

题型 26 有关三角形中的范围问题

1 【方法点拨】

1. 正弦平方差公式 $\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a-b)\sin(a+b)$.
2. 化边、化角、作高三个方向如何选择是难点,但一般来说,涉及两内角正切间的等量关系时作高更简单些.

2 【典型题示例】

题目 1 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $a^2 - b^2 = bc$, 则 $\frac{1}{\tan B} - \frac{1}{\tan A} + 2\sin A$ 的取值范围为 _____.

【答案】 $\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, 3\right)$

【解析】 $\because a^2 - b^2 = bc$, 利用正弦定理可得: $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin B \sin C$,

由正弦平方差公式得 $\sin(A-B)\sin(A+B) = \sin B \sin C$,

即 $\sin(A-B)\sin C = \sin B \sin C$,

易知 $\sin C \neq 0$, 故 $\sin(A-B) = \sin B$

又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $\therefore A-B=B$, 即 $A=2B$,

$$\therefore \begin{cases} 0 < 2B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \pi - 3B < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \therefore \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{\tan B} - \frac{1}{\tan A} + 2\sin A = \frac{\sin(A-B)}{\sin B \sin A} + 2\sin A = \frac{1}{\sin A} + 2\sin A$$

$$\text{又 } \frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2}, \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin A < 1, \text{ 令 } t = \sin A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} < t < 1 \right), \text{ 则 } f(t) = \frac{1}{t} + 2t \left(\frac{\sqrt{3}}{2} < t < 1 \right),$$

由对勾函数性质知, $f(t) = \frac{1}{t} + 2t$ 在 $t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right)$ 上单调递增,

$$\text{又 } f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}, f(1) = \frac{1}{1} + 2 \times 1 = 3,$$

$$\therefore \frac{1}{\sin A} + 2\sin A \in \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, 3 \right).$$

题目 2 若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\sin A + \sqrt{2}\sin B = 2\sin C$, 则 $\cos C$ 的最小值是 _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

【分析】 将已知和所求都“化边”, 然后使用基本不等式即可. 所求 $\cos C$ 的最值可想到余弦定理用边进行表示, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 考虑 $\sin A + \sqrt{2}\sin B = 2\sin C$ 角化边得到: $a + \sqrt{2}b = 2c$, 进而消去 c 计算表达式的最值即可. (公众号: 钻研数学)

【解析】 $\because \sin A + \sqrt{2}\sin B = 2\sin C$.

由正弦定理可得 $a + \sqrt{2}b = 2c$, 即 $c = \frac{a + \sqrt{2}b}{2}$,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - \left(\frac{a + \sqrt{2}b}{2}\right)^2}{2ab} = \frac{3a^2 + 2b^2 - 2\sqrt{2}ab}{8ab} \geq \frac{2\sqrt{6}ab - 2\sqrt{2}ab}{8ab}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

当且仅当 $3a^2 = 2b^2$ 即 $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 时等号成立.

$\therefore \cos C$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

题目 3 在锐角三角形 ABC 中, 已知 $2\sin^2 A + \sin^2 B = 2\sin^2 C$, 则 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}$ 的最小值为_____.

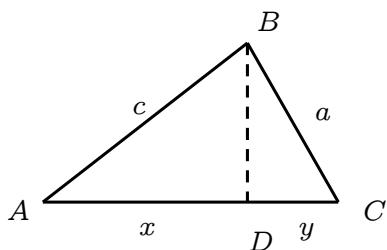
【答案】 $\frac{\sqrt{13}}{2}$

【解析一】(作高线, 化斜为直, 角化边) 由正弦定理, 得: $2a^2 + b^2 = 2c^2$,

如图, 作 $BD \perp AC$ 于 D , 设 $AD = x$, $CD = y$, $BD = h$,

因为 $2a^2 + b^2 = 2c^2$, 所以, $2(y^2 + h^2) + (x + y)^2 = 2(x^2 + h^2)$, 化简, 得:

$x^2 - 2xy - 3y^2 = 0$, 解得: $x = 3y$



$$\tan(A + C) = -\tan B, \frac{\tan A + \tan C}{1 - \tan A \tan C} = -\tan B, \frac{1 - \tan A \tan C}{\tan A + \tan C} = -\frac{1}{\tan B},$$

$$\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} = \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C} + \frac{\tan A \tan C - 1}{\tan A + \tan C} = \frac{x}{h} + \frac{y}{h} + \frac{\frac{h^2}{xy} - 1}{\frac{h}{x} + \frac{h}{y}}$$

$$= \frac{4y}{h} + \frac{h^2 - 3y^2}{4yh} = \frac{13y}{4h} + \frac{h}{4y} \geq \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

【解析二】(边化角)

由正弦定理, 得: $2a^2 + b^2 = 2c^2$, 即 $2(b^2 + c^2 - a^2) = 3b^2$,

由余弦定理得: $4bccosA = 3b^2$, 即 $4ccosA = 3b$,

由正弦定理, 得: $4\sin C \cos A = 3\sin B$, 即 $4\sin C \cos A = 3\sin(A + C)$, 化简得 $\tan C = 3\tan A$,

$$\text{以 } \tan A \text{ 主元, 化简 } \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} \text{ 得 } \frac{3}{4} \tan A + \frac{13}{12 \tan A} \geq 2\sqrt{\frac{3}{4} \tan A \cdot \frac{13}{12 \tan A}} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

题目 4 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a^2 + b^2 + 2c^2 = 8$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为_____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析一】(余弦定理 + 二次函数)

看到式子 $a^2 + b^2 + 2c^2 = 8$ 的结构特征, 联想余弦定理得:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3a^2 + 3b^2 - 8}{4ab} \geq \frac{3}{2} - \frac{2}{ab}$$

$$\text{所以 } S^2 = \frac{1}{4}(ab)^2 \sin^2 C \leq \frac{1}{4}(ab)^2 \left[1 - \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{ab} \right)^2 \right] = -\frac{5}{16}(ab)^2 + \frac{3}{2}ab - 1$$

当 $ab = \frac{12}{5}$ 时, $[S^2]_{\max} = \frac{4}{5}$, $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析二】(三角形中线长定理 + 基本不等式)

设 BC 边上的中线为 AM , 则 $2(a^2 + b^2) = c^2 + 4AM^2$

$$\because a^2 + b^2 + 2c^2 = 8 \quad \therefore a^2 + b^2 = 8 - 2c^2$$

代入得: $2(8 - 2c^2) = c^2 + 4AM^2$, 即 $5c^2 + 4AM^2 = 16$

根据基本不等式得: $5c^2 + 4AM^2 = 16 \geq 2\sqrt{5c^2 \times 4AM^2} = 4\sqrt{5}AM \cdot c$

又因为三角形一边上的中线不小于该边上的高

所以 $4\sqrt{5}AM \cdot c \geq 8\sqrt{5}S$

所以 $16 \geq 8\sqrt{5}S$, $S \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 当且仅当中线等于高, 即中线垂直于底边时, 等号成立, 此时 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解法三】(隐圆)

以 AB 的中点为原点, AB 所在直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系.

设 $A(-\frac{c}{2}, 0)$, $B(\frac{c}{2}, 0)$, $C(x, y)$, 则由 $a^2 + b^2 + 2c^2 = 8$, 得 $(x - \frac{c}{2})^2 + y^2 + (x + \frac{c}{2})^2 + y^2 + 2c^2 = 8$, 即 $x^2 + y^2 = 4 - \frac{5}{4}c^2$, 所以点 C 在以原点 $(0, 0)$ 为圆心, $\sqrt{4 - \frac{5}{4}c^2}$ 为半径的圆上, 所以 $S \leq \frac{c}{2} \sqrt{4 - \frac{5}{4}c^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\left(4 - \frac{5}{4}c^2 \right) + \frac{5}{4}c^2 \right] \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3 【巩固训练】

例 1 (多选题) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a^2 = b^2 + bc$, 则角 A 可为 ()

A. $\frac{3\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{7\pi}{12}$

D. $\frac{2\pi}{3}$

【答案】BC

【解析】 $\because a^2 = b^2 + bc$, 利用正弦定理可得: $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin B \sin C$,

由正弦平方差公式得 $\sin(A - B) \sin(A + B) = \sin B \sin C$,

即 $\sin(A - B) \sin C = \sin B \sin C$,

易知 $\sin C \neq 0$, 故 $\sin(A - B) = \sin B$

$\therefore A - B = B$, 即 $A = 2B$

$\because 0 < A + B < \pi$, $\therefore 0 < A + \frac{1}{2}A < \pi$, $\therefore 0 < A < \frac{2}{3}\pi$, 故选: BC.

例 2 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos \frac{A - C}{2} = 2 \sin \frac{B}{2}$, 则 $\cos B$ 的最小值是 _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【提示】已知可化为 $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{\pi - A - C}{2} = 2 \cos \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right)$

$= 2 \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \right)$, 弦化切得 $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$

$$\therefore \tan \frac{B}{2} = \frac{1}{\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2}\right)} = \frac{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2}} \leq \frac{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}}{2\sqrt{\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \frac{B}{2} \leq \frac{\pi}{6}, B \leq \frac{\pi}{3}, \therefore \cos B \geq \frac{1}{2}.$$

例 3 已知 $\triangle ABC$ 中, $\sin A + 2\sin B \cos C = 0$, 则 $\tan A$ 的最大值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【答案】A

【提示】化边、化角、作高三个方向均可解决.

例 4 若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\sin A + \sin B = 2\sin C$, 则角 C 的最大值是 _____.

【答案】 $\frac{\pi}{3}$

【解析】由 $\sin A + \sin B = 2\sin C$ 可得: $a + b = 2c$, $\therefore c = \frac{a+b}{2}$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{2ab} = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab}{2ab} \geq$$

$$\frac{2\sqrt{\frac{3}{4}a^2 \cdot \frac{3}{4}b^2} - \frac{1}{2}ab}{2ab} = \frac{1}{2} \therefore \cos C \text{ 在 } (0, \pi) \text{ 递减, } \therefore 0 < C \leq \frac{\pi}{3}$$

例 5 已知在锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $b^2 = a(a+c)$, 则 $\frac{a \sin A}{b \cos A - a \cos B}$ 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

【答案】C

【解析】由 $b^2 = a(a+c)$ 得: $\sin^2 B = \sin^2 A + \sin A \sin C$, 即 $\sin^2 B - \sin^2 A = \sin A \sin C$

即 $\sin(B+A)\sin(B-A) = \sin A \sin C$,

而 $\sin(B+A) = \sin C \neq 0$, 所以 $\sin(B-A) = \sin A$

又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $\therefore B-A = A$, 即 $B = 2A$,

$$\therefore \begin{cases} 0 < 2A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \pi - 3A < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \therefore \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{a \sin A}{b \cos A - a \cos B} = \frac{\sin^2 A}{\sin B \cos A - \sin A \cos B} = \frac{\sin^2 A}{\sin(B-A)} = \sin A \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

例 6 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , $a = 1$, $b \cos A - \cos B = 1$, 当 A, B 变化时, $\sin B - 2\lambda \sin^2 A$ 存在最大值, 则正数 λ 的取值范围为 _____.

- A. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

【答案】A**【解析】**由 $a=1, b\cos A - \cos B=1$ 得: $b\cos A - a\cos B=a$ 根据正弦定理得: $\sin B\cos A - \sin A\cos B = \sin A$, 即 $\sin(B-A) = \sin A$ 又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $\therefore B-A=A$, 即 $B=2A$,

$$\therefore \begin{cases} 0 < 2A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \pi - 3A < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \therefore \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} < 2A < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin B - 2\lambda \sin^2 A &= \sin 2A - \lambda(1 - \cos 2A) = \sin 2A + \lambda \cos 2A - \lambda \\ &= \sqrt{1 + \lambda^2} \sin(2A + \phi) - \lambda (\tan \phi = \lambda) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < 2A < \frac{\pi}{2}$$

 $\therefore$ 欲使 $\sin B - 2\lambda \sin^2 A$ 存在最大值, 必有 $2A + \phi = \frac{\pi}{2}$ $\therefore 0 < \phi < \frac{\pi}{6}$, 故 $\tan 0 < \tan \phi = \lambda < \tan \frac{\pi}{6}$, 即 $0 < \lambda < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

例 7 在 $\triangle ABC$ 中, 设角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\sqrt{2}a, b, c$ 成等差数列, 则 $\frac{3}{\sin A} + \frac{\sqrt{2}}{\sin C}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $2(\sqrt{3} + 1)$

$$\text{【解析】由题得 } 2b = \sqrt{2}a + c, \therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{c}{2}\right)^2}{2ac},$$

$$\text{所以 } \cos B = \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{4}c^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}ac}{2ac} \geq \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{3}{4}c^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}ac}{2ac} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \text{ 所以 } 0 < B \leq 75^\circ, \therefore 0 < \sin B \leq \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\text{因为 } 2\sin B = \sqrt{2}\sin A + \sin C, \therefore \sqrt{2}\sin A + \sin C \leq \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \therefore \frac{\sqrt{2}\sin A + \sin C}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}} \leq 1.$$

$$\text{所以 } \frac{3}{\sin A} + \frac{\sqrt{2}}{\sin C} \geq \left(\frac{3}{\sin A} + \frac{\sqrt{2}}{\sin C}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}\sin A + \sin C}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{2} + \frac{2\sin A}{\sin C} + \frac{3\sin C}{\sin A}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}} \geq$$

$$\frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{2\sin A}{\sin C} \cdot \frac{3\sin C}{\sin A}}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}} = 2(\sqrt{3} + 1). \text{ 故答案为: } 2(\sqrt{3} + 1).$$