 上的值域为 $[k(a+1), k(b+1)]$, 则实数 k 的取值范围是 _____.

【答案】 $(1, \frac{2e-1}{e+1}]$

【分析】 根据导数判断 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上的单调性, 从而判断在 $[a, b]$ 上的单调性, 根据值域求出 k 的关系式, 参变分离出 k , 构造新函数, 将问题转化为求新函数的值域问题.

【详解】 $\because f'(x) = \ln x + 1$,

$\therefore x \geq \frac{1}{e}, f'(x) \geq 0, f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 单调递增,

$\therefore [a, b] \subseteq [\frac{1}{e}, e], \therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 单调递增,

$\therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 的值域为 $[k(a+1), k(b+1)]$, $\therefore \begin{cases} f(a) = k(a+1) \\ f(b) = k(b+1) \end{cases}$,

即方程 $f(x) = k(x+1)$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上有两根 a, b ,

即 $k = \frac{f(x)}{x+1} = \frac{x \ln x + 2}{x+1}$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上有两根 a, b ,

令 $g(x) = \frac{x \ln x + 2}{x+1} (\frac{1}{e} \leq x \leq e)$, 则 $g'(x) = \frac{x + \ln x - 1}{(x+1)^2}$,

$\because g'(1) = 0$ 且 $x + \ln x + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore \frac{1}{e} \leq x < 1$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减; $1 < x \leq e$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增.

又 $g(1) = 1, g(\frac{1}{e}) = \frac{2e-1}{e+1}, g(e) = \frac{e+2}{e+1} > g(\frac{1}{e})$,

$\therefore$ 要使 $k = \frac{f(x)}{x+1} = \frac{x \ln x + 2}{x+1}$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上有两根 a, b , 则 $k \in (1, \frac{2e-1}{e+1}]$. 故答案为: $(1, \frac{2e-1}{e+1}]$.

跟踪训练 2 设函数 $f(x) = m + \sqrt{x+3}$, 若存在实数 a, b ($a < b$), 使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域为 $[a, b]$, 则实数 m 的取值范围是 _____.

【答案】 $(-\frac{13}{4}, -3]$

【分析】 由题设, 将问题转化为 $y = x - m$ 与 $y = \sqrt{x+3}$ 在 $x \geq -3$ 上有两个交点, 进而构造 $g(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3$, 研究其在 $[-3, +\infty)$ 上有两个零点的情况下 m 的取值范围即可.

【详解】 由题设, $f(x)$ 为增函数且定义域为 $[-3, +\infty)$, 要使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域为 $[a, b]$,

$\therefore \begin{cases} f(a) = m + \sqrt{a+3} = a \\ f(b) = m + \sqrt{b+3} = b \end{cases}$, 易知: $\begin{cases} \sqrt{a+3} = a - m \\ \sqrt{b+3} = b - m \end{cases}$,
 $b > a \geq -3$

$\therefore y = x - m$ 与 $y = \sqrt{x+3}$ 在 $x \geq -3$ 上有两个交点, 即 $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3 = 0$ 在 $[-3, +\infty)$ 上有两个根且 $x - m \geq 0$ 恒成立即 $m \leq -3$,

$$\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2-3) > 0$$

$\therefore$ 对于 $g(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3$, 有 $\left\{ \frac{2m+1}{2} > -3 \right.$, 可得 $m > -\frac{13}{4}$,

$$g(-3) \geq 6 + 3(2m+1) + m^2 \geq 0$$

$\therefore$ 综上, $-\frac{13}{4} < m \leq -3$. 故答案为: $\left(-\frac{13}{4}, -3\right]$

跟踪训练 3 函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若满足: (1) $f(x)$ 在 D 内是单调函数; (2) 存在 $\left[\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right] \subseteq D$, 使得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right]$ 上的值域为 $[m, n]$, 那么就称函数 $f(x)$ 为“梦想函数”. 若函数 $f(x) = \log_a(a^x + t)$ ($a > 0, a \neq 1$) 是“梦想函数”, 则 t 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

【分析】 根据复合函数单调性关系先判断函数 $f(x)$ 为单调增函数, 再根据值域关系建立方程, 然后转化为一元二次方程根的个数问题求解.

【详解】 依题意, 函数 $f(x) = \log_a(a^x + t)$ ($a > 0, a \neq 1$),

(1) 设 $y = \log_a U$ ($a > 0, a \neq 1$), $U(x) = a^x + t$ ($a > 0, a \neq 1$)

当 $a > 1$ 时, $U(x) = a^x + t$ 为增函数, $y = \log_a U$ 也是增函数, 则 $y = \log_a(a^x + t)$ 为增函数;

当 $0 < a < 1$ 时, $U(x) = a^x + t$ 为减函数, $y = \log_a U$ 也是减函数, 则 $y = \log_a(a^x + t)$ 为增函数;

综上, 函数 $f(x) = \log_a(a^x + t)$ ($a > 0, a \neq 1$) 为单调增函数, 即 $f(x)$ 在 D 内是单调函数;

(2) $\because f(x)$ 在 D 内是单调增函数, 若 $f(x)$ 为“梦想函数”

设存在 $\left[\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right] \subseteq D$, 使得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right]$ 上的值域为 $[m, n]$,

$$\text{则有 } \begin{cases} f\left(\frac{m}{2}\right) = \log_a\left(a^{\frac{m}{2}} + t\right) = m \\ f\left(\frac{n}{2}\right) = \log_a\left(a^{\frac{n}{2}} + t\right) = n \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a^{\frac{m}{2}} + t = a^m \\ a^{\frac{n}{2}} + t = a^n \end{cases}$$

$\therefore m, n$ 是方程 $\left(a^{\frac{x}{2}}\right)^2 - a^{\frac{x}{2}} - t = 0$ 的两个不等的实根,

设 $y = a^{\frac{x}{2}}$, 则 $y > 0$, 所以方程等价于 $y^2 - y - t = 0$ 的有两个不等的正实根,

$$\text{则有 } \begin{cases} \Delta = 1 + 4t > 0 \\ y_1 y_2 = -t > 0 \\ y_1 + y_2 = 1 > 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} t > -\frac{1}{4} \\ t < 0 \end{cases}, \text{ 解得: } 0 - \frac{1}{4} < t < 0, \text{ 故答案为: } \left(-\frac{1}{4}, 0\right).$$

题型十一: “放大镜”函数与值域

题目 1 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对 $\forall x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(2x) = 2f(x)$, 当 $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = 2 - x$, 给出如下结论, 其中所有正确结论的序号是: _____.

① 对 $\forall m \in \mathbb{Z}$, 有 $f(2^m) = 0$;

② 函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$;

③ 存在 $n \in \mathbb{Z}$, 使得 $f(2^n + 1) = 9$;

【答案】 ①②

【分析】 根据定义求 $f(2^m)$ 值、求 $f(x)$ 的值域、解方程 $f(2^n + 1) = 9$, 再根据结果进行选择.

【详解】 因为 $f(2^m) = 2f(2^{m-1}) = \dots = 2^{m-1}f(2) = 0$, 所以①对;

因为当 $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = 2 - x \in [0, 1]$, 当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}(2 - 2x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

当 $x \in \left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]$ 时, $f(x) = \frac{1}{2^k}(2 - 2^k x) \in \left[0, \frac{1}{2^k}\right]$,

当 $x \in (2^{k-1}, 2^k]$ 时, $f(x) = 2^{k-1}\left(2 - \frac{1}{2^{k-1}}x\right) \in [0, 2^{k-1})$,

因此当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $2^{k-1} \rightarrow +\infty, \frac{1}{2^k} \rightarrow 0$,

从而函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$; 所以②对;

因为 $9 \in (2^3, 2^4)$, 所以由上可得 $f(2^n + 1) = 2^{k-1} \left(2 - \frac{2^n + 1}{2^{k-1}} \right) = 9, k - 1 \geq 4$,

即 $2^k - 2^n = 10, 2^{k-1} - 2^{n-1} = 5 \therefore 2^{n-1} = 1, 2^{k-1} = 6$ 无解. 所以③错;

综上正确结论的序号是①②

★方法归纳 基本规律★

“似周期函数”或者“类周期函数”, 俗称放大镜函数, 要注意以下几点辨析:

1. 是从左往右放大, 还是从右往左放大。
2. 放大(缩小)时, 要注意是否函数值有0。
3. 放大(缩小)时, 是否发生了上下平移。

跟踪训练 1 定义在 R 上的函数 $f(x)$, 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = x^2 + x$, 且对任意 x , 满足 $f(x+3) = 2f(x)$, 则 $f(x)$ 在区间 $[5, 7]$ 上的值域是 _____.

【答案】 $[-1, 8]$

由 $f(x+3) = 2f(x)$ 得 $f(x) = 4f(x-6)$, 当 $x \in [5, 7]$ 时, $x-6 \in [-1, 1]$, 代入可得 $f(x)$ 的解析式, 从而得值域.

【详解】 $\because f(x+3) = 2f(x) \therefore f(x) = 2f(x-3) = 4f(x-6)$ 当 $x \in [5, 7]$ 时, $x-6 \in [-1, 1]$

$\therefore f(x) = 4f(x-6) = 4[(x-6)^2 + (x-6)] = 4x^2 - 44x + 120$ 对称轴为 $x = \frac{11}{2}$, 开口向上

$\therefore$ 当 $x = \frac{11}{2}$ 时, $f(x)_{\min} = 4\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 44 \times \frac{11}{2} + 120 = -1$ 当 $x = 7$ 时, $f(x)_{\max} = 4 \times 7^2 - 44 \times 7 + 120 = 8$

$\therefore f(x)$ 在区间 $[5, 7]$ 上的值域是 $[-1, 8]$ 故答案为: $[-1, 8]$.

跟踪训练 2 已知函数 $f(x)$ 对任意 $x \in R$, 都有 $f(x) = -\frac{1}{2}f(x+2)$, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = -x^2 + 2x$, 则函数 $f(x)$ 在 $[-2, 6]$ 上的值域为 ()

- A. $[0, 1]$ B. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ C. $[-2, 0]$ D. $[-2, 4]$

【答案】 D

【分析】 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = -x^2 + 2x$, 利用 $f(x) = -\frac{1}{2}f(x+2)$, 将区间 $[-2, 0], [2, 4], [4, 6]$ 的自变量 x 利用加减转化到区间 $[0, 2]$ 上, 从而进行值域的求解

当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = x(2-x) = 1 - (x-1)^2 \in [0, 1]$,

则当 $x \in [-2, 0]$ 时, 即 $x+2 \in [0, 2]$, 所以 $f(x) = -\frac{1}{2}f(x+2) \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$;

当 $x \in [2, 4]$ 时, 即 $x-2 \in [0, 2]$,

由 $f(x) = -\frac{1}{2}f(x+2)$, 得 $f(x+2) = -2f(x)$, 从而 $f(x) = -2f(x-2) \in [-2, 0]$;

当 $x \in [4, 6]$ 时, 即 $x-2 \in [2, 4]$, 则 $f(x) = -2f(x-2) \in [0, 4]$.

综上得函数 $f(x)$ 在 $[-2, 6]$ 上的值域为 $[-2, 4]$.

故选: D.

跟踪训练 3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - |2x - 3|, & x \in [1, 2] \\ -f\left(\frac{1}{2}x\right), & x \in (2, 8] \end{cases}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $f(2) = f(7)$ B. 函数 $f(x)$ 有 5 个零点
C. 函数 $f(x)$ 在 $[3, 6]$ 上单调递增 D. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-2, 4]$

【答案】C

【分析】由函数解析式，画出函数图象，数形结合即可求解；

$$\text{解：因为 } f(x) = \begin{cases} 1 - |2x - 3|, & x \in [1, 2] \\ -f\left(\frac{1}{2}x\right), & x \in (2, 8] \end{cases},$$

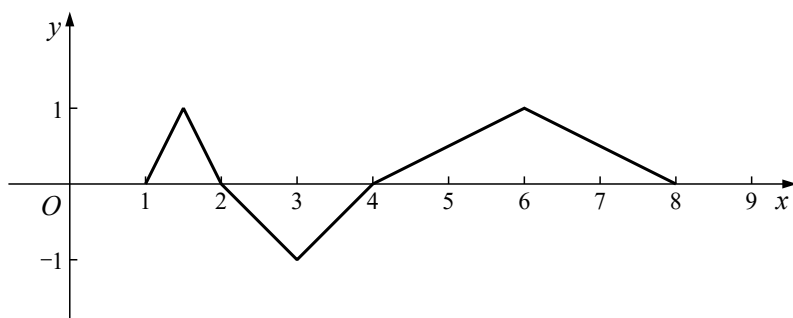
所以 $f(2) = 1 - |2 \times 2 - 3| = 0$, $f(7) = -f\left(\frac{7}{2}\right) = f\left(\frac{7}{4}\right) = 1 - \left|2 \times \frac{7}{4} - 3\right| = \frac{1}{2}$, 故 A 错误；

当 $2 < x \leq 4$ 时, $f(x) = -f\left(\frac{x}{2}\right) = -1 + |x - 3|$, 当 $4 < x \leq 8$ 时, $f(x) = -f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) = 1 - \left|\frac{1}{2}x - 3\right|$,

所以画出函数图象如下所示，由图可得函数有 4 个零点，故 B 错误，函数在 $[3, 6]$ 上单调递增，故 C 正确；

$f(3) = -f\left(\frac{3}{2}\right) = -1 + \left|2 \times \frac{3}{2} - 3\right| = -1$, $f(6) = -f(3) = 1$, 故函数的值域为 $[-1, 1]$, 故 D 错误；

故选：C



题型十二：抽象函数、复合函数与值域

【题目 1】已知定义在 R 上的单调函数 $f(x)$, 其值域也是 R , 并且对任意 $x, y \in R$,

都有 $f(xf(y)) = xy$, 则 $|f(2021)|$ 等于 _____.

【答案】2021

【分析】根据给定的抽象函数关系，利用赋值法进行推理计算作答。

【详解】因对任意 $x, y \in R$, 都有 $f(xf(y)) = xy$, 则取 $x = a \in R, y = 1$, 有 $f(a \cdot f(1)) = a \cdot 1 = a$, 取 $x = 1, y = a \in R$, 有 $f(1 \cdot f(a)) = 1 \cdot a = a$,

于是得: $f(1 \cdot f(a)) = f(a \cdot f(1))$, 又函数 $f(x)$ 在 R 上的单调, 则 $f(a) = a \cdot f(1)$,

因函数 $f(x)$ 的值域也是 R , 令 $x = f(1), y = 1$, 则有 $f(f(1) \cdot f(1)) = f(1) \cdot 1 = f(1)$,

因此, $f(1) \cdot f(1) = 1$, 即 $|f(1)| = 1$, 则有 $|f(a)| = |a \cdot f(1)| = |a| \cdot |f(1)| = |a|$,

所以 $|f(2021)| = 2021$. 故答案为: 2021

【跟踪训练 1】已知函数 $f(x) = a \ln x - x + 2$ (a 为大于 1 的整数), 若 $y = f(x)$ 与 $y = f(f(x))$ 的值域相同, 则 a 的最小值是 _____. (参考数据: $\ln 2 \approx 0.6931$, $\ln 3 \approx 1.0986$, $\ln 5 \approx 1.6094$)

【答案】5

【分析】求出 $f(x)$ 的单调区间和值域, 从而得出 $f(x)$ 的最大值与单调区间端点的关系, 从而可求出 a 的范围

【详解】解: 由 $f(x) = a \ln x - x + 2$ ($x > 0$), 得 $f'(x) = \frac{a}{x} - 1 = \frac{a-x}{x}$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = a$,

当 $0 < x < a$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > a$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递增, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(a) = a \ln a - a + 2$, 即 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, a \ln a - a + 2]$,

所以 $y = f(f(x))$ 的值域为 $(-\infty, a \ln a - a + 2]$, 所以 $a \ln a - a + 2 \geq a$, 所以 $a \ln a - 2a + 2 \geq 0$,

设 $g(a) = a \ln a - 2a + 2$, 则 $g'(a) = \ln a - 1$, 当 $1 < a < e$ 时, $g'(a) < 0$, 当 $a > e$ 时, $g'(a) > 0$,

所以 $g(a) = a \ln a - 2a + 2$ 在 $(1, e)$ 上单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增,
 因为 $g(2) = 2 \ln 2 - 4 + 2 = 2(\ln 2 - 1) < 0$, $g(3) = 3 \ln 3 - 6 + 2 \approx 3 \times 0.6931 - 4 < 0$,
 $g(4) = 4 \ln 4 - 6 = 8 \ln 2 - 6 \approx 8 \times 0.6931 - 6 < 0$, $g(5) = 5 \ln 5 - 8 \approx 5 \times 1.6094 - 8 > 0$,
 所以 a 的最小值为 5, 故答案为: 5

跟踪训练 2 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = a^x + x^2 - x \ln a + a - 3, x \in R$. 记函数 $f(x)$ 的值域为 M , 函数 $f(f(x))$ 的值域为 N , 若 $M \subseteq N$, 则 a 的最大值是 _____.

【答案】2

【分析】通过两次求导, 得到 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 从而求得 $M = [a - 2, +\infty)$, 求值域 N 的本质是求 $f(x)$ 在 $M = [a - 2, +\infty)$ 上的值域, 结合题意, 按 $a - 2 \leq 0$ 和 $a - 2 > 0$ 分类讨论即可求得 a 的最大值.

【详解】由 $f(x) = a^x + x^2 - x \ln a + a - 3$, 得 $f'(x) = a^x \ln a + 2x - \ln a$,
 令 $g(x) = f'(x) = a^x \ln a + 2x - \ln a$, 则 $g'(x) = a^x (\ln a)^2 + 2 > 0$ 恒成立,
 所以函数 $f'(x)$ 单调递增,

因为 $f'(0) = 0$, 所以当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$,

即 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(0) = a - 2$,

于是 $f(x)$ 的值域为 $[a - 2, +\infty)$, 即 $M = [a - 2, +\infty)$.

若 $a - 2 \leq 0$, 则 $f(f(x))$ 的值域 $N = [f(0), +\infty) = [a - 2, +\infty)$, 此时 $M \subseteq N$ 成立;

若 $a - 2 > 0$, 则 $f(f(x))$ 的值域 $N = [f(a - 2), +\infty)$,

因为 $f(a - 2) > f(0) = a - 2$, 所以不满足 $M \subseteq N$.

因此 $0 < a \leq 2$ 且 $a \neq 1$, 所以 a 的最大值是 2.

故答案为: 2.

跟踪训练 3 已知 $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & (x \leq 1) \\ 2x - 1, & (x > 1) \end{cases}$, 则函数 $F(x) = f(f(x)) - 2f(x)$ 的值域为 _____.

【答案】 $[-2, 1]$

【分析】先求出 $f(x)$ 的值域, 并以此为定义域求函数 $F(t) = f(t) - 2t$ 的值域.

【详解】由题: $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & (x \leq 1) \\ 2x - 1, & (x > 1) \end{cases}$,

$x \in (-\infty, 1], f(x) \in [0, +\infty)$, $x \in (1, +\infty), f(x) \in (1, +\infty)$, 所以 $f(x)$ 的值域 $[0, +\infty)$,

令 $t = f(x) \in [0, +\infty)$,

函数 $F(x) = f(f(x)) - 2f(x)$ 的值域即 $F(t) = f(t) - 2t, t \in [0, +\infty)$ 的值域,

$$F(t) = \begin{cases} -3t + 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ -1, & t > 1 \end{cases},$$

当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $F(t) \in [-2, 1]$, 当 $t > 1$ 时, $F(t) = -1$,

所以其值域为 $[-2, 1]$.

综上所述: 函数 $F(x) = f(f(x)) - 2f(x)$ 的值域为 $[-2, 1]$.

故答案为: $[-2, 1]$



2. 当堂检测

例 1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ (\frac{1}{2})^x, & x > a \end{cases}$ 若 $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $-2 \leq a < 0$ 或 $a \leq -4$

分别求出当 $x > a$ 及 $x \leq a$ 时 $f(x)$ 的范围, 结合函数的值域可得关于 a 的不等式, 利用导数可求实数 a 的取值范围.

【详解】 当 $x > a$ 时, $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^a$,

若 $a \geq 0$, 则当 $x \leq a$ 时, $x^2 \geq 0$, 这与函数的值域为 $(0, +\infty)$ 矛盾,

若 $a < 0$, 则当 $x \leq a$ 时, $x^2 \geq a^2$, 因为函数的值域为 $(0, +\infty)$,

故 $a^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^a = 2^{-a}$, 令 $t = -a$, 则 $t > 0$ 且 $t \leq 2^{\frac{t}{2}}$ 即 $t - 2^{\frac{t}{2}} \leq 0$,

令 $g(t) = t - 2^{\frac{t}{2}}$, 则 $g'(t) = 1 - 2^{\frac{t}{2}-1} \ln 2$,

当 $0 < t < 2 + 2\log_2 \frac{1}{\ln 2}$ 时, $g'(t) > 0$, 当 $t > 2 + 2\log_2 \frac{1}{\ln 2}$, $g'(t) < 0$,

故 $g(t)$ 在 $\left(0, 2 + 2\log_2 \frac{1}{\ln 2}\right)$ 上为增函数, 在 $\left(2 + 2\log_2 \frac{1}{\ln 2}, +\infty\right)$ 上为减函数,

又 $2 < e < 4$, 故 $\ln 2 < 1 < 2\ln 2$ 即 $1 < \frac{1}{\ln 2} < 2$, 所以 $0 < \log_2 \frac{1}{\ln 2} < 1$,

所以 $2 < 2 + 2\log_2 \frac{1}{\ln 2} < 4$, 而 $g(2) = 2 - 2^{\frac{2}{2}} = 0$, $g(4) = 4 - 2^{\frac{4}{2}} = 0$,

故 $g(t) \leq 0$ 的解为 $0 < t \leq 2$ 或 $t \geq 4$, 故 $-2 \leq a < 0$ 或 $a \leq -4$. 故答案为: $-2 \leq a < 0$ 或 $a \leq -4$.

例 2 规定, 若函数 $f(x)$ 在定义域 $[m, n]$ ($1 < m < n$) 上的值域是 $[m^3, n^3]$, 则称该函数为“绅士风度”函数. 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 为“绅士风度”函数, 则 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left(1, e^{\frac{3}{e}}\right)$

【分析】 由新定义可得方程 $a^x = x^3$ 有两个不相等的实根, 两边取自然对数, 转化为 $\ln a = \frac{3\ln x}{x}$ ($x > 1$) 有两个不相等的实根, 令函数 $g(x) = \frac{3\ln x}{x}$ ($x > 1$), 分析其单调性得其最值, 即可得到所求 a 的范围.

【详解】 由新定义可得函数 $f(x) = a^x$ 在定义域 $[m, n]$ ($1 < m < n$) 上的值域是 $[m^3, n^3]$, 即方程 $a^x = x^3$ ($x > 1$) 有两个不相等的实根,

即有 $\ln a^x = \ln x^3$ ($x > 1$), 即 $\ln a = \frac{3\ln x}{x}$ ($x > 1$) 有两个不相等的实根.

令 $g(x) = \frac{3\ln x}{x}$ ($x > 1$), 则 $g(x)$ 的导数为 $g'(x) = \frac{3 - 3\ln x}{x^2}$,

所以当 $x > e$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 递减, 当 $1 < x < e$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 递增,

即有 $x = e$ 取得最大值 $\frac{3}{e}$, 且 $x \rightarrow +\infty$, $g(x) > 0$, $g(1) = 0$, 所以 $0 < g(x) \leq \frac{3}{e}$,

所以有 $0 < \ln a < \frac{3}{e}$. 解得 $1 < a < e^{\frac{3}{e}}$. 故答案为: $\left(1, e^{\frac{3}{e}}\right)$.

例 3 设函数 $h(x)$ 的定义域为 D , 若满足条件: 存在 $[a, b] \subseteq D$, 使 $h(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域为 $[2a, 2b]$, 则称 $h(x)$ 为“倍胀函数”. 若函数 $f(x) = \ln x + t$ 为“倍胀函数”, 则实数 t 的取值范围是 _____.

【答案】 $(1 + \ln 2, +\infty)$

根据定义及函数的单调性, 可得方程 $\ln x - 2x + t = 0$ 有两个不等的实数根, 构造函数 $g(x) = \ln x - 2x + t$, 通过求导求得极值点, 代入 $g(x)$, 求得 $g(x)$ 的最大值, 进而可求解.

【详解】 因为函数 $f(x) = \ln x + t$ 为“倍胀函数”, 且定义域为 $(0, +\infty)$, 所以存在 $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$, 使 $f(x)$

在 $[a, b]$ 上的值域为 $[2a, 2b]$. 因为 $f(x)$ 为增函数, 所以 $\begin{cases} \ln a + t = 2a \\ \ln b + t = 2b \end{cases}$, 所以方程 $\ln x - 2x + t = 0$ 有两个不等的实数根. 令 $g(x) = \ln x - 2x + t (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - 2$, 令 $g'(x) = \frac{1}{x} - 2 = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$. 易知 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(x)_{\max} = g(\frac{1}{2}) = \ln \frac{1}{2} - 1 + t = t - 1 - \ln 2$. 易知当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $g(x) \rightarrow -\infty$, 所以要使方程 $\ln x - 2x + t = 0$ 有两个不等的实数根, 只需 $t - 1 - \ln 2 > 0$, 得 $t > 1 + \ln 2$, 所以 t 的取值范围为 $(1 + \ln 2, +\infty)$.
故答案为: $(1 + \ln 2, +\infty)$

例 4 已知函数 $f(x) = 3\ln x - \frac{1}{2}ax^2 + (a-3)x + 2a - 1 (a > 0)$, $f(x) > 0$ 的解集为 (m, n) , 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的值域与函数 $f(f(x))$ 在 (m, n) 上的值域相同, 则实数 a 的取值范围为 _____.

【答案】 $[2, +\infty)$

【分析】 对 (x) 求导, 分析导函数的正负, 得到函数 $f(x)$ 的单调性, 进而得其值域, 再设 $t = f(x)$, 由已知得需 $f(1) \geq 1$, 解之求得 a 的范围.

【详解】 由已知得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = \frac{3}{x} - ax + a - 3 = \frac{-[ax^2 - (a-3)x - 3]}{x} = \frac{-(ax+3)(x-1)}{x}$, $\because a > 0, \therefore -\frac{3}{a} < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减; $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的值域为 $(-\infty, f(1)]$;

根据题意有 $f(1) = \frac{5a}{2} - 4 > 0$; $f(x) > 0$ 的解集为 (m, n) ,

则设 $t = f(x)$, 当 $t \in (m, n)$ 时, $t = f(x) \in (0, f(1)]$; $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的值域与函数 $f(f(x))$ 在 (m, n) 上的值域相同;

即 $f(t)$ 在 $(0, f(1)]$ 上的值域为 $(-\infty, f(1)]$; 只需 $f(1) \geq 1$, 即 $f(1) = \frac{5a}{2} - 4 \geq 1$, 得 $a \geq 2$.

故答案为: $[2, +\infty)$.

例 5 二次函数 $f(x)$ 满足: $f(2-x) = f(2+x)$, 又 $f(2) = 1, f(1) = 2$, 若 $y = f(x)$ 在 $[-1, t]$ 上的值域为 $[1, 10]$, 则实数 t 的取值范围是 _____.

【答案】 $[2, 5]$

【详解】

因为二次函数 $f(x)$ 满足: $f(2-x) = f(2+x)$, 所以可设 $f(x) = a(x-2)^2 + b$, 又 $f(2) = 1, f(1) = 2, \therefore a = 1, b = 1, f(x) = (x-2)^2 + 1, \therefore f(x)_{\min} = f(2) = 1$, 又 $y = f(x)$ 在 $[-1, t]$ 上的值域为 $[1, 10], f(-1) = 10, f(5) = 10$ 所以 $2 \leq t \leq 5$, 即实数 t 的取值范围是 $[2, 5]$, 故答案为 $[2, 5]$.

例 6 已知 $a > 2b (a, b \in \mathbb{R})$, 函数 $f(x) = ax^2 + x + 2b$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 $\frac{a^2 + 4b^2}{a - 2b}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【分析】 由函数 $f(x) = ax^2 + x + 2b$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 可得 $8ab = 1, \frac{a^2 + 4b^2}{a - 2b}$ 化为 $a - 2b + \frac{1}{2(a - 2b)}$, 利用基本不等式可得结果.

【详解】 $\because f(x) = ax^2 + x + 2b$ 的值域为 $[0, +\infty), \therefore \begin{cases} a > 0 \\ 1^2 - 4 \times 2a \times b = 0, 8ab = 1, \end{cases}$

$$\frac{a^2 + 4b^2}{a - 2b} = \frac{(a - 2b)^2 + 4ab}{a - 2b} = a - 2b + \frac{1}{2(a - 2b)}, \therefore a > 2b, \therefore a - 2b > 0, a - 2b + \frac{1}{2(a - 2b)} \geq$$

$$2\sqrt{(a - 2b) \times \frac{1}{2(a - 2b)}} = \sqrt{2},$$

当 $a - 2b = \frac{1}{2(a - 2b)}$, 即 $a - 2b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立, 所以 $\frac{a^2 + 4b^2}{a - 2b}$ 的最小值为 $\sqrt{2}$, 故答案为 $\sqrt{2}$.

例 7 函数 $f(x) = (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)(\sqrt{1-x^2} + 1)$ 的值域为 _____.

【答案】 $[2 + \sqrt{2}, 8]$

【详解】 由已知得 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$.

令 $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$, 则 $t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \in [2, 4]$.

又 $t \geq 0$, 故 $t \in [\sqrt{2}, 2]$, 且 $f(x) = g(t) = (t+2)\frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}t^3 + t^2$.

显然, $g(t)$ 在区间 $[\sqrt{2}, 2]$ 上单调递增, 因此 $g(t)$ 即 $f(x)$ 的值域为 $[2 + \sqrt{2}, 8]$.

例 8 若二次函数 $f(x) = ax^2 - 4x + 2c$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 $\frac{a}{4c^2 + 4} + \frac{2c}{a^2 + 4}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【分析】 由题意可知, $a > 0, \Delta = 0$, 从而求出 $ac = 0$, 将所求式子中的 4 代换成 $2ac$, 利用裂项法进行整理, 进而利用均值不等式求出最小值.

【详解】 $\because$ 二次函数 $f(x) = ax^2 - 4x + 2c (x \in \mathbb{R})$ 的值域为 $[0, +\infty)$,

$\therefore a > 0, \Delta = 16 - 8ac = 0, \therefore a > 0, c > 0, ac = 2$,

$$\therefore \frac{a}{4c^2 + 4} + \frac{2c}{a^2 + 4} = \frac{a}{4c^2 + 2ac} + \frac{2c}{a^2 + 2ac} = \frac{a}{2c(2c + a)} + \frac{2c}{a(2c + a)} = \frac{1}{2c} - \frac{1}{a + 2c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a + 2c} =$$

$$\frac{1}{2c} + \frac{1}{a} - \frac{2}{a + 2c} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2c}} - \frac{2}{2\sqrt{a \cdot 2c}} = \frac{1}{2},$$

当且仅当 $a = 2c = 2$ 时取等号, 故答案为 $\frac{1}{2}$.

例 9 已知函数 $f(x) = x|x^2 - 3a|$ 在 $x \in [0, 2]$ 的值域为 $[0, 4m]$, 则实数 m 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【详解】 因为 $f(x) = x|x^2 - 3a|, x \in [0, 2]$, 所以 $[f(x)]^2 = x^2(x^2 - 3a)^2, x \in [0, 2]$, 令 $t = x^2, t \in [0, 4]$, 则 $g(t) = t(t - 3a)^2 = t^3 - 6at^2 + 9a^2t, g'(t) = 3(t - a)(t - 3a)$,

(1) 当 $a \leq 0$ 时, $g'(t) = 3(t - a)(t - 3a) \geq 0$ 在 $[0, 4]$ 上恒成立, 即函数 $g(t)$ 在 $[0, 4]$ 上单调递增, 则 $g(4) = 4(4 - 3a)^2 = 16m^2$, 即 $m = 2 - \frac{3}{2}a \geq 2$;

(2) 当 $a > 0$ 时, 函数 $g(t)$ 在 $[0, a]$ 单调递增, 在 $[a, 3a]$ 上单调递减, 在 $[3a, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g(4a) = g(a) = 4a^3, g(3a) = g(0) = 0$,

①若 $a \geq 4$ 时, 则 $g(t)$ 在 $[0, 2]$ 单调递增, 则 $g(4) = 4(4 - 3a)^2 = 16m^2$, 即 $m = \frac{3}{2}a - 2 > 4$;

②若 $a < 4 \leq 4a$, 即 $1 \leq a < 4$ 时, $g(t)_{\max} = g(a) = 4a^3 = 16m^2$, 即 $m = \frac{a\sqrt{a}}{2} \geq \frac{1}{2}$;

③若 $4 > 4a$, 即 $0 < a < 1$ 时, $g(t)_{\max} = g(4) = 4(4 - 3a)^3 = 16m^2$, 即 $m = 2 - \frac{3}{2}a \geq \frac{1}{2}$;

综上所述, $m \geq \frac{1}{2}$, 即实数 m 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

例 10 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $[-2.5] = -3$, $[2.5] = 2$, 设函数 $f(x) = [x[x]]$, 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, n)$, $n \in N_+$, 则其值域中元素个数为 _____.

【答案】 $\frac{n^2-n+2}{2}$

【详解】 $\because f(x)$ 的定义域是 $[0, n)$, $n \in N_+$,

$\therefore$ 当 $0 \leq x < 1$ 时, $[x] = 0$, $f(x) = [x[x]] = [x \times 0] = [0] = 0$, 函数值有 1 个;

当 $1 \leq x < 2$ 时, $[x] = 1$, $f(x) = [x[x]] = [x \times 1] = [x] = 1$, 函数值有 1 个;

当 $2 \leq x < 3$ 时, $4 \leq 2x < 6$, $[x] = 2$, $f(x) = [x[x]] = [x \times 2] = [2x]$, 能取到 4, 5, 函数值有 2 个;

当 $3 \leq x < 4$ 时, $9 \leq 3x < 12$, $[x] = 3$, $f(x) = [x[x]] = [x \times 3] = [3x]$, 能取到 9, 10, 11, 函数值有 3 个;

当 $4 \leq x < 5$ 时, $16 \leq 4x < 20$, $[x] = 4$, $f(x) = [x[x]] = [x \times 4] = [4x]$, 能取到 16, 17, 18, 19, 函数值有 4 个, ...

当 $n-1 \leq x < n$ 时, $(n-1)^2 \leq (n-1)x < n(n-1)$, $[x] = n-1$, $f(x) = [x[x]] = [x \times (n-1)] = [(n-1)x]$, 能取到 $(n-1)^2, (n-1)^2+1, (n-1)^2+2, \dots, n(n-1)-1$, 函数值有 $n-1$ 个, $\therefore$ 值域中元素个数为: $1+2+3+\dots+(n-1) = \frac{n^2-n+2}{2}$, 故答案为 $\frac{n^2-n+2}{2}$.

例 11 已知函数 $f(x) = \frac{2^x+1}{2^{x+1}+a}$ ($a \in \mathbf{R}$) 为奇函数, 且 $y=f(x)$ 的图象和函数 $g(x) = m+2^x$ 的图象交于不同的两点 A, B , 若线段 AB 的中点 M 在直线 $y = \frac{1}{4}$ 上, 则 $g(x)$ 的值域为 ()

A. $(-2, +\infty)$

B. $(-1, +\infty)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(2, +\infty)$

【答案】 B

【分析】 利用 $f(x)$ 为奇函数求得 a , 联立 $\begin{cases} y = \frac{2^x+1}{2^{x+1}-2} \\ y = m+2^x \end{cases}$, 化简后写出根与系数关系, 根据 AB 的中点 M 的

纵坐标求得 m , 进而求得 $g(x)$ 的值域.

因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-1) = -f(1)$, 即 $\frac{2^{-1}+1}{2^{-1+1}+a} = -\frac{2^1+1}{2^{1+1}+a}$, 解得 $a = -2$,

经检验 $f(x) = \frac{2^x+1}{2^{x+1}-2}$ 为奇函数, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 符合题意.

联立 $\begin{cases} y = \frac{2^x+1}{2^{x+1}-2} \\ y = m+2^x \end{cases}$, 消去 2^x 得到关于 y 的二次方程 $2y^2 - (2m+3)y + m-1 = 0$,

$\Delta = (2m+3)^2 - 8(m-1) = 4m^2 + 4m + 41 = 4(m + \frac{1}{2})^2 + 40 > 0$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = m + \frac{3}{2}$,

因为 AB 的中点 M 的纵坐标为 $\frac{1}{4}$, 所以 $m + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, 解得 $m = -1$.

所以 $g(x) = -1 + 2^x$, 所以 $g(x)$ 的值域为 $(-1, +\infty)$.

故选: B

例 12 下列函数中, 值域为 $(0, +\infty)$ 的是 ()

A. $y = 3^{\frac{1}{x}}$

B. $y = 3^{1-x}$

C. $y = \sqrt{3^x - 1}$

D. $y = \sqrt{1 - 3^x}$

【答案】 B

【分析】 根据函数解析式, 逐项求出值域即可求解.

因为 $y = 3^{\frac{1}{x}}$ 的值域为 $\{y|y > 0 \text{ 且 } y \neq 1\}$;

$y = 3^{1-x}$ 的值域为 $\{y|y > 0\}$;

$y = \sqrt{3^x - 1}$ 的值域为 $[0, +\infty)$;

$y = \sqrt{1 - 3^x}$ 的值域为 $[0, 1)$.

故选: B

例 13 函数 $f(x) = \frac{2^{x+1}}{2^x + 1}$ 的值域为 ()

A. (0,1)

B. (0,1]

C. (0,2)

D. (1,2)

【答案】C

【分析】化简得 $f(x) = 2 - \frac{2}{2^x + 1}$, 再利用指数函数的性质和不等式的性质逐步求出函数的值域.

$$f(x) = \frac{2^{x+1}}{2^x + 1} = f(x) = \frac{2(2^x + 1) - 2}{2^x + 1} = 2 - \frac{2}{2^x + 1},$$

因为 $2^x > 0$, $\therefore 2^x + 1 > 1$, $\therefore 0 < \frac{1}{2^x + 1} < 1$,

$\therefore -1 < -\frac{1}{2^x + 1} < 0$, $\therefore -2 < -\frac{2}{2^x + 1} < 0$, $\therefore 0 < 2 - \frac{2}{2^x + 1} < 2$,

所以函数 $f(x) = \frac{2^{x+1}}{2^x + 1}$ 的值域为 $(0, 2)$.

故选: C

例 14 下列函数中与函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$ 的值域相同的是 ()

A. $y = x^2 - 1$

B. $y = 2^x + 1$

C. $y = \tan 2x$

D. $y = \frac{1}{x-1}$

【答案】C

【分析】根据反比例函数, 二次函数, 对数函数, 指数函数, 正切函数的性质分别求出各函数的值域, 由此作出判断.

由对数函数性质可得函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$ 的值域为 R ,

由二次函数性质可得函数 $y = x^2 - 1$ 的值域为 $[-1, +\infty)$,

由指数函数性质可得函数 $y = 2^x + 1$ 的值域为 $(1, +\infty)$,

由正切函数性质可得函数 $y = \tan 2x$ 的值域为 R ,

由反比例函数性质可得函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的值域为 $\{x|x \neq 0\}$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$ 与 $y = \tan 2x$ 的值域相同,

故选: C.

例 15 若函数 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x+1} (x \geq 0)$ 的值域为 $[a, +\infty)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 2]$

B. $[0, 1]$

C. $(-\infty, 1]$

D. $[1, 2]$

【答案】A

由 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x+1} = \frac{(x+1)^2 + a - 1}{x+1} = (x+1) + \frac{a-1}{x+1}$, 然后分 $a-1 \leq 0$ 和 $a > 1$ 判断函数的单调性, 再求出其最小值, 从而可求出其值域, 进而可求出 a 的取值范围

解: $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2 + a - 1}{x + 1} = (x + 1) + \frac{a - 1}{x + 1}$,

当 $a - 1 \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(0) = a$, 此时 $a \leq 1$,

当 $a > 1$ 时, 由 $f(x) = (x + 1) + \frac{a - 1}{x + 1} \geq 2\sqrt{a - 1}$,

当且仅当 $x + 1 = \sqrt{a - 1}$, 即 $x = \sqrt{a - 1} - 1$ 时取等号,

因为 $f(x)$ 在 $(\sqrt{a - 1}, +\infty)$ 上单调递增, $f(0) = a$

若 $f(x)$ 的值域为 $[a, +\infty)$, 则有 $\sqrt{a - 1} - 1 \leq 0$, 即 $a \leq 2$, 则 $1 < a \leq 2$,

综上, $a \leq 2$,

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$

故选: A

例 16 方程 $\frac{x|x|}{16} + \frac{y|y|}{9} = -1$ 的曲线即为函数 $y = f(x)$ 的图像, 对于函数 $y = f(x)$, 有如下结论: ① $f(x)$ 在 R 上单调递减; ② 函数 $F(x) = 4f(x) + 3x$ 不存在零点; ③ 函数 $y = f(x)$ 的值域是 R ; ④ 若函数 $g(x)$ 和 $f(x)$ 的图像关于原点对称, 则 $y = g(x)$ 由方程 $\frac{x|x|}{16} + \frac{y|y|}{9} = -1$ 确定. 其中所有正确的命题序号是 _____.

【答案】 ①②③

【分析】 分段去绝对值符号, 将方程 $\frac{x|x|}{16} + \frac{y|y|}{9} = -1$ 化简得函数 $f(x)$ 在相应区间上的解析式, 分析 $f(x)$ 在各段上的性质可判断①③;

由函数 $y = f(x)$ 的图像与直线 $y = -\frac{3}{4}x$ 的公共点情况可判断②; 求出 $f(x)$ 的图像关于原点对称的图象对应方程判断④作答.

【详解】 当 $x \geq 0$ 且 $y \geq 0$ 时, 方程 $\frac{x|x|}{16} + \frac{y|y|}{9} = -1$ 不成立,

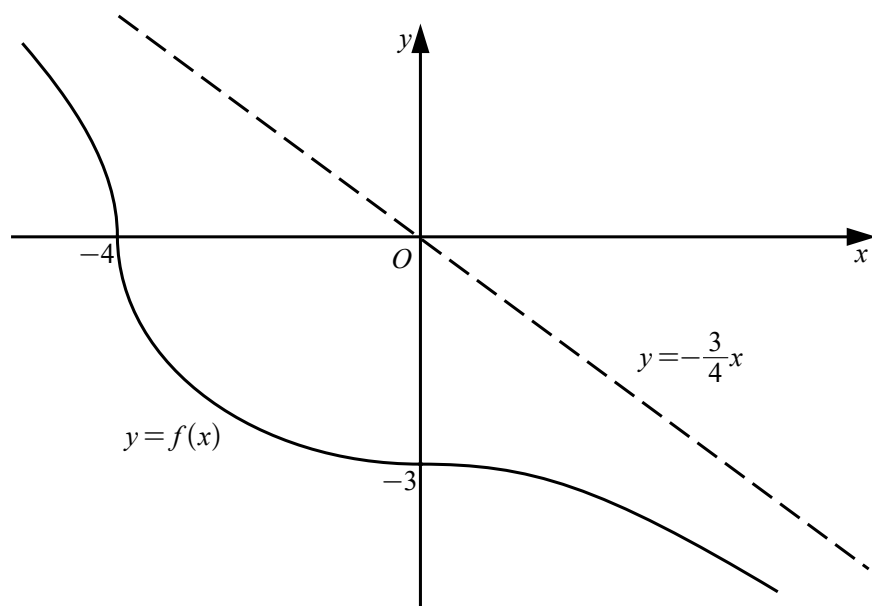
当 $x \leq 0$ 且 $y \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$ 在 $(-\infty, -4]$ 上单调递减, 函数值的集合为 $[0, +\infty)$,

当 $x \leq 0$ 且 $y < 0$ 时, $f(x) = -\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$ 在 $(-4, 0]$ 上单调递减, 函数值的集合为 $[-3, 0)$,

当 $x > 0$ 且 $y \leq 0$ 时, $f(x) = -\frac{3}{4}\sqrt{x^2 + 16}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 函数值的集合为 $(-\infty, -3)$,

函数 $y = f(x)$ 的图像分别是双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 在 $x \leq 0$ 且 $y \geq 0$ 的部分,

椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 在 $x \leq 0$ 且 $y < 0$ 的部分和双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$ 在 $x > 0$ 且 $y \leq 0$ 的部分组成, 如图,



函数 $f(x)$ 在 R 上是单调递减的, ①正确; 函数 $y=f(x)$ 的值域是 R , ③正确;

由 $F(x)=4f(x)+3x=0$ 得 $f(x)=-\frac{3}{4}x$, 因双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 和双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$ 的一条渐近线均为直线 $y=-\frac{3}{4}x$,

于是得函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=-\frac{3}{4}x$ 无公共点, 因此, 函数 $F(x)=4f(x)+3x$ 不存在零点, ②正确;

若函数 $g(x)$ 和 $f(x)$ 的图像关于原点对称, 则用 $-x, -y$ 分别替换方程 $\frac{x|x|}{16}+\frac{y|y|}{9}=-1$ 中的 x, y 就得函数 $y=g(x)$ 图象对应的方程,

因此有 $\frac{-x|-x|}{16}+\frac{-y|-y|}{9}=-1$, 即 $\frac{x|x|}{16}+\frac{y|y|}{9}=1$, 于是得 $y=g(x)$ 由方程 $\frac{x|x|}{16}+\frac{y|y|}{9}=1$ 确定, ④不正确,

所以正确的命题序号是①②③.

故答案为: ①②③