

导数压轴大题归类

目录

重难点题型归纳	1
【题型一】恒成立求参	1
【题型二】三角函数恒成立型求参	4
【题型三】同构双变量绝对值型求参	7
【题型四】零点型偏移证明不等式	10
【题型五】非对称型零点偏移证明不等式	14
【题型六】条件型偏移证明不等式	18
【题型七】同构型证明不等式	21
【题型八】先放缩型证明不等式	24
【题型九】放缩参数型消参证明不等式	26
【题型十】凸凹翻转型证明不等式	28
【题型十一】切线两边夹型证明不等式	30
【题型十二】切线放缩型证明不等式	32
【题型十三】构造一元二次根与系数关系型证明不等式	35
【题型十四】两根差型证明不等式	38
【题型十五】比值代换型证明不等式	41
【题型十六】幂指对与三角函数型证明不等式	43
【题型十七】不等式证明综合型	46
好题演练	50

一、

重难点题型归纳

题型一

恒成立求参



【典例分析】

例 1. 已知函数 $f(x) = (x + 2a)\ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论 $f'(x)$ 的单调性;

(2) 是否存在 $a \in \mathbf{Z}$, 使得 $f'(x) > a + 2$ 对 $\forall x > 1$ 恒成立? 若存在, 请求出 a 的最大值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $a > 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, 2a)$ 上单调递减, 在 $(2a, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 不存在满足条件的整数 a , 理由见解析

【分析】 (1) 构造新函数 $g(x) = f'(x)$, 分 $a \leq 0$ 及 $a > 0$ 两种情况, 利用导数研究函数的单调性即可求解; (2) 将问题进行转化 $x \ln x - x - ax + 2a > 0$, 构造新函数并求导, 分 $a \leq 0$ 和 $a > 0$ 两种情况分别讨论, 利用导数研究函数的单调性及最值, 整理求解.

(1)

因为 $f(x) = (x+2a)\ln x (x>0)$,所以 $f'(x) = \ln x + 1 + \frac{2a}{x}$.记 $g(x) = f'(x) = \ln x + 1 + \frac{2a}{x} (x>0)$,则 $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2a}{x^2} = \frac{x-2a}{x^2}$,当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;当 $a > 0$ 时, 由 $g'(x) > 0$, 解得 $x > 2a$,即 $g(x)$ 在 $(2a, +\infty)$ 上单调递增;由 $g'(x) < 0$, 解得 $0 < x < 2a$,即 $g(x)$ 在 $(0, 2a)$ 上单调递减.综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;当 $a > 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, 2a)$ 上单调递减, 在 $(2a, +\infty)$ 上单调递增.

(2)

假设存在 $a \in \mathbf{Z}$, 使得 $f'(x) > a+2$ 对任意 $x > 1$ 恒成立, 即 $x\ln x - x - ax + 2a > 0$ 对任意 $x > 1$ 恒成立.令 $h(x) = x\ln x - x - ax + 2a (x>1)$, 则 $h'(x) = \ln x - a$,当 $a \leq 0$ 且 $a \in \mathbf{Z}$ 时, $h'(x) > 0$, 则 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,若 $h(x) > 0$ 对任意 $x > 1$ 恒成立, 则 $h(1) = a - 1 \geq 0$, 即 $a \geq 1$, 矛盾, 故舍去;当 $a > 0$, 且 $a \in \mathbf{Z}$ 时, 由 $\ln x - a > 0$ 得 $x > e^a$;由 $\ln x - a < 0$ 得 $1 < x < e^a$,所以 $h(x)$ 在 $(1, e^a)$ 上单调递减, 在 $(e^a, +\infty)$ 上单调递增,所以 $h(x)_{\min} = h(e^a) = 2a - e^a$, 则令 $h(x)_{\min} = 2a - e^a > 0$ 即可.令 $G(t) = 2t - e^t (t>0)$, 则 $G'(t) = 2 - e^t$,当 $2 - e^t > 0$, 即 $t < \ln 2$ 时, $G(t)$ 单调递增;当 $2 - e^t < 0$, 即 $t > \ln 2$ 时, $G(t)$ 单调递减,所以 $G(t)_{\max} = G(\ln 2) = 2\ln 2 - 2 < 0$,所以不存在 $a > 0$ 且 $a \in \mathbf{Z}$, 使得 $2a - e^a > 0$ 成立.综上所述, 不存在满足条件的整数 a .**【技法指引】**

恒成立基本思维:

- ①若 $k \geq f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒成立, 则 $k \geq f(x)_{\max}$;
- ②若 $k \leq f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒成立, 则 $k \leq f(x)_{\min}$;
- ③若 $k \geq f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有解, 则 $k \geq f(x)_{\min}$;
- ④若 $k \leq f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有解, 则 $k \leq f(x)_{\max}$;

**【变式演练】**

例 1. 已知函数 $f(x) = \frac{1+x}{e^x}$, $g(x) = 1 - ax^2$.

- (1) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线平行, 求 a 的值;
 (2) 当 $x \in [0, 1]$ 时, 不等式 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $a = \frac{1}{2e}$ (2) $(-\infty, 1 - \frac{2}{e}]$

【分析】 (1) 分别求出 $f(x)$, $g(x)$ 的导数, 计算得到 $f'(1) = g'(1)$, 求出 a 的值即可;

(2) 问题转化为 $h(x) \leq 0$ 对任意 $x \in [0, 1]$ 的恒成立, 求导, 对参数分类讨论, 通过单调性与最值即可得到结果.

(1)

$$f'(x) = \frac{-x}{e^x}, f'(1) = -\frac{1}{e},$$

$$g'(x) = -2ax, g'(1) = -2a,$$

$$\text{由题意得: } -2a = -\frac{1}{e}, \text{ 解得: } a = \frac{1}{2e};$$

(2)

令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 即 $h(x) \leq 0$ 对任意 $x \in [0, 1]$ 的恒成立,

$$h'(x) = \frac{-x}{e^x} + 2ax,$$

① $a \leq 0$ 时, $h'(x) \leq 0$ 在 $x \in [0, 1]$ 的恒成立,

所以 $h(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减. $h(x)_{\max} = h(0) = 0$, 满足条件;

$$\text{② } a > 0 \text{ 时, } h'(x) = \frac{-x + 2axe^x}{e^x} = \frac{x(2ae^x - 1)}{e^x},$$

$$\text{令 } h'(x) = 0, \text{ 得 } x_1 = 0, x_2 = \ln \frac{1}{2a}$$

(i) 当 $\ln \frac{1}{2a} \leq 0$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) \geq 0$ 在 $x \in [0, 1]$ 的恒成立,

仅当 $x=0$ 时 $h'(x)=0$, 所以 $h(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增.

又 $h(0)=0$, 所以 $h(x) \geq 0$ 在 $[0, 1]$ 上恒成立, 不满足条件;

(ii) 当 $0 < \ln \frac{1}{2a} < 1$, 即 $\frac{1}{2e} < a < \frac{1}{2}$ 时,

当 $x \in [0, \ln \frac{1}{2a})$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 上单调递减,

当 $x \in (\ln \frac{1}{2a}, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 上单调递增,

$$\text{又 } h(0) = 0, h(1) = \frac{2}{e} - 1 + a \leq 0, \text{ 得 } a \leq 1 - \frac{2}{e},$$

$$\text{于是有 } \frac{1}{2e} < a \leq 1 - \frac{2}{e}.$$

(iii) 当 $\ln \frac{1}{2a} \geq 1$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{2e}$ 时, $x \in [0, 1]$ 时, $h'(x) \leq 0$, $h(x)$ 上单调递减,

又 $h(0)=0$, 所以 $h(x) \leq 0$ 对任意 $x \in [0, 1]$ 的恒成立, 满足条件

综上可得, a 的取值范围为 $(-\infty, 1 - \frac{2}{e}]$



题型二 三角函数恒成立型求参





【典例分析】

例 1. 已知函数 $f(x) = e^x + \cos x - 2$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

(1) 当 $x \geq 0$ 时, 求 $f'(x)$ 的最小值;

(2) 当 $x \geq -\frac{\pi}{2}$ 时, $xe^x + x\cos x - ax^2 - 2x \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) 1

(2) $(-\infty, 1]$

【分析】(1) 求导得 $f'(x) = e^x - \sin x$, 令 $g(x) = e^x - \sin x$, 利用导数分析 $g(x)$ 的单调性, 进而可得 $f'(x)$ 的最小值即可.

(2) 令 $h(x) = e^x + \cos x - ax - 2$, 问题转化为当 $x \geq -\frac{\pi}{2}$ 时, $x \cdot h(x) \geq 0$ 恒成立, 分两种

情况: 当 $a \leq 1$ 时和当 $a > 1$ 时, 判断 $x(e^x + \cos x - ax - 2) \geq 0$ 是否成立即可.

【详解】(1) 由题意, $f'(x) = e^x - \sin x$, 令 $g(x) = e^x - \sin x$, 则 $g'(x) = e^x - \cos x$,
当 $x \geq 0$ 时, $e^x \geq 1$, $\cos x \leq 1$, 所以 $g'(x) \geq 0$, 从而 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,
则 $g(x)$ 的最小值为 $g(0) = 0$, 故 $f'(x)$ 的最小值 0;

(2) 由已知得当 $x \geq -\frac{\pi}{2}$ 时, $x(e^x + \cos x - ax - 2) \geq 0$ 恒成立,

令 $h(x) = e^x + \cos x - ax - 2$, $h'(x) = e^x - \sin x - a$,

① 当 $a \leq 1$ 时, 若 $x \geq 0$ 时, 由 (1) 可知 $h'(x) \geq 1 - a \geq 0$, $\therefore h(x)$ 为增函数,
 $\therefore h(x) \geq h(0) = 0$ 恒成立, $\therefore x \cdot h(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $x(e^x + \cos x - ax - 2) \geq 0$ 恒成立,

若 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$, 令 $m(x) = e^x - \sin x - a$ 则 $m'(x) = e^x - \cos x$,

令 $n(x) = e^x - \cos x$, 则 $n'(x) = e^x + \sin x$,

令 $p(x) = e^x + \sin x$, 则 $p'(x) = e^x + \cos x$,

$\therefore$ 在 $p'(x)$ 在 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$ 内大于零恒成立, $\therefore$ 函数 $p(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0)$ 为单调递增,

又 $\therefore p(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} - 1 < 0$, $p(0) = 1$,

$\therefore p(x)$ 上存在唯一的 $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 使得 $p(x_0) = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, x_0)$ 时, $n'(x) < 0$, 此时 $n(x)$ 为减函数,

当 $x \in (x_0, 0)$ 时, $h'(x) > 0$, 此时 $n(x)$ 为增函数,

又 $\therefore n(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} > 0$, $n(0) = 0$,

$\therefore$ 存在 $x_1 \in (-\frac{\pi}{2}, x_0)$, 使得 $n(x_1) = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, x_1)$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 为增函数, 当 $x \in (x_1, 0)$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 为减函数,

又 $\therefore m(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} + 1 - a > 0$, $m(0) = 1 - a \geq 0$,

$\therefore x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 时, $h'(x) > 0$, 则 $h(x)$ 为增函数, $\therefore h(x) \leq h(0) = 0$,

$\therefore x(e^x + \cos x - ax - 2) \geq 0$ 恒成立,

② 当 $a > 1$ 时, $m'(x) = e^x - \cos x \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 则 $m(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数,

$\therefore m(0) = 1 - a < 0$, $m(\ln(1+a)) = e^{\ln(1+a)} - \sin(\ln(1+a)) - a = 1 - \sin(\ln(1+a)) \geq 0$,

$\therefore$ 存在唯一的 $x_2 \in (0, +\infty)$ 使 $h'(x_2) = 0$,

$\therefore$ 当 $0 \leq x < x_2$ 时, $h'(x) < 0$, 从而 $h(x)$ 在 $[0, x_2)$ 上单调递减,

$\therefore h(x) < h(0) = 0$,

$\therefore x(e^x + \cos x - ax - 2) < 0$, 与 $xe^x + x\cos x - ax^2 - 2x \geq 0$ 矛盾,

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.



【变式演练】

1. 已知函数 $f(x) = 2x - \sin x$.

(1) 求 $f(x)$ 的图象在点 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程;

(2) 对任意的 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \leq ax$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $2x - y - 1 = 0$

(2) $\left[2 - \frac{2}{\pi}, +\infty\right)$

【分析】(1) 根据导数的几何意义即可求出曲线的切线方程;

(2) 将原不等式转化为 $a \geq 2 - \frac{\sin x}{x} = h(x)$ ($x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$), 利用二次求导研究函数 $h(x)$ 的单调性, 求出 $h(x)_{\max}$ 即可.

解 (1)

因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 1$, 所以切点坐标为 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi - 1\right)$,

因为 $f'(x) = 2 - \cos x$, 所以 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$,

可得所求切线的方程为 $y - (\pi - 1) = 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, 即 $2x - y - 1 = 0$.

(2)

由 $f(x) \leq ax$, 得 $2x - \sin x \leq ax$, 所以 $a \geq 2 - \frac{\sin x}{x}$, 其中 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,

令 $h(x) = 2 - \frac{\sin x}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 得 $h'(x) = \frac{\sin x - \cos x}{x^2}$,

设 $\varphi(x) = \sin x - x\cos x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,

则 $\varphi'(x) = x\sin x > 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,

所以 $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$, 所以 $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,

$h(x)_{\max} = h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{2}{\pi}$,

所以 $a \geq 2 - \frac{2}{\pi}$, 即 a 的取值范围为 $\left[2 - \frac{2}{\pi}, +\infty\right)$.

题型三 同构双变量绝对值型求参



【典例分析】

例 1. 已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2$ (a 为实常数).

(1) 当 $a = -4$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最大值及相应的 x 值;

(2) 若 $a > 0$, 且对任意的 $x_1, x_2 \in [1, e]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right|$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) 当 $x = e$ 时, 取到最大值 $e^2 - 4$

(2) $a \leq \frac{1}{e} - 2e^2$

【分析】 (1) 求导, 由导函数判出原函数的单调性, 从而求出函数在 $[1, e]$ 上的最大值及相应的 x 值;

(2) 根据单调性对 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right|$ 转化整理为 $f(x_2) + \frac{1}{x_2} \leq f(x_1) + \frac{1}{x_1}$, 构造新函数

$h(x) = f(x) + \frac{1}{x}$ 在 $[1, e]$ 单调递减, 借助导数理解并运用参变分离运算求解.

解: (1)

当 $a = -4$ 时, 则 $f(x) = -4 \ln x + x^2$, $f'(x) = \frac{2x^2 - 4}{x}$ ($x > 0$),

$\therefore$ 当 $x \in [1, \sqrt{2})$ 时, $f'(x) < 0$. 当 $x \in (\sqrt{2}, e]$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, \sqrt{2})$ 上单调递减, 在 $[\sqrt{2}, e]$ 上单调递增,

又 $\therefore f(e) - f(1) = -4 + e^2 - 1 = e^2 - 5 > 0$,

故当 $x = e$ 时, 取到最大值 $e^2 - 4$

(2)

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x \in [1, e]$ 上是增函数, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $x \in [1, e]$ 上减函数,

不妨设 $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq e$, 则 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right|$ 可得 $f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$

即 $f(x_2) + \frac{1}{x_2} \leq f(x_1) + \frac{1}{x_1}$, 故原题等价于函数 $h(x) = f(x) + \frac{1}{x}$ 在 $x \in [1, e]$ 时是减函数,

$\therefore h'(x) = \frac{a}{x} + 2x - \frac{1}{x^2} \leq 0$ 恒成立, 即 $a \leq \frac{1}{x} - 2x^2$ 在 $x \in [1, e]$ 时恒成立.

$\therefore y = \frac{1}{x} - 2x^2$ 在 $x \in [1, e]$ 时是减函数

$\therefore a \leq \frac{1}{e} - 2e^2$.



【变式演练】

练 1. 已知 $f(x) = x^2 + x + a \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a = 1$, 函数 $g(x) = x + 1 - f(x)$, $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, $|x_1 g(x_2) - x_2 g(x_1)| > \lambda |x_1 - x_2|$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

【答案】 (1) 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{-1+\sqrt{1-8a}}{4})$ 上单调递减, 在区间 $(\frac{-1+\sqrt{1-8a}}{4}, +\infty)$ 上单调递增.

$$(2) (-\infty, \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{5}{2}]$$

【分析】(1) 先求出 $f(x)$ 的导数 $f'(x) = \frac{2x^2+x+a}{x}$, 根据 a 的取值范围进行分类讨论即可;

(2) 当 $x_1x_2 > 0$ 时, $|x_1g(x_2) - x_2g(x_1)| > \lambda|x_1 - x_2| \Leftrightarrow \left| \frac{g(x_2)}{x_2} - \frac{g(x_1)}{x_1} \right| > \lambda \left| \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right|$, 去绝对值后, 构造函数求解即可.

【详解】(1) 由已知, $f(x) = x^2 + x + a\ln x (a \in \mathbf{R})$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = 2x + 1 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 + x + a}{x},$$

① 当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恒成立, $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

② 当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 则 $2x^2 + x + a = 0$, $\Delta = 1 - 8a > 0$,

$$\text{解得 } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1-8a}}{4} < 0 (\text{舍}), x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1-8a}}{4} > 0,$$

$\therefore$ 当 $x \in (0, \frac{-1 + \sqrt{1-8a}}{4})$ 时, $2x^2 + x + a < 0$, $\therefore f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0, \frac{-1 + \sqrt{1-8a}}{4})$ 上单调递减,

当 $x \in (\frac{-1 + \sqrt{1-8a}}{4}, +\infty)$ 时, $2x^2 + x + a > 0$, $\therefore f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在区间 $(\frac{-1 + \sqrt{1-8a}}{4}, +\infty)$ 上单调递增,

综上所述, 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{-1 + \sqrt{1-8a}}{4})$ 上单调递减, 在区间 $(\frac{-1 + \sqrt{1-8a}}{4}, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 当 $a = 1$ 时, $g(x) = x + 1 - (x^2 + x + \ln x) = -x^2 - \ln x + 1$, $x \in (0, +\infty)$,

$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$,

$$|x_1g(x_2) - x_2g(x_1)| > \lambda|x_1 - x_2| \text{ 等价于 } \frac{|x_1g(x_2) - x_2g(x_1)|}{x_1x_2} > \lambda \left| \frac{x_1 - x_2}{x_1x_2} \right|,$$

$$\text{即 } \left| \frac{g(x_2)}{x_2} - \frac{g(x_1)}{x_1} \right| > \lambda \left| \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right|,$$

令 $h(x) = \frac{g(x)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $|h(x_2) - h(x_1)| > \lambda \left| \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right|$ 恒成立

$$h'(x) = \frac{xg'(x) - g(x)}{x^2} = \frac{x(-2x - \frac{1}{x}) - (-x^2 - \ln x + 1)}{x^2} = \frac{\ln x - x^2 - 2}{x^2},$$

令 $F(x) = \ln x - x^2 - 2$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $F'(x) = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1 - 2x^2}{x}$,

令 $F'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 当 $x \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 在区间 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 单调递增;

当 $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 在区间 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 单调递减,

$\therefore$ 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $F(x)$ 的最大值为 $F(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{2} < 0$,

备考

$\therefore$ 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $F(x) = \ln x - x^2 - 2 \leq -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{2} < 0$, 即 $h'(x) = \frac{\ln x - x^2 - 2}{x^2} < 0$,

$\therefore h(x) = \frac{g(x)}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

不妨设 $x_1 < x_2$, $\therefore \forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 有 $h(x_1) > h(x_2)$,

又 $\because y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 有 $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$,

$\therefore |h(x_2) - h(x_1)| > \lambda \left| \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right|$ 等价于 $h(x_1) - h(x_2) > \lambda \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right)$,

$\therefore h(x_1) - \frac{\lambda}{x_1} > h(x_2) - \frac{\lambda}{x_2}$,

设 $G(x) = h(x) - \frac{\lambda}{x}$, $x \in (0, +\infty)$,

则 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, $h(x_1) - \frac{\lambda}{x_1} > h(x_2) - \frac{\lambda}{x_2}$ 等价于 $G(x_1) > G(x_2)$,

即 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore G'(x) = h'(x) + \frac{\lambda}{x^2} \leq 0$,

$\therefore \lambda \leq -x^2 h'(x)$, $\therefore \lambda \leq -x^2 \cdot \frac{\ln x - x^2 - 2}{x^2} = -F(x)$,

$\because$ 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $F(x)$ 的最大值为 $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{2}$,

$\therefore -F(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{5}{2}$,

$\therefore \lambda \leq \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{5}{2}$,

综上所述, 满足题意的实数 λ 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{5}{2}\right]$.

题型四 零点型偏移证明不等式



【典例分析】

例 1. 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = ax^2 + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2) 若不等式 $(x+1)\ln x - 2(x-1) > m$ 对任意的 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立, 求 m 的取值范围;

(3) 若函数 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象有 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两个不同的交点, 证明: $x_1 x_2 > 16$. (参考数据: $\ln 2 \approx 0.69$, $\ln 5 \approx 1.61$)

【答案】 (1) $-\frac{1}{e}$; (2) $(-\infty, 0]$; (3) 证明见解析.

【分析】 (1) 先求函数 $f(x)$ 的定义域, 然后求导, 令 $f'(x) > 0$, 可求单调递增区间; 令 $f'(x) < 0$ 可求单调递减区间.

(2) 设函数 $h(x) = (x+1)\ln x - 2(x-1)$ ($x > 1$), 只需利用二次求导的方法求函数 $h(x)$ 的最小值即可.



(3) 首先根据题意得出 $ax_1 = \ln x_1 - \frac{1}{x_1}$, $ax_2 = \ln x_2 - \frac{1}{x_2}$, 从而可构造出 $\ln(x_1 x_2) - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2}{x_1}$; 然后根据 (2) 的结论可得出 $\frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2}{x_1} > 2$, 即得出 $\ln(x_1 x_2) - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} > 2$ 成立; 再根据基本不等式得到 $\ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}} > 1$, 从而通过构造函数 $G(x) = \ln x - \frac{2}{x}$ 即可证明结论.

解: (1)

已知函数 $f(x) = x \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = 1 + \ln x$,

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > \frac{1}{e}$; 令 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < \frac{1}{e}$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 单调递增,

所以当 $x = \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $-\frac{1}{e}$.

(2)

设函数 $h(x) = (x+1)\ln x - 2(x-1)$ ($x > 1$), 则 $m < h(x)$ 对任意的 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立.

$$h'(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1,$$

设函数 $\phi(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ ($x > 1$), 则 $\phi'(x) = \frac{x-1}{x^2} > 0$,

所以 $\phi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\phi(x) > \phi(1) = 0$,

即 $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(x) > h(1) = 0$,

所以 m 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

(3)

因为函数 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象有 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两个不同的交点,

所以关于 x 的方程 $ax^2 + 1 = x \ln x$, 即 $ax = \ln x - \frac{1}{x}$ 有两个不同的实数根 x_1, x_2 ,

$$\text{所以 } ax_1 = \ln x_1 - \frac{1}{x_1} \text{ ①, } ax_2 = \ln x_2 - \frac{1}{x_2} \text{ ②,}$$

$$\text{①} + \text{②, 得 } \ln(x_1 x_2) - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = a(x_1 + x_2),$$

$$\text{②} - \text{①, 得 } \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = a(x_2 - x_1),$$

$$\text{消 } a \text{ 得, } \ln(x_1 x_2) - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2}{x_1},$$

由 (2) 得, 当 $m = 0$ 时, $(x+1)\ln x - 2(x-1) > 0$,

即 $\frac{x+1}{x-1} \ln x > 2$ 对任意的 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立.

不妨设 $x_2 > x_1 > 0$, 则 $\frac{x_2}{x_1} > 1$, 所以 $\frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{x_2}{x_1} + 1}{\frac{x_2}{x_1} - 1} \ln \frac{x_2}{x_1} > 2$,

即 $\ln(x_1 x_2) - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} > 2$ 恒成立.

$$\text{因为 } \ln(x_1 x_2) - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} < \ln(x_1 x_2) - \frac{2 \times 2\sqrt{x_1 x_2}}{x_1 x_2} = 2\ln\sqrt{x_1 x_2} - \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}},$$

所以 $2\ln\sqrt{x_1x_2} - \frac{4}{\sqrt{x_1x_2}} > 2$, 即 $\ln\sqrt{x_1x_2} - \frac{2}{\sqrt{x_1x_2}} > 1$.

令函数 $G(x) = \ln x - \frac{2}{x}$, 则 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $G(4) = \ln 4 - \frac{1}{2} = 2\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.88 < 1$, $G(5) = \ln 5 - \frac{2}{5} \approx 1.21 > 1$,

所以当 $G(\sqrt{x_1x_2}) > 1$ 时, $\sqrt{x_1x_2} > 4$, 即 $x_1x_2 > 16$, 所以原不等式得证.

【变式演练】

1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x - 2x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设函数 $g(x) = e^x + \frac{1}{2}x^2 - (4+a)x + \ln x - f(x)$, 若函数 $y = g(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 , 证明: $x_1 + x_2 < 2\ln(a+2)$.

【答案】

(1) $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调减区间

(2) 证明见解析

【分析】

(1) 求得函数的导数 $f'(x) = x + \frac{1}{x} - 2$, 结合基本不等式求得 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 即可求解;

(2) 由 $y = g(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 , 转化为 $(a+2) = \frac{e^x}{x}$ 有两个根, 设 $I(x) = \frac{e^x}{x}$, 利用导数求得

最大值 $I(1) = e$, 得到 $a > e - 2$, 转化为 $\begin{cases} \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = 1 \\ x_1 + x_2 = 2\ln(a+2) + \ln x_1 x_2 \end{cases}$, 不妨设 $x_1 > x_2$, 要证 $x_1 + x_2 <$

$2\ln(a+2)$, 只需证明 $x_1 x_2 < 1$, 转化为 $2\ln t - t + \frac{1}{t} < 0$ 恒成立, 设 $h(t) = 2\ln t - t + \frac{1}{t}$, 结合导数求得函数的单调性, 即可求解.

【解析】(1)

解: 由函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x - 2x$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = x + \frac{1}{x} - 2$,

因为 $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, 当且仅当 $x = \frac{1}{x}$ 时, 即 $x = 1$ 时, 等号成立,

所以 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调减区间.

(2)

解: 由函数 $g(x) = e^x - (a+2)x, (x > 0)$,

因为函数 $y = g(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 ,

所以 $e^x = (a+2)x$ 有两个不同的根, 即 $(a+2) = \frac{e^x}{x}$ 有两个不同的根,

设 $I(x) = \frac{e^x}{x}$, 可得 $I'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $I'(x) < 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $I'(x) > 0$,

所以 $y = I(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $(1, +\infty)$ 上单调递增,

当 $x = 1$ 时, 函数 $y = I(x)$ 取得最小值, 最小值为 $I(1) = e$,



所以 $a+2 > e$, 即 $a > e-2$,

由 $\begin{cases} e^{x_1} = (a+2)x_1 \\ e^{x_2} = (a+2)x_2 \end{cases}$, 可得 $\begin{cases} x_1 = \ln(a+2) + \ln x_1 \\ x_2 = \ln(a+2) + \ln x_2 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x_1 - x_2 = \ln x_1 - \ln x_2 \\ x_1 + x_2 = 2\ln(a+2) + \ln x_1 x_2 \end{cases}$,

所以 $\begin{cases} \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = 1 \\ x_1 + x_2 = 2\ln(a+2) + \ln x_1 x_2 \end{cases}$,

不妨设 $x_1 > x_2$, 要证 $x_1 + x_2 < 2\ln(a+2)$, 只需证明 $x_1 x_2 < 1$ 即可,

即证 $\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2}$, 只需证明: $\ln \frac{x_1}{x_2} < \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$,

设 $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = t (t > 1)$,

即证: $2\ln t - t + \frac{1}{t} < 0$ 恒成立,

设 $h(t) = 2\ln t - t + \frac{1}{t}, t > 1$, 可得 $h'(t) = \frac{2}{t} - 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{-t^2 + 2t - 1}{t^2} = \frac{-(t-1)^2}{t^2} < 0$,

所以 $y = h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $h(t) < h(1) = 0$, 故 $x_1 x_2 < 1$ 恒成立,

所以 $x_1 + x_2 < 2\ln(a+2)$.

题型五 非对称型零点偏移证明不等式



【典例分析】

例 1. 已知函数 $f(x) = a \ln x - x (a \in R)$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $y = f(x)$ 在其定义域内有两个不同的零点, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若 $0 < x_1 < x_2$, 且 $\frac{x_1}{\ln x_1} = \frac{x_2}{\ln x_2} = a$, 证明: $\frac{x_1}{\ln x_1} < 2x_2 - x_1$.

【答案】

(1) 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$; 当 $a > 0$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a)$, 单调递减区间为 $(a, +\infty)$.

(2) $a > e$

(3) 证明见解析

【分析】

(1) 先求定义域, 然后对 a 进行分类讨论, 求解不同情况下的单调区间; (2) 在第一问的基础上, 讨论实数 a 的取值, 保证函数有两个不同的零点, 根据函数单调性及极值列出不等式, 求出 $a > e$ 时满足题意, 再证明充分性即可; (3) 设 $x_2 = tx_1$, 对题干条件变形, 构造函数对不等式进行证明.

解: (1)

函数 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$,

$\because f(x) = a \ln x - x (a \in R)$,

$\therefore f'(x) = \frac{a}{x} - 1 = \frac{a-x}{x}$

①当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即函数 $y = f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$;

②当 $a > 0$ 时, $f'(x) = 0$, 解得 $x = a$, 当 $x \in (0, a)$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore$ 函数 $y = f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a)$,

当 $x \in (a, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore$ 函数 $y = f(x)$ 的单调递减区间为 $(a, +\infty)$,

综上所述可知:

①当 $a \leq 0$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$;

②当 $a > 0$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a)$, 单调递减区间为 $(a, +\infty)$;

(2)

由 (1) 知, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore$ 函数 $y = f(x)$ 至多有一个零点, 不符合题意,

当 $a > 0$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递增, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore f(x)_{\max} = f(a) = a \ln a - a$,

又函数 $y = f(x)$ 有两个零点, $\therefore f(a) = a \ln a - a = a(\ln a - 1) > 0, \therefore a > e$

又 $f(1) = -1 < 0, \therefore \exists x_1 \in (1, a)$, 使得 $f(x_1) = 0$,

又 $f(a^2) = a \ln a^2 - a^2 = a(2 \ln a - a)$, 设 $g(a) = 2 \ln a - a, g'(a) = \frac{2}{a} - 1 = \frac{2-a}{a}$

$\therefore a > e, \therefore g'(a) < 0 \therefore$ 函数 $g(a)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore g(a)_{\max} = g(e) = 2 - e < 0$,

$\therefore \exists x_2 \in (a, a^2)$, 使得 $f(x_2) = 0$,

综上所述可知, $a > e$ 为所求.

(3)

依题意, $x_1, x_2 (0 < x_1 < x_2)$ 是函数 $y = f(x)$ 的两个零点,

设 $x_2 = tx_1$, 因为 $x_2 > x_1 > 0 \Rightarrow t > 1$,

$\therefore a = \frac{x_1}{\ln x_1} = \frac{x_2}{\ln x_2} = \frac{tx_1}{\ln x_1 + \ln t}, \therefore \ln x_1 = \frac{\ln t}{t-1}, \frac{a}{x_1} = \frac{1}{\ln x_1} = \frac{t-1}{\ln t}$

不等式 $\frac{x_1}{\ln x_1} < 2x_2 - x_1 \Leftrightarrow \frac{x_1}{\ln x_1} < 2tx_1 - x_1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x_1} < 2t - 1 \Leftrightarrow \frac{t-1}{\ln t} < 2t - 1$,

$\therefore t > 1$, 所证不等式即 $2t \ln t - \ln t - t + 1 > 0$

设 $h(t) = 2t \ln t - \ln t - t + 1, \therefore h'(t) = 2 \ln t + 2 - \frac{1}{t} - 1, h''(t) = \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} > 0$,

$\therefore h'(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数, 且 $h'(t) > h'(1) = 0$,

所以 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数, 且 $h(t) > h(1) = 0$,

即 $2t \ln t - \ln t - t + 1 > 0$, 从而所证不等式成立.



【变式演练】



1. 函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + 1$.

(1) 若 $a = 1$, 求函数 $y = f(2x - 1)$ 在 $x = 1$ 处的切线;

(2) 若函数 $y = f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$,

(i) 求实数 a 的取值范围;

(ii) 证明: $x_2^2 - x_1 < \frac{-a^2 + a + 1}{a^2}$.

【答案】(1) $y = -2(x - 1)$; (2) (i) $0 < a < \frac{e}{2}$; (ii) 证明见解析.

【分析】

(1) 先设 $g(x) = f(2x-1)$, 再对其求导, 根据导数的几何意义, 即可求出切线方程;

(2) (i) 根据题中条件, 得到方程 $\frac{\ln x + 1}{x^2} = a$ 有两不等实根, 令 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2}$, 则 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2}$ 的图象与直线 $y = a$ 有两不同交点, 对 $g(x)$ 求导, 得到其单调性, 结合函数值的取值情况, 即可得出结论;

(ii) 先由题中条件, 得到 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$, 令 $h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$, $t > 1$, 证明 $\ln t >$

$\frac{2(t-1)}{t+1}$ 对任意的 $t > 1$ 恒成立; 得出 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} > \frac{2}{x_2 + x_1}$; 进一步推出 $x_2 + x_1 > \frac{2}{\sqrt{e}}$; 得到 $x_2^2 - x_1 <$

$x_2^2 + x_2 - 1$, 因此只需证明 $x_2^2 + x_2 \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$ 即可, 即证 $x_2 \leq \frac{1}{a}$, 即证 $f(x_2) \geq f\left(\frac{1}{a}\right)$, 即证 $0 \geq f\left(\frac{1}{a}\right)$, 即

证 $\ln \frac{1}{a} \leq \frac{1}{a} - 1$ 成立; 构造函数证明 $\ln \frac{1}{a} \leq \frac{1}{a} - 1$ 成立即可.

【详解】

(1) 设 $g(x) = f(2x-1) = \ln(2x-1) - (2x-1)^2 + 1$,

$\therefore g'(x) = \frac{2}{2x-1} - 4(2x-1)$, $\therefore g'(1) = -2$, 且 $g(1) = 0$,

$\therefore$ 切线方程: $y = -2(x-1)$.

(2) (i) 由 $f(x) = \ln x - ax^2 + 1$ 可得定义域为 $(0, +\infty)$,

因为函数 $y = f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$,

所以方程 $\ln x - ax^2 + 1 = 0$ 有两不等实根,

即方程 $\frac{\ln x + 1}{x^2} = a$ 有两不等实根,

令 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2}$, 则 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2}$ 的图象与直线 $y = a$ 有两不同交点,

因为 $g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (\ln x + 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-1 - 2\ln x}{x^3}$,

由 $g'(x) > 0$ 得 $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$; 由 $g'(x) < 0$ 得 $x > e^{-\frac{1}{2}}$,

所以 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2}$ 在 $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ 上单调递增, 在 $(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ 上单调递减;

因此 $g(x)_{\max} = g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{e^{-1}} = \frac{e}{2}$,

又当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $\ln x + 1 < 0$, 即 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2} < 0$; 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $\ln x + 1 > 0$, 即 $g(x) =$

$\frac{\ln x + 1}{x^2} > 0$,

所以为使 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2}$ 的图象与直线 $y = a$ 有两不同交点, 只需 $0 < a < \frac{e}{2}$;

即实数 a 的取值范围为 $0 < a < \frac{e}{2}$;

(ii) 由 (i) 可知, x_1 与 x_2 是方程 $\ln x - ax^2 + 1 = 0$ 的两根,

则 $\begin{cases} \ln x_1 - ax_1^2 + 1 = 0 \\ \ln x_2 - ax_2^2 + 1 = 0 \end{cases}$, 两式作差可得 $\ln x_2 - \ln x_1 = a(x_2^2 - x_1^2)$,

因为 $0 < x_1 < x_2$, 所以 $\frac{x_2}{x_1} > 1$, 则 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$;

令 $h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} = \ln t + \frac{4}{t+1} - 2, t > 1$,

则 $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$ 对任意的 $t > 1$ 恒成立,

所以 $h(t)$ 在 $t \in (1, +\infty)$ 上单调递增, 因此 $h(t) > h(1) = 0$, 即 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$ 对任意的 $t > 1$ 恒成立;

令 $t = \frac{x_2}{x_1}$, 则 $\ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{2(\frac{x_2}{x_1} - 1)}{\frac{x_2}{x_1} + 1} = \frac{2(x_2 - x_1)}{x_2 + x_1}$, 所以 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} > \frac{2}{x_2 + x_1}$,

因此 $a(x_2 + x_1) = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} > \frac{2}{x_2 + x_1}$, 所以 $(x_2 + x_1)^2 > \frac{2}{a} > \frac{4}{e}$, 则 $x_2 + x_1 > \frac{2}{\sqrt{e}}$;

$\therefore x_2^2 - x_1 < x_2^2 + x_2 - \frac{2}{\sqrt{e}} < x_2^2 + x_2 - 1$,

因此, 要证 $x_2^2 - x_1 < \frac{-a^2 + a + 1}{a^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} - 1$, 只需证 $x_2^2 + x_2 \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$,

因为二次函数 $y = x^2 + x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 因此只需证 $x_2 \leq \frac{1}{a}$, 即证 $f(x_2) \geq f(\frac{1}{a})$, 即证 $0 \geq f(\frac{1}{a})$, 即证 $\ln \frac{1}{a} \leq \frac{1}{a} - 1$ 成立;

令 $u(x) = \ln x - x + 1, x > 0$,

则 $u'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $u'(x) > 0$, 即 $u(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $u'(x) < 0$, 即 $u(x)$ 单调递减;

所以 $u(x) \leq u(1) = 0$, 所以 $\ln x \leq x - 1$, 因此 $\ln \frac{1}{a} \leq \frac{1}{a} - 1$, 所以结论得证.

题型六 条件型偏移证明不等式



【典例分析】

例 1. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + ax}{x}, a \in R$.

- (1) 若 $a = 0$, 求 $f(x)$ 的最大值;
- (2) 若 $0 < a < 1$, 求证: $f(x)$ 有且只有一个零点;
- (3) 设 $0 < m < n$ 且 $m^n = n^m$, 求证: $m + n > 2e$.

【答案】 (1) $\frac{1}{e}$ (2) 证明见解析 (3) 证明见解析

【分析】

(1) 由 $a = 0$, 得到 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 求导 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 然后得到函数的单调性求解;

(2) 求导 $f'(x) = \frac{(\frac{1}{x} + a)x - \ln x - ax}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 结合 (1) 的结论, 根据 $0 < a < 1$, 分 $x > e, 0 < x < e$ 两种情况讨论.

e, 利用零点存在定理证明;

(3) 根据 $m^n = n^m$ 等价于 $\frac{\ln m}{m} = \frac{\ln n}{n}$, 由 (1) 知 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的单调性, 得到 $0 < m < e < n$, 令 $g(x) = (2e - x)\ln x - x\ln(2e - x)$, $0 < x < e$, 用导数法得到 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 则 $\frac{\ln x}{x} < \frac{\ln(2e - x)}{2e - x}$, $0 < x < e$, 再结合 $0 < m < e < n$ 且 $\frac{\ln m}{m} = \frac{\ln n}{n}$, 利用 $f(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调递减求解.

(1)

解: 由题知: 若 $a = 0$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 其定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

由 $f'(x) = 0$, 得 $x = e$,

所以当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递增, 在 $[e, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{所以 } f(x)_{\max} = f(e) = \frac{1}{e};$$

(2)

$$\text{由题知: } f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} + a\right)x - \ln x - ax}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

由 (1) 知, $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递增, 在 $[e, +\infty)$ 上单调递减,

因为 $0 < a < 1$,

$$\text{当 } x > e \text{ 时, } f(x) = \frac{\ln x + ax}{x} = a + \frac{\ln x}{x} > a > 0,$$

则 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 无零点,

$$\text{当 } 0 < x < e \text{ 时, } f(x) = \frac{\ln x + ax}{x} = a + \frac{\ln x}{x},$$

$$\text{又因为 } f\left(\frac{1}{e}\right) = a - e < 0 \text{ 且 } f(e) = a + \frac{1}{e} > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上有且只有一个零点,

所以, $f(x)$ 有且只有一个零点.

(3)

$$\text{因为 } m^n = n^m \text{ 等价于 } \frac{\ln m}{m} = \frac{\ln n}{n},$$

由 (1) 知: 若 $a = 0$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 且 $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递增, 在 $[e, +\infty)$ 上单调递减,

且 $0 < m < n$, 所以 $0 < m < e$, $n > e$, 即 $0 < m < e < n$,

$$\text{令 } g(x) = (2e - x)\ln x - x\ln(2e - x), \quad 0 < x < e,$$

$$\text{所以 } g'(x) = -\ln x + \frac{2e - x}{x} - \ln(2e - x) + \frac{x}{2e - x},$$

$$= -\ln[x(2e - x)] + \frac{2e - x}{x} + \frac{x}{2e - x},$$

$$= -\ln[(x - e)^2 + e^2] + \frac{2e - x}{x} + \frac{x}{2e - x} > -\ln e^2 + 2 = 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, $g(x) < g(e) = 0$,

所以 $\frac{\ln x}{x} < \frac{\ln(2e-x)}{2e-x}$, $0 < x < e$,

又因为 $0 < m < e < n$ 且 $\frac{\ln m}{m} = \frac{\ln n}{n}$,

所以 $\frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m} < \frac{\ln(2e-m)}{2e-m}$,

又因为 $n > e$, $2e-m > e$, 且 $f(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $n > 2e-m$, 即 $m+n > 2e$.



【变式演练】

1. 已知函数 $f(x) = 2\ln x + x^2 + (a-1)x - a$, ($a \in R$), 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 若正实数 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 满足 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 证明: $x_1 + x_2 > 2$.

【答案】(1) $[-3, +\infty)$; (2) 证明见解析.

【分析】

(1) 根据题意, 求出导函数 $f'(x)$, 分类讨论当 $a \geq -3$ 和 $a < -3$ 两种情况, 利用导数研究函数的单调性, 结合 $x \geq 1$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 从而得出实数 a 的取值范围;

(2) 不妨设 $x_1 < x_2$, 由 $f(x_1) + f(x_2) = 0$ 得出 $f(x_2) = -f(x_1)$, 从而可知只要证明 $-f(x_1) > f(2-x_1) \Leftrightarrow f(x_1) + f(2-x_1) < 0$, 构造新函数 $g(x) = f(x) + f(2-x)$, 求出 $g'(x) = \frac{4(x-1)^3}{x(x-2)}$, 利用导数研究函数

的单调性得出 $g(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调增函数, 进而可知当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) < 0$ 成立, 即 $f(x) + f(2-x) < 0$, 从而即可证明 $x_1 + x_2 > 2$.

(1)

解: 根据题意, 可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

而 $f'(x) = \frac{2}{x} + 2x + (a-1)$,

当 $a \geq -3$ 时, $f'(x) = \frac{2}{x} + 2x + (a-1) \geq a+3 \geq 0$, $f(1) = 0$,

$\therefore f(x)$ 为单调递增函数,

$\therefore$ 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \geq 0$ 成立;

当 $a < -3$ 时, 存在大于 1 的实数 m , 使得 $f'(m) = 0$,

$\therefore$ 当 $1 < x < m$ 时, $f'(x) < 0$ 成立,

$\therefore f(x)$ 在区间 $(1, m)$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $1 < x < m$ 时, $f(x) < f(1) = 0$;

$\therefore a < -3$ 不可能成立,

所以 $a \geq -3$, 即 a 的取值范围为 $[-3, +\infty)$.

(2)

证明: 不妨设 $x_1 < x_2$,

$\therefore$ 正实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1) + f(x_2) = 0$,

有 (1) 可知, $0 < x_1 < 1 < x_2$,

又 $\therefore f(x)$ 为单调递增函数,

所以 $x_1 + x_2 > 2 \Leftrightarrow x_2 > 2 - x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(2 - x_1)$,

又 $\because f(x_1) + f(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = -f(x_1)$,

所以只要证明: $-f(x_1) > f(2-x_1) \Leftrightarrow f(x_1) + f(2-x_1) < 0$,

设 $g(x) = f(x) + f(2-x)$, 则 $g(x) = 2[\ln x + \ln(2-x) + x^2 - 2x + 1]$,

可得 $g'(x) = \frac{4(x-1)^3}{x(x-2)}$,

$\therefore$ 当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$ 成立,

$\therefore g(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调增函数,

又 $\because g(1) = 0$,

$\therefore$ 当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) < 0$ 成立, 即 $f(x) + f(2-x) < 0$,

所以不等式 $f(x_1) + f(2-x_1) < 0$ 成立,

所以 $x_1 + x_2 > 2$.

题型七 同构型证明不等式



【典例分析】

例 1. 材料: 在现行的数学分析教材中, 对“初等函数”给出了确切的定义, 即由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合步骤所构成的, 且能用一个式子表示的. 如函数 $f(x) = x^x$ ($x > 0$), 我们可以作变形: $f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \cdot \ln x} = e^t$ ($t = x \ln x$), 所以 $f(x)$ 可看作是由函数 $f(t) = e^t$ 和 $g(x) = x \ln x$ 复合而成的, 即 $f(x) = x^x$ ($x > 0$) 为初等函数, 根据以上材料:

(1) 直接写出初等函数 $f(x) = x^x$ ($x > 0$) 极值点

(2) 对于初等函数 $h(x) = x^x$ ($x > 0$), 有且仅有两个不相等实数 x_1, x_2 ($0 < x_1 < x_2$) 满足: $h(x_1) = h(x_2) = e^k$.

(i) 求 k 的取值范围.

(ii) 求证: $x_2^{e^2-2e} \leq \frac{e^{-\frac{e}{2}}}{x_1}$ (注: 题中 e 为自然对数的底数, 即 $e = 2.71828 \dots$)

【答案】 (1) 极小值点为 $x = \frac{1}{e}$, 无极大值点 (2) (i) $k \in (-\frac{1}{2e}, 0)$; (ii) 证明见解析

【分析】

(1) 根据材料中的信息可求得极小值点为 $x = \frac{1}{e}$;

(2) (i) 将问题转化为求函数的最小值问题, 同时要注意考查边界; (ii) 通过换元, 将问题转化为求函数的最值问题, 从而获得证明.

解: (1)

极小值点为 $x = \frac{1}{e}$, 无极大值点.

(2)

由题意得: $x_1^{x_1} = x_2^{x_2} = e^k$ 即 $x_1^2 \ln x_1 = x_2^2 \ln x_2 = k$.

(i) 问题转化为 $m(x) = x^2 \ln x - k$ 在 $(0, +\infty)$ 内有两个零点. 则 $m'(x) = x(1 + 2 \ln x)$

当 $x \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 单调递减; 当 $x \in (e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 单调递增.

若 $m(x)$ 有两个零点, 则必有 $m(e^{-\frac{1}{2}}) < 0$. 解得: $k > -\frac{1}{2e}$

若 $k \geq 0$, 当 $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$ 时, $m(x) = x^2 \ln x - k \leq x^2 \ln x < 0$, 无法保证 $m(x)$ 有两个零点.

若 $-\frac{1}{2e} < k < 0$, 又 $m(e^{\frac{1}{k}}) > 0$, $m(e^{-\frac{1}{2}}) < 0$, $m(1) = -k > 0$

故 $\exists x_1 \in (e^{\frac{1}{k}}, e^{-\frac{1}{2}})$ 使得 $m(x_1) = 0$, $\exists x_2 \in (e^{-\frac{1}{2}}, 1)$ 使得 $m(x_2) = 0$. 综上: $k \in (-\frac{1}{2e}, 0)$

(ii) 设 $t = \frac{x_2}{x_1}$, 则 $t \in (1, +\infty)$. 将 $t = \frac{x_2}{x_1}$ 代入 $x_1^2 \ln x_1 = x_2^2 \ln x_2$ 可得: $\ln x_1 = \frac{t^2 \ln t}{1-t^2}$, $\ln x_2 = \frac{\ln t}{1-t^2}$ (*)

欲证: $x_2^{e^2-2e} \leq \frac{e^{-\frac{e}{2}}}{x_1}$, 需证: $\ln x_2^{e^2-2e} \leq \ln \frac{e^{-\frac{e}{2}}}{x_1}$

即证: $\ln x_1 + (e^2-2e) \ln x_2 \leq -\frac{e}{2}$. 将 (*) 代入, 则有 $\frac{(t^2+e^2-2e) \ln t}{1-t^2} \leq -\frac{e}{2}$

则只需证明: $\frac{(x+e^2-2e) \ln x}{1-x} \leq -e (x > 1)$ 即 $\ln x \geq \frac{e(x-1)}{x+e^2-2e} (x > 1)$.

构造函数 $\varphi(x) = \frac{x-1}{\ln x} - \frac{x}{e} - e + 2$, 则 $\varphi'(x) = \frac{\ln x - \frac{x-1}{x}}{\ln^2 x} - \frac{1}{e}$, $\varphi''(x) =$

$\frac{(x+1) \left[\frac{2(x-1)}{x+1} - \ln x \right]}{x^2 \ln^3 x} (x > 1)$ (其中 $\varphi''(x)$ 为 $\varphi'(x)$ 的导函数)

令 $\omega(x) = \frac{2(x-1)}{x+1} - \ln x (x > 1)$ 则 $\omega'(x) = -\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} < 0$ 所以 $\omega(x) < \omega(1) = 0$ 则 $\varphi''(x) < 0$.

因此 $\varphi'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减. 又 $\varphi'(e) = 0$, 当 $x \in (1, e)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调递增;

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调递减.

所以 $\varphi(x) = \frac{x-1}{\ln x} - \frac{x}{e} - e + 2 \leq \varphi(e) = 0$, 因此有 $\frac{x-1}{\ln x} - \frac{x}{e} \leq e - 2$

即 $\ln x \geq \frac{e(x-1)}{x+e^2-2e} (x > 1)$. 综上所述, 命题得证.

变式演练

1. 已知函数 $f(x) = \frac{e^{ax}}{x}$, $g(x) = \frac{\ln x + 2x + 1}{x}$, 其中 $a \in R$.

(1) 试讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a = 2$, 证明: $xf(x) \geq g(x)$.

【答案】(1) 答案见解析; (2) 证明见解析.

【分析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 求出 $f'(x)$, 分别讨论 $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$ 时不等式 $f'(x) > 0$ 和 $f'(x) < 0$ 的解集即可得单调递增区间和单调递减区间, 即可求解;

(2) $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 不等式等价于 $xe^{2x} \geq \ln x + 2x + 1$, $e^{\ln x + 2x} \geq \ln x + 2x + 1$,

令 $t = \ln x + 2x \in R$, 只需证 $e^t \geq t + 1$, 令 $h(t) = e^t - t - 1$, 利用导数判断单调性和最值即可求证.

解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

由 $f(x) = \frac{e^{ax}}{x}$ 可得: $f'(x) = \frac{ae^{ax} \cdot x - e^{ax} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{ax}(ax-1)}{x^2}$,

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > \frac{1}{a}$; 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < 0$ 或 $0 < x < \frac{1}{a}$;

此时 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减:

当 $a=0$ 时, $f(x) = \frac{1}{x}$, 此时 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a<0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < \frac{1}{a}$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $\frac{1}{a} < x < 0$ 或 $x > 0$,

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减:

综上所述: 当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减;

当 $a=0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a<0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 因为 $a=2$, $g(x) = \frac{\ln x + 2x + 1}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 所以 $xf(x) \geq g(x)$ 即 $xe^{2x} \geq \ln x + 2x + 1$,

即证: $e^{\ln x} \cdot e^{2x} = e^{\ln x + 2x} \geq \ln x + 2x + 1$, 令 $t = \ln x + 2x \in \mathbb{R}$, 只需证 $e^t \geq t + 1$, 令 $h(t) = e^t - t - 1$, 则 $h'(t) = e^t - 1$,

令 $h'(t) > 0$, 解得: $t > 0$; $h'(t) < 0$, 解得 $t < 0$; 所以 $h(t)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

所以 $h(t) \geq h(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$, 所以 $e^t \geq t + 1$,

所以 $e^{\ln x + 2x} \geq \ln x + 2x + 1$, 即 $xf(x) \geq g(x)$ 成立.

题型八 先放缩型证明不等式



【典例分析】

例 1. 设函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x} - 1 (a \in \mathbb{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $x \in (0, 1)$ 时, 证明: $x^2 + x - \frac{1}{x} - 1 < e^x \ln x$.

【答案】 (1) 答案不唯一, 具体见解析; (2) 证明见解析.

【分析】

(1) 求得 $f'(x) = \frac{ax-1}{x^2}$, 分 $a \leq 0$ 、 $a > 0$ 两种情况讨论, 分析导数 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的符号变化, 由此可得出函数 $f(x)$ 的增区间和减区间;

(2) 由 (1) 可得出 $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$, 要证原不等式成立, 先证 $e^x < (x+1)^2$ 对任意的 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 构造函数 $h(x) = e^x - (x+1)^2$, 利用导数分析函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的单调性, 由此可证得 $e^x < (x+1)^2$ 对任意的 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 即可证得原不等式成立.

(1)

解: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 则 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{ax-1}{x^2}$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立, 则函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, +\infty)$, 没有增区间;

当 $a > 0$ 时, 当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

则函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, \frac{1}{a})$, 单调增区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, +\infty)$, 没有增区间:

当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, \frac{1}{a})$, 单调增区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$.

(2) 证明: 由 (1) 可知当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, 1]$, 单调增区间为 $(1, +\infty)$;

当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取极小值 $f(1) = 0$, 所以 $f(x) \geq f(1) = 0$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, 即有 $\ln x + \frac{1}{x} - 1 > 0$, 所以 $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$,

所以要证 $x^2 + x - \frac{1}{x} - 1 < e^x \ln x$, 只需证 $x^2 + x - \frac{1}{x} - 1 < e^x (1 - \frac{1}{x})$, 整理得 $e^x \cdot \frac{x-1}{x} > \frac{(x+1)^2(x-1)}{x}$,

又因为 $x \in (0, 1)$, 所以只需证 $e^x < (x+1)^2$, 令 $h(x) = e^x - (x+1)^2$, 则 $h'(x) = e^x - 2(x+1)$,

令 $H(x) = h'(x) = e^x - 2(x+1)$, 则 $H'(x) = e^x - 2$, 令 $H'(x) = e^x - 2 = 0$, 得 $x = \ln 2$,

当 $0 < x < \ln 2$ 时, $H'(x) < 0$, $H(x)$ 单调递减,

当 $\ln 2 < x < 1$ 时, $H'(x) > 0$, $H(x)$ 单调递增,

所以 $H(x)_{\min} = H(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2(\ln 2 + 1) = -2\ln 2 < 0$, 又 $H(0) = e^0 - 2 = -1 < 0$, $H(1) = e - 4 < 0$,

所以在 $x \in (0, 1)$ 时, $H(x) = h'(x) < 0$ 恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

所以 $h(x) < h(0) = 0$, 即 $h(x) = e^x - (x+1)^2 < 0$, 即 $e^x < (x+1)^2$ 成立, 即得证.

【变式演练】

1. 已知函数 $f(x) = ae^{x-2} - \ln x + \ln a$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y = \frac{3}{2}x - 1$, 求 a 的值;

(2) 若 $a \geq e$, 证明: $f(x) \geq 2$.

【答案】(1) $a = 2$ (2) 证明见解析

【分析】(1) 由 $f'(2) = \frac{3}{2}$, 可得 a 的值, 再验证切点坐标也满足条件;

(2) 由 $a \geq e$, $e^{x-2} > 0$ 知要证 $f(x) = ae^{x-2} - \ln x + \ln a \geq 2$ 也即证 $e^{x-1} - \ln x - 1 \geq 0$, 设 $g(x) = e^{x-1} - \ln x - 1$, 求出导数分析其单调性, 得出其最值可证明.

解: (1) $f'(x) = ae^{x-2} - \frac{1}{x}$, 则 $f'(2) = ae^{2-2} - \frac{1}{2} = a - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 解得 $a = 2$

又 $f(2) = \frac{3}{2} \times 2 - 1 = 2$, $f(2) = ae^{2-2} - \ln 2 + \ln a = 2$, 可得 $a = 2$ 综上 $a = 2$

(2) 由 $a \geq e$, $e^{x-2} > 0$ 知要证 $f(x) = ae^{x-2} - \ln x + \ln a \geq 2$ 即证 $e \cdot e^{x-2} - \ln x + \ln e = e^{x-1} - \ln x + 1 \geq 2$

也即证 $e^{x-1} - \ln x - 1 \geq 0$. 设 $g(x) = e^{x-1} - \ln x - 1$, 则 $g'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$, 再令 $h(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$, $h'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$,

所以 $g'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $g'(1) = 0$ 则当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 所以 $g(x) \geq g(1) = 0$

所以 $e^{x-1} - \ln x - 1 \geq 0$ 成立, 即 $f(x) \geq 2$ 成立.

题型九 放缩参数型消参证明不等式



【典例分析】

例 1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + (1-a)x - \ln x$.

(1) 当 $a = -2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a \geq 1$ 时, 证明: $x > 1$ 时, 当 $f(x) > (1-a)x + \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2}a$ 恒成立.

【答案】(1) 单调递增区间为 $(\frac{1}{2}, 1)$, 单调递减区间为 $(0, \frac{1}{2})$, $(1, +\infty)$; (2) 证明见解析.

【分析】(1) 利用导数研究 $f(x)$ 的单调性即可.

(2) 由分析法: 只需证 $\frac{1}{2}a(x^2-1) - \ln x - \frac{1}{x} + 1 > 0$ 即可, 构造 $g(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) - \ln x - \frac{1}{x} + 1$, 利用导数证明 $g(x) > 0$ 结论得证.

【详解】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 当 $a = -2$ 时, $f(x) = -x^2 + 3x - \ln x$,

$$\therefore f'(x) = -2x + 3 - \frac{1}{x} = -\frac{(2x-1)(x-1)}{x}, (x > 0),$$

$\therefore$ 当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$, $(1, +\infty)$ 单调递减,

当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\frac{1}{2}, 1)$, 单调递减区间为 $(0, \frac{1}{2})$, $(1, +\infty)$.

(2) 要证 $f(x) > (1-a)x + \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2}a$, 只需证 $\frac{1}{2}a(x^2-1) - \ln x - \frac{1}{x} + 1 > 0$,

$$\because a \geq 1, x^2 - 1 > 0,$$

$$\therefore \frac{1}{2}a(x^2-1) - \ln x - \frac{1}{x} + 1 > \frac{1}{2}(x^2-1) - \ln x - \frac{1}{x} + 1,$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) - \ln x - \frac{1}{x} + 1, \text{ 则 } g'(x) = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)^2}{x^2} + 1 > 1 > 0,$$

$$\therefore g(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 单调递增, } g(x) > g(1) = 0,$$

$$\therefore f(x) > (1-a)x + \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2}a, \text{ 得证.}$$



【变式演练】

例 1. 已知函数 $f(x) = \ln(ax-1) + a \ln x$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 4x + b$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 当 $k \geq 4$ 时, 证明: $f(x) < k(x-1)$ 对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立.

【答案】(1) $a = 2, b = -4$; (2) 证明见解析.

【分析】(1) 利用导数的几何意义, 先由 $f'(1) = 4$ 求出 a 的值, 再由 $f(1) = 4 + b$ 求出 b 的值,

(2) 要证 $f(x) < k(x-1)$ 对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立, 只需证 $f(x) < 4(x-1)$ 对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立, 所以构造函数 $g(x) = f(x) - 4(x-1) = \ln(2x-1) + 2\ln x - 4x + 4 (x > 1)$, 然后利用导数求出其最大值小于零即可

$$\text{【详解】(1) 解: 因为 } f'(x) = \frac{a}{ax-1} + \frac{a}{x},$$

$$\text{所以 } f'(1) = \frac{a}{a-1} + a = 4,$$

解得 $a=2$,

则 $f(1)=0=4+b$, 解得 $b=-4$.

(2) 证明: 因为 $k \geq 4$, 所以要证 $f(x) < k(x-1)$ 对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立,

只需证 $f(x) < 4(x-1)$ 对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立.

设函数 $g(x) = f(x) - 4(x-1) = \ln(2x-1) + 2\ln x - 4x + 4 (x > 1)$,

则 $g'(x) = \frac{2}{2x-1} + \frac{2}{x} - 4 = \frac{-2(4x-1)(x-1)}{x(2x-1)}$. 因为 $x > 1$, 所以 $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上

单调递减,

从而 $g(x) < g(1) = 0$, 则 $f(x) < 4(x-1)$ 对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立,

故当 $k \geq 4$ 时, $f(x) - k(x-1)$ 对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立.

题型十 凸凹翻转型证明不等式



【典例分析】

例 1. 已知函数 $f(x) = ax - \ln x$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $x \in (0, e]$ 时, 求 $g(x) = e^2x - \ln x$ 的最小值;

(3) 当 $x \in (0, e]$ 时, 证明: $e^2x - \ln x - \frac{\ln x}{x} > \frac{5}{2}$.

【答案】 (1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, +\infty)$, 无单调递增区间; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, \frac{1}{a})$, 单调递增区间是 $(\frac{1}{a}, +\infty)$; (2) $g(x)_{\min} = 3$; (3) 证明见解析;

【分析】

(1) 求出 $f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x} (x > 0)$, 由 $a \leq 0$ 和 $a > 0$ 两种情况分类讨论, 利用导数的性质能求出 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 由 $g(x) = e^2x - \ln x$, 得 $g'(x) = e^2 - \frac{1}{x} = \frac{e^2x-1}{x}$, 由此利用导数的性质能求出 $g(x)$ 的最小值.

(3) 令 $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{5}{2}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, 令 $\varphi'(x) = 0$, 得 $x = e$, 由此利用导数的性质能证明 $e^2x - \ln x - \frac{\ln x}{x} > \frac{5}{2}$.

解: (1) $\because$ 函数 $f(x) = ax - \ln x$, $a \in \mathbb{R}$, $\therefore f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x} (x > 0)$.

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

② 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \frac{1}{a}$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{a}$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, +\infty)$, 无单调递增区间;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, \frac{1}{a})$, 单调递增区间是 $(\frac{1}{a}, +\infty)$.

(2) $\because g(x) = e^2x - \ln x$, 则 $g'(x) = e^2 - \frac{1}{x} = \frac{e^2x-1}{x}$, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{e^2}$, 当 $x \in (0, \frac{1}{e^2})$ 时, $g'(x) < 0$,

当 $x \in (\frac{1}{e^2}, e)$ 时, $g'(x) > 0$, $\therefore$ 当 $x = \frac{1}{e^2}$ 时, $g(x)$ 取得最小值, $g(x)_{\min} = g(\frac{1}{e^2}) = 3$.

证明: (3) 令 $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{5}{2}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 令 $\varphi'(x) = 0$, 得 $x = e$.

当 $0 < x \leq e$ 时, $\varphi'(x) \geq 0$, $h(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递增,

$\therefore \varphi(x)_{\max} = \varphi(e) = \frac{1}{e} + \frac{5}{2} < \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$, 所以 $e^2 x - \ln x > \frac{\ln x}{x} + \frac{5}{2}$, $e^2 x - \ln x - \frac{\ln x}{x} > \frac{5}{2}$

【变式演练】

1. 已知函数 $f(x) = \ln x - x$.

(1) 讨论函数 $g(x) = f(x) - \frac{a}{x}$ ($a \neq 0, a \in R$) 的单调性;

(2) 证明: $|f(x)| > \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}$.

【答案】(1) 答案见解析.(2) 证明见解析

【分析】(1) $g'(x) = \frac{-x^2 + x + a}{x^2}$, 令 $m(x) = -x^2 + x + a = -(x - \frac{1}{2})^2 + a + \frac{1}{4}$, 分别讨论 $a \leq -\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4} < a < 0$, $a > 0$, 解不等式 $m(x) > 0$ 或 $m(x) < 0$ 即可得单调增区间和减区间, 进而可得单调性.

(2) 设 $g(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}$ 分别求 $f'(x)$, $g'(x)$ 利用导数判断两个函数的单调性以及最值, 求出 $g(x)_{\max} < |f(x)|_{\min}$ 即可求证.

解(1) 因为 $f(x) = \ln x - x$, 所以 $g(x) = f(x) - \frac{a}{x} = \ln x - x - \frac{a}{x}$, $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 + \frac{a}{x^2} = \frac{-x^2 + x + a}{x^2}$,

令 $m(x) = -x^2 + x + a = -(x - \frac{1}{2})^2 + a + \frac{1}{4}$, 当 $a \leq -\frac{1}{4}$ 时, $g'(x) \leq 0$ 恒成立, 此时 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

当 $-\frac{1}{4} < a < 0$ 时, 解不等式 $-(x - \frac{1}{2})^2 + a + \frac{1}{4} > 0$ 可得: $\frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

当 $a > 0$ 时, 解不等式 $-(x - \frac{1}{2})^2 + a + \frac{1}{4} > 0$ 可得: $\frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} < 0 < x < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

综上所述: 当 $a \leq -\frac{1}{4}$ 时, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

当 $-\frac{1}{4} < a < 0$ 时, $g(x)$ 在 $(0, \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2})$ 和 $(\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

在 $(\frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2})$ 上单调递增,

当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 在 $(0, \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

(2) 由 $f(x) = \ln x - x$ 可得 $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$, 由 $f'(x) > 0$ 可得 $0 < x < 1$, 由 $f'(x) < 0$ 可得 $x > 1$

1,

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=\ln 1-1=-1$, 所以 $|f(x)|_{\min}=1$, 设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}$, 则 $g'(x)=\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$,

由 $g'(x) > 0$ 即 $1-\ln x > 0$ 可得 $0 < x < e$; 由 $g'(x) < 0$ 即 $1-\ln x < 0$ 可得 $x > e$,

所以 $g(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}$ 在 $(0,e)$ 上单调递增, 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{\ln e}{e}+\frac{1}{2}=\frac{1}{e}+\frac{1}{2}<1$,

所以 $g(x)_{\max} < |f(x)|_{\min}$, 所以 $|f(x)| > \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}$ 对任意的 $(0,+\infty)$ 恒成立..

题型十一 切线两边夹型证明不等式



【典例分析】

例 1. 已知函数 $f(x)=6x-x^6, x \in R$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;(2) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P , 求曲线在点 P 处的切线方程;(3) 若方程 $f(x)=a$ (a 为实数) 有两个实数根 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$, 求证: $x_2-x_1 \leq 6^{\frac{1}{5}}-\frac{a}{5}$.【答案】(1) 极大值为 5, 无极小值 (2) $y=-30(x-\sqrt[5]{6})$ (3) 证明见解析

【分析】

(1) 结合极值的概念, 利用导数判断单调性, 即可确定函数极值; (2) 根据导数的几何意义, 结合直线的点斜式方程即可求解; (3) 由 (2) 可设 $g(x)=-30(x-\sqrt[5]{6})$, 构造函数 $F(x)=f(x)-g(x)$, 设曲线 $y=f(x)$ 在点原点处的切线方程为: $y=h(x)$, 构造方程 $g(x)=a$, 方程 $h(x)=a$, 结合函数 $F(x), g(x), h(x)$ 的单调性即可证明.

解: (1) 由已知得: $f'(x)=6(1-x^5)$ 由 $f'(x)=0$ 得: $x=1$ 又当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

∴ 当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取得极大值, 极大值为 $f(1)=5$, 无极小值(2) 设 $P(x_0, 0)$, 则 $x_0=\sqrt[5]{6}, f'(x_0)=-30$,曲线 $f(x)$ 在点 P 处的切线方程为: $y=f'(x_0)(x-x_0)=-30(x-\sqrt[5]{6})$,即曲线在点 P 处的切线方程为: $y=-30(x-\sqrt[5]{6})$ (3) 设 $g(x)=-30(x-\sqrt[5]{6})$, 令 $F(x)=f(x)-g(x)$ 即 $F(x)=f(x)+30(x-\sqrt[5]{6})$, 则 $F'(x)=f'(x)+30$ 由于 $f'(x)=6-6x^5$ 在 R 单调递减, 故 $F'(x)$ 在 R 单调递减, 又 $\because F'(x_0)=0, (x_0=\sqrt[5]{6})$ ∴ 当 $x \in (-\infty, x_0)$ 时 $F'(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $F'(x) < 0$, ∴ $F(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递减,

∴ $\forall x \in R, F(x) \leq F(x_0)=0$, 即 $\forall x \in R$, 都有 $f(x) \leq g(x)$; 设方程 $g(x)=a$ 的根为 x'_2 , ∴ $x'_2=6^{\frac{1}{5}}-\frac{a}{30}$.

∴ $g(x)$ 在 R 单调递减, 且 $g(x_2) \geq f(x_2)=a=g(x'_2)$ ∴ $x_2 < x'_2$,设曲线 $y=f(x)$ 在点原点处的切线方程为: $y=h(x)$, 则易得 $h(x)=6x$,

$\forall x \in R$, 有 $f(x) - h(x) = -x^6 \leq 0$, 即 $f(x) \leq h(x)$, 设方程 $h(x) = a$ 的根为 x_1' , 则 $x_1' = \frac{a}{6}$,

$\because h(x)$ 在 R 单调递增, 且 $h(x_1') = a = f(x_1) \leq h(x_1)$, $\therefore x_1' \leq x_1$. $\therefore x_2 - x_1 \leq x_2' - x_1' = \left(6^{\frac{1}{5}} - \frac{a}{30}\right) - \frac{a}{6} = 6^{\frac{1}{5}} - \frac{a}{5}$,

即 $x_2 - x_1 \leq 6^{\frac{1}{5}} - \frac{a}{5}$.

【变式演练】

1. 已知函数 $f(x) = x \ln x - x$.

(1) 设曲线 $y = f(x)$ 在 $x = e$ 处的切线为 $y = g(x)$, 求证: $f(x) \geq g(x)$;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 求证: $|x_2 - x_1| < 2a + e + \frac{1}{e}$.

【答案】(1) 证明见解析; (2) 证明见解析.

【分析】

(1) 由导数求出切线方程 $y = g(x)$, 然后引入新函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 由导数求得它的最小值是 0 即证;

(2) 不妨设 $x_1 > x_2$, 直线 $y = x - e$ 与 $y = a$ 相交于点 (x_0, a) , 利用 $f(x_1) \geq g(x_1)$ 通过 x_0 转换证得 $x_1 \leq x_0 = a + e$, 再证 $x_2 \geq -a - \frac{1}{e}$, 它通过证明 $f(x_2) + x_2 + \frac{1}{e} \geq 0$ 完成, 只要引入新函数 $\varphi(x) = f(x) + x + \frac{1}{e}$ 即可证.

【详解】

(1) 因为 $f'(x) = \ln x$, $f'(e) = \ln e = 1$, $f(e) = 0$, $f(x)$ 在 $x = e$ 处的切线为 $y - 0 = x - e$ 即 $g(x) = x - e$.

令 $h(x) = f(x) - g(x) = x \ln x - x - (x - e) = x \ln x - 2x + e$, $h'(x) = \ln x - 1$

于是当 $x \in (0, e)$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增;

故 $h(x) \geq h(e) = 0$, 所以 $f(x) \geq g(x)$

(2) 不妨设 $x_1 > x_2$, 直线 $y = x - e$ 与 $y = a$ 相交于点 (x_0, a) , 由 (1) 知: $f(x) \geq g(x)$, 则 $f(x_1) = a = x_0 - e \geq g(x_1) = x_1 - e$,

从而 $x_1 \leq x_0 = a + e$. 下证: $x_2 \geq -a - \frac{1}{e}$.

由于 $a = f(x_2)$, 所以要证 $x_2 \geq -a - \frac{1}{e} \Leftrightarrow x_2 \geq -f(x_2) - \frac{1}{e}$, 即证: $f(x_2) + x_2 + \frac{1}{e} \geq 0$.

令 $\varphi(x) = x \ln x + \frac{1}{e}$, $\varphi'(x) = 1 + \ln x$,

当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $\varphi'(x) < 0$; 当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$

$\varphi(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增

$\varphi(x) \geq \varphi(\frac{1}{e}) = 0$, 所以 $x_2 \geq -a - \frac{1}{e}$ 成立, 当且仅当 $x_2 = \frac{1}{e}$, $a = -\frac{2}{e}$ 时取等号.

由于等号成立的条件不能同时满足,

$|x_2 - x_1| = x_1 - x_2 < a + e - (-a - \frac{1}{e}) = 2a + e + \frac{1}{e}$.

题型十二

切线放缩型证明不等式



【典例分析】

例 1. 已知函数 $f(x) = m\left(\frac{x^2}{2} - k\ln x\right) + n\left[e^{x+1}\left(\frac{1}{4}e^{x+1} - ax + a - 1\right)\right]$, 其中 $e = 2.718 \cdots$ 是自然对数的底数, $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导数.

(1) 若 $m = 1, n = 0$ 时.

(i) 当 $k = 1$ 时, 求曲线 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.

(ii) 当 $k > 0$ 时, 判断函数 $f(x)$ 在区间 $(1, \sqrt{e}]$ 零点的个数.

(2) 若 $m = 0, n = 1$, 当 $a = \frac{7}{8}$ 时, 求证: 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $x_1 + x_2 = -2$, 则 $f(x_1) + f(x_2) > 2$.

【答案】 (1) (i) $y = \frac{1}{2}$; (ii) 答案见解析; (2) 证明见解析.

【分析】

(1) (i) 先求切线的斜率, 再根据直线方程即可求得切线方程;

(ii) 先研究函数的单调区间, 再分类讨论.

(2) 通过换元后转化为证明不等式恒成立.

【详解】 (1) 当 $m = 1, n = 0$ 时, $f(x) = \frac{x^2}{2} - k\ln x$, $f'(x) = x - \frac{k}{x}$. (i) 当 $k = 1$ 时, $f'(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0$, 而 $f(1) = \frac{1}{2}$,

所以切线为 $y = \frac{1}{2}$; (ii) 由 $f(x) = \frac{x^2}{2} - k\ln x$, ($k > 0$), $f'(x) = \frac{x^2 - k}{x}$ 由 $f'(x) = 0$ 解得 $x = \sqrt{k}$,

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的情况如下:

x	$(0, \sqrt{k})$	$\sqrt{k}$	$(\sqrt{k}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$\frac{k(1 - \ln k)}{2}$	↗

所以, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, \sqrt{k})$, 单调递增区间是 $(\sqrt{k}, +\infty)$, 因此 $f(x)$ 在 $x = \sqrt{k}$ 处取得极小值 $f(\sqrt{k}) = \frac{k(1 - \ln k)}{2}$. $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $f(\sqrt{k}) = \frac{k(1 - \ln k)}{2}$

① 若 $0 < k < e$, 则无零点.

② 当 $k = e$ 时, $f(x)$ 在区间 $(1, \sqrt{e})$ 上单调递减, 且 $f(\sqrt{e}) = 0$, 所以 $x = \sqrt{e}$ 是 $f(x)$ 在区间 $(1, \sqrt{e}]$ 上的唯一零点.

③ 当 $k > e$ 时, $f(x)$ 在区间 $(1, \sqrt{e})$ 上单调递减, 且 $f(1) = \frac{1}{2} > 0$, $f(\sqrt{e}) = \frac{e - k}{2} < 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(1, \sqrt{e}]$ 上仅有一个零点. 综上, 若 $0 < k < e$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, \sqrt{e}]$ 无零点, 当 $k \geq e$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, \sqrt{e}]$ 有一个零点.

(2) $f(x) = e^{x+1}\left(\frac{1}{4}e^{x+1} - \frac{7}{8}x - \frac{1}{8}\right) = e^{x+1}\left(\frac{1}{4}e^{x+1} - \frac{7}{8}(x+1) + \frac{3}{4}\right)$, 令 $x+1 = t$, $t_1 + t_2 = 0$,

不妨设 $t = x_2 + 1 > 0$, $h(t) = e^t\left(\frac{1}{4}e^t - \frac{7}{8}t + \frac{3}{4}\right)$, 令 $H(t) = h(t) + h(-t) = e^t\left(\frac{1}{4}e^t - \frac{7}{8}t + \frac{3}{4}\right) + e^{-t}$



$$\left(\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{7}{8}t + \frac{3}{4}\right)$$

由题意可知,即证明当 $t > 0$ 时, $H(t) > 2$, $H'(t) = e^t\left(\frac{1}{2}e^t - \frac{7}{8}t - \frac{1}{8}\right) - e^{-t}\left(\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{7}{8}t - \frac{1}{8}\right)$
 $= \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})(e^t - e^{-t}) - \frac{7}{8}t(e^t + e^{-t}) - \frac{1}{8}(e^t - e^{-t}) = \frac{7}{8}(e^t + e^{-t})\left[\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) - t\right] +$
 $\frac{1}{16}(e^t - e^{-t})[(e^t + e^{-t}) - 2] \geq 0$,

其中 $\left[\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) - t\right]' = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) - 1 \geq 0$, 所以 $\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) - t > 0$. 所以 $H(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调递增,

因为 $H(0) = 2$, 所以当 $t > 0$ 时, $H(t) > 2$, 得证.

方法二:切线放缩

化解过程同上, 原题即证明当 $t > 0$ 时, $H(t) = h(t) + h(-t) > 2$, $h(t) = e^t\left(\frac{1}{4}e^t - \frac{7}{8}t + \frac{3}{4}\right)$,

注意到 $h(0) = e^0\left(\frac{1}{4}e^0 - \frac{7}{8} \times 0 + \frac{3}{4}\right) = 1$, 求出 $h(t) = e^t\left(\frac{1}{4}e^t - \frac{7}{8}t + \frac{3}{4}\right)$ 在 $(0, 1)$ 处的切线方程,

则 $h'(t) = e^t\left(\frac{1}{2}e^t - \frac{7}{8}t - \frac{1}{8}\right)$, 即 $h'(0) = \frac{3}{8}$, 则:切线方程为 $y = \frac{3}{8}t + 1$.

下面证明 $h(t) \geq \frac{3}{8}t + 1$ 恒成立 ($t > 0$); 令 $F(t) = h(t) - \frac{3}{8}t - 1$,

则 $F'(t) = e^t\left(\frac{1}{2}e^t - \frac{7}{8}t - \frac{1}{8}\right) - \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow t = 0$, 得 $F'(t) > 0$ 在 $t > 0$ 恒成立,

故 $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $F(t) = h(t) - \frac{3}{8}t - 1 > F(0) = 0$ 恒成立,

故 $h(t) \geq \frac{3}{8}t + 1$ 成立, 同理可证 $h(-t)$ 始终位于 $h(-t)$ 在 $(0, 1)$ 处的切线 $y = -\frac{3}{8}t + 1$ 的上方,

即 $h(-t) \geq -\frac{3}{8}t + 1$ (实际上 $h(t)$ 与 $h(-t)$ 关于 y 轴对称),

放 $H(t) = h(t) + h(-t) > \frac{3}{8}t + 1 + \left(-\frac{3}{8}t\right) + 1 = 2$ 恒成立,

原不等式得证.

【变式演练】

1. 已知函数 $f(x) = a(x-1)e^x$, $a \neq 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a = 1$ 时,

① 求函数在 $x = 1$ 处的切线 l , 并证明 $0 < x < 1$, 函数 $f(x)$ 图象恒在切线 l 上方;

② 若 $f(x) = m$ 有两解 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明 $x_2 - x_1 < \frac{m}{e} - m$.

【答案】(1) 答案见解析; (2) ① $y = e(x-1)$; 证明见解析; ② 证明见解析.

【分析】

(1) 直接利用导数讨论原函数的单调性, 对 a 的正负进行分类讨论;

(2) ① 利用导数求切线方程, 然后用作差法证明出 $(x-1)e^x - e(x-1) > 0$, 即函数 $f(x)$ 图象恒在切线 l 上方;

② 利用分析法证明, 转化为只需证明 $e^{x_1} > x_1 + 1$, 构造函数 $\varphi(x) = e^x - x - 1$, 利用导数证明即可.

【详解】

$f(x) = a(x-1)e^x$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f'(x) = axe^x$

(1) $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得: $x > 0$; 令 $f'(x) < 0$, 得: $x < 0$;

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调减, $(0, +\infty)$ 单调增,

同理可求: $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调增, $(0, +\infty)$ 单调减.

(2) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = (x-1)e^x$, $f'(x) = xe^x$

① 所以 $f(1) = 0$, $f'(1) = e$, 所以在 $x = 1$ 处的切线为 $y = e(x-1)$,

当 $0 < x < 1$ 时, $(x-1)e^x - e(x-1) = (x-1)(e^x - e) > 0$ 恒成立,

所以函数 $f(x)$ 图象恒在切线 l 上方;

② 由当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$, 且 $f(1) = 0$ 结合 (1) 可知, $x_1 < 0, x_2 \in (0, 1)$,

由 (2) 可知, $x_2 < \frac{m}{e} + 1$, 要证 $x_2 - x_1^2 < \frac{m}{e} - m$, 下证 $(\frac{m}{e} + 1) - x_1^2 < \frac{m}{e} - m$.

即证 $x_1^2 > m + 1$, 又因为 $(x_1 - 1)e^{x_1} = m$, 即证 $e^{x_1} > x_1 + 1$.

记 $\varphi(x) = e^x - x - 1$

$\varphi'(x) = e^x - 1 > 0$, 所以 $\varphi(x) = e^x - x - 1$ 单调增, 又 $\varphi(0) = 0$,

所以 $0 < x < 1$ 时 $\varphi(x) > 0$. 即证

题型十三 构造一元二次根与系数关系型证明不等式



【典例分析】

例 1. 已知函数 $f(x) = x^2 - x + k \ln x$, $k \in \mathbb{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{4} - 2k$.

【答案】(1) 答案见解析; (2) 证明见解析.

【分析】

(1) 先求 $f(x)$ 的定义域和导数 $f'(x)$, 再根据一元二次方程判别式的情况讨论 $f'(x)$ 的正负, 进而确定 $f(x)$ 的单调性即可;

(2) 利用根与系数关系进行等量代换将 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{4} - 2k$ 转化为证明 $\ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1}{x_2} + 1 < 0$, 构造函数证明不等式恒成立即可.

【详解】

解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = 2x - 1 + \frac{k}{x} = \frac{2x^2 - x + k}{x},$$

设 $g(x) = 2x^2 - x + k$, 判别式 $\Delta = 1 - 8k$.

① 当 $\Delta \leq 0$, 即 $k \geq \frac{1}{8}$ 时, $g(x) \geq 0$ 恒成立, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 等号不恒成立, 此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

② 当 $\Delta > 0$, 即 $k < \frac{1}{8}$ 时, 令 $g(x) = 0$, 得 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 8k}}{4}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 8k}}{4}$.

(i) 当 $k \leq 0$ 时, $x_1 x_2 = \frac{k}{2} \leq 0$, 此时 $x_1 \leq 0, x_2 > 0$.

当 $x \in (0, x_2)$ 时, $g(x) < 0$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 调递减; 当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

(ii) 当 $0 < k < \frac{1}{8}$ 时, $x_1 x_2 = \frac{k}{2} > 0$, $x_1 + x_2 = \frac{1}{2} > 0$, $\therefore 0 < x_1 < x_2$.

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $g(x) > 0$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $g(x) < 0$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

综上, 当 $k \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1+\sqrt{1-8k}}{4})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1+\sqrt{1-8k}}{4}, +\infty)$ 上单调递增;

当 $0 < k < \frac{1}{8}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1-\sqrt{1-8k}}{4})$, $(\frac{1+\sqrt{1-8k}}{4}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{1-\sqrt{1-8k}}{4}, \frac{1+\sqrt{1-8k}}{4})$ 上单调递减;

当 $k \geq \frac{1}{8}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

(2) 由 (1) 及题意知 $0 < k < \frac{1}{8}$, x_1, x_2 为方程 $2x^2 - x + k = 0$ 的两根,

不妨设 $0 < x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) > f(x_2)$, 且 $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$, $x_1 x_2 = \frac{k}{2}$,

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \frac{1}{4} - 2k.$$

要证 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{4} - 2k$, 即证 $|f(x_1) - f(x_2)| < (x_1 - x_2)^2$, 即证 $f(x_1) - f(x_2) < (x_1 - x_2)^2$,

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 - x_1 + k \ln x_1) - (x_2^2 - x_2 + k \ln x_2) = (x_1 + x_2 - 1)(x_1 - x_2) + k(\ln x_1 - \ln x_2), \text{ 而 } x_1 + x_2 = \frac{1}{2}, x_1 x_2 = \frac{k}{2},$$

$$\text{故 } f(x_1) - f(x_2) = k \ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{1}{2}(x_1 - x_2) = 2x_1 x_2 \ln \frac{x_1}{x_2} - (x_1 + x_2)(x_1 - x_2),$$

$$\text{因为 } f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)^2 = 2x_1 x_2 \ln \frac{x_1}{x_2} - (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)^2 = 2x_1 x_2 \left(\ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1}{x_2} + 1 \right).$$

设 $t = \frac{x_1}{x_2}$, 则 $0 < t < 1$,

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)^2 = 2x_1 x_2 (\ln t - t + 1).$$

设 $h(t) = \ln t - t + 1$, 则 $h'(t) = \frac{1}{t} - 1$, 当 $0 < t < 1$ 时, $h'(t) > 0$, $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, $\therefore h(t)$

$< h(1) = 0$, 而 $x_1 x_2 > 0$,

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)^2 < 0,$$

即 $f(x_1) - f(x_2) < (x_1 - x_2)^2$, 命题得证.

【技法指引】

利用一元二次型根与系数关系, 可以构造:

1. 利用韦达定理代换: 可以消去 x_1, x_2 留下参数
2. 一部分题依旧是极值点偏移



【变式演练】



1. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 - x$.

(1) 若 $a = -1$, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 设 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 若 x_1, x_2 是函数 $f'(x)$ 的两个不相等的零点, 求证: $f(x_1) + f(x_2) < x_1 + x_2 - 5$.

【答案】

(1) 极大值是 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 - \frac{3}{4}$, 无极小值;

(2) 证明见解析

【分析】

(1) 由 $a = -1$, 得到 $f(x) = \ln x - x^2 - x$, 求导 $f'(x) = -\frac{(x+1)(2x-1)}{x}$, 令 $f'(x) > 0, f'(x) < 0$ 求解;

(2) 由 $f'(x) = \frac{2ax^2 - x + 1}{x}$, 且 $x > 0$, 得到 x_1, x_2 是方程 $2ax^2 - x + 1 = 0$ 的两个不相等正实根, 利用根的分布, 得到 $0 < a < \frac{1}{8}$, 然后利用韦达定理, 得到 $f(x_1) + f(x_2) - x_1 - x_2 = \ln \frac{1}{2a} - \frac{3}{4a} - 1$, 利用导数法证明.

(1)

解: 当 $a = -1$ 时, $f(x) = \ln x - x^2 - x$, 且定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1}{x} - 2x - 1 = -\frac{(x+1)(2x-1)}{x}.$$

令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{2}$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > \frac{1}{2}$.

故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

故 $f(x)$ 的极大值是 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 - \frac{3}{4}$,

综上, 函数 $f(x)$ 的极大值是 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 - \frac{3}{4}$, 无极小值.

(2)

证明: 由题意得 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax - 1 = \frac{2ax^2 - x + 1}{x}$, 且 $x > 0$,

则 x_1, x_2 是方程 $2ax^2 - x + 1 = 0$ 的两个不相等正实根,

$$\therefore \begin{cases} \Delta = 1 - 8a > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{1}{2a} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{1}{2a} > 0 \end{cases} \text{ 解之得 } 0 < a < \frac{1}{8}.$$

$$f(x_1) + f(x_2) - x_1 - x_2 = \ln x_1 + \ln x_2 + ax_1^2 + ax_2^2 - 2(x_1 + x_2)$$

$$= a(x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1 + x_2) + \ln(x_1 x_2)$$

$$= a[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] - 2(x_1 + x_2) + \ln(x_1 x_2)$$

$$= \ln \frac{1}{2a} - \frac{3}{4a} - 1,$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{2a}, g(t) = \ln t - \frac{3t}{2} - 1, t \in (4, +\infty),$$

$$\text{则 } g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{3}{2} = \frac{2-3t}{2t} < 0, t \in (4, +\infty),$$

故 $g(t)$ 在 $(4, +\infty)$ 上单调递减,

故 $g(t) < g(4) = \ln 4 - 7 < 2 - 7 = -5$,

所以 $f(x_1) + f(x_2) < x_1 + x_2 - 5$.

题型十四 【题型十四】两根差型证明不等式



【典例分析】

例 1. 已知函数 $f(x) = e^x - (a \ln a) \cdot (x \ln x)$ ($a > 0$), 其中 $e = 2.71828 \cdots$ 是自然对数的底数.

(1) 当 $a = e$ 时, 求函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个不同极值点 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$;

(i) 求实数 a 的取值范围;

(ii) 证明: $x_2 - x_1 \leq \sqrt{(e - a \ln a)(e - a \ln a - 4)}$.

【答案】

(1) 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增

(2) (i) $a > e$; (ii) 证明见解析

【分析】

(1) 运用导数的性质进行求解判断即可;

(2) (i) 常变量分离, 构造函数, 利用导数的性质进行求解即可;

(ii) 运用构造新函数法, 结合导数的性质、对钩函数的单调性进行求解证明即可.

解: (1)

$f'(x) = e^x - e(\ln x + 1)$, 设 $g(x) = f'(x) = e^x - e(\ln x + 1)$,

$g'(x) = \frac{xe^x - e}{x}$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

$\therefore f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, $(1, +\infty)$ 单调递增,

(2) (i) 由 $f'(x) = 0$, 则 $e^x = a \ln a (\ln x + 1)$, 即 $\frac{1}{a \ln a} = \frac{\ln x + 1}{e^x} = m(x) \therefore m'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x - 1}{e^x}$

设 $n(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, $n(1) = 0 \therefore m(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, $(1, +\infty)$ 单调递减,

且 $m(1) = \frac{1}{e}$, $m\left(\frac{1}{e}\right) = 0 \therefore 0 < \frac{1}{a \ln a} < \frac{1}{e}$, 即 $a \ln a > e$, 即 $a > e$;

(ii) 记 $v(x) = x - \ln x - 1$, $v'(x) = \frac{x-1}{x}$, $v(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增,

$v(x) \geq v(1) = 0 \therefore x \geq \ln x + 1$ 记 $u(x) = e^x - [x^2 + (e-2)x + 1]$, $u(0) = 0$

$u'(x) = e^x - 2x - (e-2)$, 设 $t(x) = u'(x) = e^x - 2x - (e-2)$,

$t'(x) = e^x - 2$, 当 $x \in (0, \ln 2)$ 时, $t'(x) < 0$, $t(x)$ 单调递减,

当 $x \in (\ln 2, +\infty)$, $t'(x) > 0$, $t(x)$ 单调递增, 即 $u'(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 单调递增,

$u'(0) = 3 - e > 0$, $u'(\ln 2) = 4 - 2\ln 2 - e < 0 \exists x_0 \in (0, \ln 2)$ 使得 $u'(x_0) = 0$, $u'(1) = 0$

$u(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递增, 在 $(x_0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$

$\therefore u(x) \geq 0 \therefore e^x \geq x^2 + (e-2)x + 1 \therefore \frac{\ln x + 1}{e^x} \leq \frac{x}{x^2 + (e-2)x + 1} = h(x)$, $h(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{x} + e - 2}$,

函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, 所以当 $x = 1$ 时, 该函数有最小值 2,

所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减,

且 $h(1) = \frac{1}{e} = m(1)$, 令 $\frac{x}{x^2 + (e-2)x + 1} = \frac{1}{a \ln a}$ 记方程 $x^2 + (e-2-a \ln a)x + 1$ 两根为 x_3, x_4 且 x_3

$< x_4$

则 $x_2 - x_1 < x_4 - x_3 = \sqrt{(e-2-a \ln a)^2 - 4} = \sqrt{(e-a \ln a)(e-a \ln a - 4)}$

【变式演练】

1. 已知函数 $f(x) = ax^2 + \frac{1}{x}$.

(1) 当 $a = -4$ 时, 求 $f(x)$ 的极值点.

(2) 当 $a = 2$ 时, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 且 $x_1 x_2 < 0$, 证明: $|x_2 - x_1| \geq \sqrt{3}$.

【答案】(1) 极大值点为 $-\frac{1}{2}$, 无极小值点; (2) 证明见解析.

【分析】

(1) 利用 $f'(x)$ 研究 $f(x)$ 的单调性, 由此求得 $f(x)$ 的极值点.

(2) 由 $f(x_1) = f(x_2)$ 列方程, 由此化简 $|x_2 - x_1|^2$, 利用换元法, 结合导数求得 $|x_2 - x_1|^2 \geq 3$, 从而证得结论成立.

【详解】(1) 当 $a = -4$ 时, $f(x) = -4x^2 + \frac{1}{x}$, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

则 $f'(x) = -8x - \frac{1}{x^2} = -\frac{8x^3 + 1}{x^2}$. 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$

则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{2}, 0), (0, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $x = -\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的极大值点, 所以 $f(x)$ 的极大值点为 $-\frac{1}{2}$, 无极小值点.

(2) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 则 $f(x_1) = 2x_1^2 + \frac{1}{x_1}, f(x_2) = 2x_2^2 + \frac{1}{x_2}$

因为 $f(x_1) = f(x_2)$, 所以 $2x_1^2 + \frac{1}{x_1} = 2x_2^2 + \frac{1}{x_2}$,

整理得 $2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$.

因为 $x_1 x_2 < 0$, 所以 $2(x_1 + x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$,

所以 $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2 = \frac{1}{4(x_1 x_2)^2} - 4x_1 x_2$.

设 $t = \frac{1}{x_1 x_2} < 0$, 则 $|x_2 - x_1|^2 = g(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{4}{t}, g'(t) = \frac{1}{2}t + \frac{4}{t^2} = \frac{t^3 + 8}{2t^2}$.

令 $g'(t) = 0$, 解得 $t = -2$, 则 $g(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{4}{t}$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在 $(-2, 0)$ 上单调递增,

所以 $g(t) \geq g(-2) = 3$, 即 $|x_2 - x_1|^2 \geq 3$,

故 $|x_2 - x_1| \geq \sqrt{3}$.

题型十五 比值代换型证明不等式



【典例分析】

例 1. 已知函数 $f(x) = x \log_a x - \left(2 + \frac{1}{\ln a}\right)x$ (a 为常数, $a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a = e$ 时, 若 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}mx^2 + 3x$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\ln x_1 + \ln x_2 > 0$.

【答案】(1) 答案见解析 (2) 证明见解析

【分析】(1) 先求出函数的定义域, 再对函数求导, 然后分 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 两种情况判断导数的正负, 从而可求出函数的单调区间,

(2) $g'(x) = \ln x + 1 - mx$, 由题知, 方程 $\ln x + 1 - mx = 0$ 有两个不同的正根 x_1, x_2 , 设 $0 < x_1 < x_2$, 则 $\ln x_1 + 1 = mx_1$ ①, $\ln x_2 + 1 = mx_2$ ②, ① + ② 得: $\ln x_1 + \ln x_2 + 2 = m(x_1 + x_2)$, ① - ② 得: $\ln x_1 - \ln x_2 =$

$m(x_1 - x_2)$, 消去 m , 化简变形, 再令 $t = \frac{x_2}{x_1}$, 则 $t > 1$, $\ln x_1 + \ln x_2 + 2 = \frac{\ln t(t+1)}{t-1}$, 所以只要证 $\ln t >$

$\frac{2(t-1)}{t+1}$, 构造函数 $h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$, 利用导数求其最小值大于零即可

解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \log_a x - 2$,

① 当 $a > 1$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 解得 $x > a^2$, 由 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < a^2$,

所以 $f(x)$ 的增区间为 $(a^2, +\infty)$, 减区间为 $(0, a^2)$

② 当 $0 < a < 1$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 解得 $0 < x < a^2$, 由 $f'(x) < 0$, 解得 $x > a^2$,

所以 $f(x)$ 的增区间为 $(0, a^2)$, 减区间为 $(a^2, +\infty)$

综上: 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 的增区间为 $(a^2, +\infty)$, 减区间为 $(0, a^2)$

当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 的增区间为 $(0, a^2)$, 减区间为 $(a^2, +\infty)$

(2) 由 $g(x) = x \ln x - \frac{1}{2}mx^2$, 得 $g'(x) = \ln x + 1 - mx$ 由题知, 方程 $\ln x + 1 - mx = 0$ 有两个不同的正根 x_1, x_2 , 设 $0 < x_1 < x_2$

则 $\ln x_1 + 1 = mx_1$ ①, $\ln x_2 + 1 = mx_2$ ②

① + ② 得: $\ln x_1 + \ln x_2 + 2 = m(x_1 + x_2)$,

① - ② 得: $\ln x_1 - \ln x_2 = m(x_1 - x_2)$, 消去 m 得 $\ln x_1 + \ln x_2 + 2 = \frac{(\ln x_2 - \ln x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\ln \frac{x_2}{x_1}(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1}$
 $= \frac{\ln \frac{x_2}{x_1} \left(\frac{x_2}{x_1} + 1 \right)}{\frac{x_2}{x_1} - 1}$,

令 $t = \frac{x_2}{x_1}$, 则 $t > 1$, $\ln x_1 + \ln x_2 + 2 = \frac{\ln t(t+1)}{t-1}$, 要证 $\ln x_1 + \ln x_2 > 0$, 即证 $\ln x_1 + \ln x_2 + 2 > 2$, 即证

$\frac{\ln t(t+1)}{t-1} > 2$,

即证 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$, 令 $h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$, 则 $h'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$,

当 $t > 1$ 时 $h'(t) > 0$, 所以函数 $h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增,

又因为 $h(1) = 0$, 所以 $h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} > 0$, 所以 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$,

所以 $\ln x_1 + \ln x_2 > 0$.

【变式演练】

1. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{2} - 1 - a \ln x$ 恰有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 > x_2)$.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: $3x_1 + x_2 > 6a$.

【答案】(1) $a > 0$; (2) 证明见解析.

【分析】(1) 分 $a \leq 0$ 时, $a > 0$ 时, 两种情况讨论, 根据函数的单调性求出函数的最值, 根据函数的最值即可得出结论;

(2) 当 $a > 0$ 时, 令 $t = \frac{x_2}{x_1}$, 则 $0 < t < 1$, 且 $x_2 = tx_1$, $f(x_1) = \frac{x_1}{2} - 1 - a \ln x_1 = 0$,

$f(x_2) = \frac{x_2}{2} - 1 - a \ln x_2 = 0$, 从而可得 $x_1 = \frac{2a \ln t}{t-1}$, $x_2 = tx_1 = \frac{2at \ln t}{t-1}$, 要证 $3x_1 + x_2 > 6a$, 即证 $\frac{6a \ln t}{t-1} + \frac{2at \ln t}{t-1} > 6a$, 令 $\varphi(t) = \ln t - \frac{3(t-1)}{3+t}$, $0 < t < 1$, 求出函数 $\varphi(t)$ 的最大值即可得证.

解: (1) 函数 $f(x)$ 定义域为 $\{x | x > 0\}$, $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{x} = \frac{x-2a}{2x}$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 至多一个零点, 不合题意, 舍去;

当 $a > 0$ 时,

当 $0 < x < 2a$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x > 2a$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(2a) = a - 1 - a \ln 2a$, 记 $g(x) = x - 1 - x \ln 2x (x > 0)$, 则 $g'(x) = 1 - \ln 2x - 1 = -\ln 2x$,

当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

所以 $g(x)_{\max} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} \ln 1 = -\frac{1}{2} < 0$, 即 $f(2a) < 0$, 又 $e^{\frac{1}{a}} > \frac{1}{2a}$. 故 $e^{-\frac{1}{a}} < 2a$, 且 $f\left(e^{-\frac{1}{a}}\right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{a}} - 1 - a \ln e^{-\frac{1}{a}} =$

$\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{a}} > 0$ 令 $x_0 = (a + \sqrt{a^2 + 2})^2$, 则 $f(x_0) = \frac{x_0}{2} - 1 - a \ln x_0 = \frac{x_0}{2} - 1 - a \sqrt{x_0} = 0$, 故函数 $f(x)$ 在区间 $(e^{-\frac{1}{a}}, 2a)$, $(2a, (a + \sqrt{a^2 + 2})^2)$ 分别存在一个零点. 综上可得, 当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个零点.

(2) 当 $a > 0$ 时, 令 $t = \frac{x_2}{x_1}$, 则 $0 < t < 1$, 且 $x_2 = tx_1$, 所以 $f(x_1) = \frac{x_1}{2} - 1 - a \ln x_1 = 0$, ①

$f(x_2) = \frac{x_2}{2} - 1 - a \ln x_2 = 0$ 即 $\frac{tx_1}{2} - 1 - a \ln(tx_1) = 0$ ②. ① - ②, 得 $\frac{1-t}{2} x_1 + a \ln t = 0$, 即 $x_1 = \frac{2a \ln t}{t-1}$,

所以 $x_2 = tx_1 = \frac{2at \ln t}{t-1}$, 要证 $3x_1 + x_2 > 6a$, 即证 $\frac{6a \ln t}{t-1} + \frac{2at \ln t}{t-1} > 6a$, 又 $a > 0$, 即证 $\frac{3 \ln t}{t-1} + \frac{t \ln t}{t-1} > 3$,

又 $0 < t < 1$, 即证 $3 \ln t + t \ln t < 3(t-1)$, 即证 $\ln t - \frac{3(t-1)}{3+t} < 0$, (*) 令 $\varphi(t) = \ln t - \frac{3(t-1)}{3+t}$, $0 < t < 1$,

$$\text{则 } \varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{12}{(3+t)^2} = \frac{(t+3)^2 - 12t}{t(t+3)^2} = \frac{(t-3)^2}{t(t+3)^2} > 0$$

所以 $\varphi(t)$ 在 $0 < t < 1$ 时单调递增, 且 $\varphi(t) < \varphi(1) = \ln 1 - 0 = 0$,

所以 (*) 式得证, 即 $3x_1 + x_2 > 6a$ 成立.

○ ○ 题型十六 幂指对与三角函数型证明不等式 ○ ○



【典例分析】

例 1. 已知函数 $f(x) = e^x - ax - \cos x$, $g(x) = f(x) - x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 求 a 的最大值;

(2) 当 a 取 (1) 中所求的最大值时, 讨论 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的零点个数, 并证明 $g(x) > -\sqrt{2}$.

【答案】 (1) 1; (2) 2 个, 证明见解析.

【分析】

(1) 求出函数的导数, 转化为导函数 $f'(x) = e^x - a + \sin x \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 再求导求其最小值即可;

(2) 利用导数分析函数在 $x \leq 0, x > 0$ 上的单调性, 根据两点的存在性定理可确定出 2 个零点, 再由导数求出函数的最小值, 求出最小值的范围即可得证.

解: (1)

由题意可知, $f'(x) = e^x - a + \sin x \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立,

因为 $f''(x) = e^x + \cos x \geq 1 + \cos x \geq 0$, 所以 $f'(x)$ 单调递增,

所以 $f'(0) = 1 - a \geq 0$, 解得 $a \leq 1$, 所以 a 的最大值为 1.

(2)

易知 $a = 1$, 所以 $g(x) = e^x - 2x - \cos x$,

当 $x \leq 0$ 时, $g'(x) = e^x - 2 + \sin x \leq -1 + \sin x \leq 0$, 所以 $g(x)$ 单调递减,

当 $x > 0$ 时, $g'(x) = e^x - 2 + \sin x$, 则 $g''(x) = e^x + \cos x \geq 1 + \cos x \geq 0$, 所以 $g'(x)$ 单调递增,

因为 $g'(0) = -1 < 0, g'(1) = e - 2 + \sin 1 > 0$, 所以存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $g'(x_0) = 0$,

$g(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $g(0) = 0$, 所以 $g(x_0) < 0$,

因为 $g(2) = e^2 - 4 - \cos 2 > 0$, 所以存在 $x_1 \in (x_0, 2)$, 使得 $g(x_1) = 0$,

所以 $g(x)$ 有两个零点, 又因为 $e^{x_0} - 2 + \sin x_0 = 0$,

所以 $g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{x_0} - 2x_0 - \cos x_0 = 2 - 2x_0 - \sin x_0 - \cos x_0$, 因为 $x_0 < 1$,

所以 $g(x_0) > -\sin x_0 - \cos x_0 = -\sqrt{2} \sin(x_0 + \frac{\pi}{4}) \geq -\sqrt{2}$, 故 $g(x) > -\sqrt{2}$ 成立.



【变式演练】

例 1. 已知函数 $f(x) = 2\sin x - x\cos x - ax$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $y = x + 2$ 平行.

(i) 求 a 的值;

(ii) 证明: 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内有唯一极值点;

(2) 当 $a \leq 1$ 时, 证明: 对任意 $x \in (0, \pi)$, $f(x) > 0$.

【答案】(1) (i) $a=0$; (ii) 证明见解析; (2) 证明见解析.

【分析】

(1) (i) 求出 $f'(x)$, 由直线平行的充要条件得到切线的斜率, 根据导数的几何意义求出 a 的值, 即可得到答案;

(ii) 求出 $f'(x)$, 令 $g(x) = f'(x)$, 利用导数研究 $g(x)$ 的单调性, 从而得到 $g(x)$ 的取值情况, 由此得到 $f(x)$ 的单调性, 结合极值的定义进行分析, 即可证明;

(2) 利用 (1) 中的单调性, 分 $a \leq -1$, $-1 < a \leq 1$ 两种情况, 分别利用导数研究函数的单调性, 确定函数 $f(x)$ 的取值情况, 由此证明结论.

【详解】

(1) (i) 解: 因为函数 $f(x) = 2\sin x - x\cos x - ax$,

所以 $f'(x) = \cos x + x\sin x - a$,

因为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $y = x + 2$ 平行,

所以切线的斜率为 1,

则 $f'(0) = 1$, 即 $1 - a = 1$, 解得 $a = 0$,

检验: 当 $a = 0$ 时, $f(0) = 0$, 因此切线方程为 $y = x$, 符合题意,

故 $a = 0$.

(ii) 证明: 由 (i) 可知, $a = 0$, 则 $f'(x) = \cos x + x\sin x$,

令 $g(x) = f'(x) = \cos x + x\sin x$, 则 $g'(x) = x\cos x$,

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 单调递增, 即 $f'(x)$ 单调递增,

当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $g'(x) < 0$, 则 $g(x)$ 单调递减, 即 $f'(x)$ 单调递减,

又 $f'(0) = 1 > 0$, $f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$, $f'(\pi) = -1 < 0$,

故存在唯一的 $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使得 $f'(x_0) = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (x_0, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调递减,

所以当 $x = x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值 $f(x_0)$,

故函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内有唯一极值点.

(2) 证明: 由 (1) 可知, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x)$ 单调递增,

当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $f'(x)$ 单调递减,

因为 $a \leq 1$, 则 $f'(0) = 1 - a \geq 0$, 且 $f'(\pi) = -1 - a$,

①若 $-1 - a \geq 0$, 即 $a \leq -1$ 时, 则 $f'(\pi) > 0$,

所以 $f'(x) > 0$ 在 $(0, \pi)$ 上恒成立, 即 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增,

故 $f(x) > f(0) = 2\sin 0 = 0$, 符合题意;

②若 $-1 - a < 0$, 即 $-1 < a \leq 1$ 时, $f'(\pi) < 0$,

因为 $f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - a > 0$,

故存在 $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使得 $f'(x_0) = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,
 当 $x \in (x_0, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调递减,
 所以当 $x = x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值 $f(x_0)$,
 即 $f(x) > f(0) = 0$ 且 $f(x) > f(\pi) = \pi(1-a) > 0$, 符合题意.
 综上所述, 当 $a \leq 1$ 时, 对任意 $x \in (0, \pi)$, $f(x) > 0$.

题型十七 不等式证明综合型



【典例分析】

例 1. 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln(x+b)$, $a, b \in R$.

(1) 当 $a \geq e$, $b = 1$ 时, 证明 $f(x) > 2$;

(2) 当 $b = 0$ 时, 令 $g(x) = f(x) - 1$

①若 $g(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围;

②已知 $1.098 < \ln 3 < 1.099$, $e^{0.048} < 1.050$, $e^{-0.045} < 0.956$, 证明: $1.14 < \ln \pi < 1.15$.

【答案】 (1) 证明见解析; (2) $(0, \frac{1}{e})$; (3) 证明见解析.

【分析】

(1) 当 $a \geq e$, $b = 1$ 时, 可得 $f(x) = ae^x - \ln(x+1) \geq e^{x+1} - \ln(x+1)$, 令 $t = x+1$ ($t > 0$), 令 $h(t) = e^t - \ln t - 2$, 利用导数求得函数 $h(t)$ 的单调性与最值, 即可求解.

(2) 当 $b = 0$ 时, 单调 $g(x) = ae^x - \ln x - 1$, ①若 $g(x)$ 有两个零点, 转化为 $a = \frac{\ln x + 1}{e^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个解, 令 $m(x) = \frac{\ln x + 1}{e^x}$, 利用导数求得函数 $m(x)$ 的单调性与极值, 即可求解; ②令 $n(x) = e^{x-1} - \ln x - 1$, 令导数得到 $n(x) \geq 0$, 即 $e^{x-1} \geq \ln x + 1$, 进而得到结论.

【详解】

(1) 当 $a \geq e$, $b = 1$ 时, 函数 $f(x) = ae^x - \ln(x+1) \geq e^{x+1} - \ln(x+1)$,

令 $t = x+1$ ($t > 0$), 令 $h(t) = e^t - \ln t - 2$, 即证 $h(t) > 0$,

又由 $h'(t) = e^t - \frac{1}{t}$, 令 $\varphi(t) = e^t - \frac{1}{t}$, 可得 $\varphi'(t) = e^t + \frac{1}{t^2} > 0$,

所以函数 $\varphi(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $h'(1) = e - 1$, $h'(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}} - 2 < 0$, 所以 $\exists t_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $h'(t_0) = 0$,

即 $h'(t_0) = e^{t_0} - \frac{1}{t_0} = 0$, 可得 $e^{t_0} = \frac{1}{t_0}$,

所以函数 $h(t)$ 在 $(0, t_0)$ 上单调递减, 在 $(t_0, +\infty)$ 上单调递增,

则 $h(t) \geq h(t_0) = e^{t_0} - \ln t_0 - 2 = t_0 + \frac{1}{t_0} - 2 \geq 2\sqrt{t_0 \times \frac{1}{t_0}} - 2 = 0$,

当且仅当 $t_0 = 1$ 时, 即 $x = 0$ 时等号成立,

因为 $t_0 \neq 1$, 所以 $h(t) > 0$, 即 $f(x) > 2$.

(2) 当 $b = 0$ 时, 令 $g(x) = f(x) - 1 = ae^x - \ln x - 1$

①若 $g(x)$ 有两个零点, 即 $g(x) = ae^x - \ln x - 1 = 0$ 有两个解,

即 $a = \frac{\ln x + 1}{e^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个解,

令 $m(x) = \frac{\ln x + 1}{e^x}$, 可得 $m'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x - 1}{e^x}$,

令 $w(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1$, 可得 $w'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$,

所以 $w(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $w(1) = 0$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 单调递减,

当 $x = 1$ 时, $m(1) = \frac{1}{e}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $m(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $m(x) \rightarrow 0$,

若方程 $a = \frac{\ln x + 1}{e^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个解, 即 $y = a$ 与 $y = m(x)$ 的图象有两个交点,

所以 $0 < a < \frac{1}{e}$, 即实数 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{e})$.

② 令 $n(x) = e^{x-1} - \ln x - 1$, 可得 $n'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$, 可得 $n'(1) = 0$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $n'(x) < 0$, $n(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $n'(x) > 0$, $n(x)$ 单调递增,

又由 $x = 1$ 时, $n(1) = 0$, 所以 $n(x) \geq 0$, 即 $e^{x-1} \geq \ln x + 1$,

可得 $1.050 > e^{0.048} > e^{\frac{\pi}{3}-1} > 1 + \ln \frac{\pi}{3} = \ln \pi + 1 - \ln 3 > \ln \pi + 1 - 1.099 > \ln \pi - 0.1$,

则 $\ln \pi < 1.150$,

又由 $1 + 1.098 - \ln \pi < 1 + \ln 3 - \ln \pi = 1 + \ln \frac{3}{\pi} < e^{\frac{3}{\pi}-1} < e^{-0.045} < 0.956$,

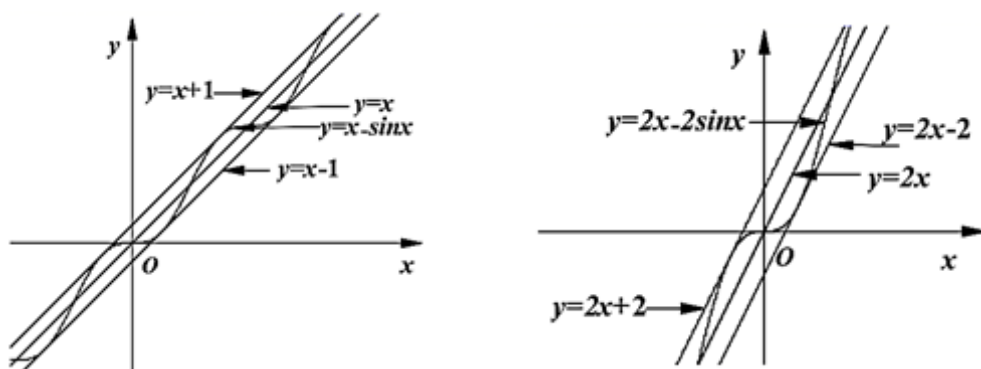
则 $\ln \pi > 1.142 > 1.14$, 所以 $1.14 < \ln \pi < 1.15$.

【变式演练】

1. 设直线 $l: y = g(x)$, 曲线 $S: y = F(x)$. 若直线 l 与曲线 S 同时满足下列两个条件: ① 直线 l 与曲线 S 相切且至少有两个切点; ② 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $g(x) \geq F(x)$. 则称直线 l 为曲线 S 的“上夹线”.

(1) 已知函数 $f(x) = x - 2\sin x$. 求证: $y = x + 2$ 为曲线 $f(x)$ 的“上夹线”;

(2) 观察下图:



根据上图, 试推测曲线 $S: y = mx - n \sin x (n > 0)$ 的“上夹线”的方程, 并给出证明.

【答案】(1) 证明见解析; (2) $y = mx + n$, 证明见解析

【分析】

(1) 求出直线 l 与曲线 S 的 2 个切点, 进而证明 $g(x) - F(x) \geq 0$, 可证明结论成立;

(2) 根据“上夹线”的定义来证明, 先证明至少有两个切点, 再证明 $g(x) \geq F(x)$ 恒成立.



【详解】

(1) 由 $f'(x) = 1 - 2\cos x$, 令 $f'(x) = 1$, 得 $\cos x = 0$,

当 $x = -\frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x = 0$,

此时 $y_1 = x + 2 = -\frac{\pi}{2} + 2$, $y_2 = x - 2\sin x = -\frac{\pi}{2} + 2$,

因为 $y_1 = y_2$, 所以 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + 2)$ 是直线 l 与曲线 S 的一个切点;

当 $x = \frac{3\pi}{2}$ 时, $\cos x = 0$,

此时 $y_1 = x + 2 = \frac{3\pi}{2} + 2$, $y_2 = x - 2\sin x = \frac{3\pi}{2} + 2$,

因为 $y_1 = y_2$, 所以 $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} + 2)$ 是直线 l 与曲线 S 的一个切点;

所以直线 l 与曲线 S 相切且至少有两个切点;

对任意 $x \in \mathbf{R}$, $g(x) - F(x) = (x + 2) - (x - 2\sin x) = 2 + 2\sin x = 2(1 + \sin x) \geq 0$,

所以 $g(x) \geq F(x)$.

因此直线 $l: y = x + 2$ 是曲线 $S: y = ax + b\sin x$ 的“上夹线”.

(2) 推测: $y = mx - n\sin x (n > 0)$ 的“上夹线”的方程为 $y = mx + n$,

① 先检验直线 $y = mx + n$ 与曲线 $y = mx - n\sin x$ 相切, 且至少有两个切点:

设: $F(x) = mx - n\sin x$,

$\because F'(x) = m - n\cos x$,

令 $F'(x) = m - n\cos x = m$, 得: $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,

当 $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ 时, $F(2k\pi - \frac{\pi}{2}) = m(2k\pi - \frac{\pi}{2}) + n$,

故: 过曲线 $F(x) = mx - n\sin x$ 上的点 $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, m(2k\pi - \frac{\pi}{2}) + n)$ 的切线方程为:

$y - [m(2k\pi - \frac{\pi}{2}) + n] = m[x - (2k\pi - \frac{\pi}{2})]$, 化简得: $y = mx + n$.

即直线 $y = mx + n$ 与曲线 $y = mx - n\sin x$ 相切且有无数个切点.

不妨设 $g(x) = mx + n$,

② 下面检验 $g(x) \geq F(x)$,

$\because g(x) - F(x) = mx + n - (mx - n\sin x) = n(1 + \sin x) \geq 0 (n > 0)$,

所以直线 $y = mx + n$ 是曲线 $y = F(x) = mx - n\sin x$ 的“上夹线”.

题型二

好题演练

1. (2023·江苏南通·高三校联考阶段练习) 已知函数 $f(x) = e^{ax} - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$.

(1) 若 $a = 0$, 关于 x 的不等式 $f(x) < m$ 恰有两个整数解, 求 m 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 的最小值为 1, 求 a .

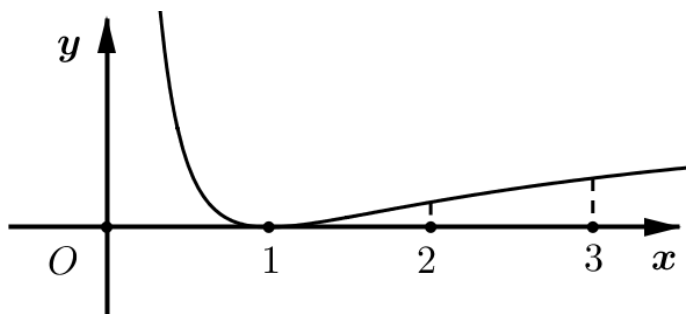
【答案】(1) $\frac{1 - \ln 2}{2} < m \leq \frac{2 - \ln 3}{3}$ (2) 1

【分析】(1) 利用导数研究 $f(x)$ 的单调性, 进而可得 $f(x)_{\min} = f(1) = 0$, 并求出 $f(2), f(3)$, 即可确定 m

的范围;

(2) 根据 $f(x)$ 的值域及 $f(x)$ 的最小值为 1 排除 $a < 0$ 、 $a = 0$, 构造 $y = e^x - x - 1$ 并应用导数研究函数符号, 放缩法求 $f(x)$ 最值, 即可得参数值.

【详解】(1) 当 $a = 0$ 时 $f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$,
当 $0 < x < 1$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减, 当 $x > 1$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增, ,
所以 $f(x)_{\min} = f(1) = 0$, $f(2) = 1 - \frac{1 + \ln 2}{2} = \frac{1 - \ln 2}{2}$, $f(3) = 1 - \frac{1 + \ln 3}{3} = \frac{2 - \ln 3}{3}$,



要使 $m > f(x)$ 恰有两个整数解, 则 $\frac{1 - \ln 2}{2} < m \leq \frac{2 - \ln 3}{3}$.

(2) 若 $a < 0$, 当 x 趋向 $+\infty$ 时 $f(x)$ 趋向于 0, 此时 $f(x)$ 最小值不为 1, 舍去.

由 (1) 知: $a = 0$ 时 $f(x)$ 最小值为 0, 此时 $f(x)$ 最小值不为 1, 舍去.

所以 $a > 0$, 则 $f(x) = \frac{e^{ax+\ln x} - 1 - \ln x}{x}$,

令 $y = e^x - x - 1$, 则 $y' = e^x - 1$, 故 $x < 0$ 时 $y' < 0$, $x > 0$ 时 $y' > 0$ 恒成立,

所以 y 在 $(-\infty, 0)$ 上递减, 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 且 $y \geq y|_{x=0} = 0$, 即 $e^x \geq x + 1$ 恒成立,

所以 $f(x) = \frac{e^{ax+\ln x} - 1 - \ln x}{x} \geq \frac{ax + \ln x + 1 - \ln x - 1}{x} = a$, 仅当 $ax + \ln x = 0$, 即 $a = -\frac{\ln x}{x} > 0$ 时取等号,

令 $y = -\frac{\ln x}{x}$, 则 $y' = \frac{\ln x - 1}{x^2}$, 故 $0 < x < e$ 时 $y' < 0$, y 递减, $x > e$ 时 $y' > 0$, y 递增,

所以 $y \geq y|_{x=e} = -\frac{1}{e}$, 且 $0 < x < 1$ 时 $y > 0$, $x > 1$ 时 $-\frac{1}{e} \leq y < 0$,

综上, $a = -\frac{\ln x}{x} > 0$, 即 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = a$ 成立.

此时 $f(x)_{\min} = a$, 要使 $f(x)$ 的最小值为 1, 即 $a = 1$.

【例 2】(天一大联考皖豫名校联盟 2023 届高三第三次考试数学试题) 已知函数 $f(x) = x(\ln x - a)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最小值为 -1 , 函数 $g(x) = \frac{m}{2}x^2 - m$, $a, m \in \mathbf{R}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 设函数 $F(x) = f(x) - g(x)$, x_1, x_2 是 $F(x)$ 的两个不同的极值点, 且 $x_1 < x_2$, 证明: $2\ln x_1 + 3\ln x_2 > 5$.

【答案】(1) 1;

(2) 证明见解析.

【分析】(1) 由题可得 $f'(x) = \ln x - a + 1$, 然后分情况讨论求函数的最值结合条件即得;



(2) 由题可知 x_1, x_2 是 $\ln x - mx = 0$ 的两个根, 进而可将不等式转化为 $\ln \frac{x_1}{x_2} < \frac{5(x_1 - x_2)}{2x_1 + 3x_2}$, 然后通过换

元法, 构造函数 $\varphi(t) = \ln t - \frac{5(t-1)}{2t+3}$, 利用导数研究函数的性质进而即得.

【详解】(1) 依题意有 $f'(x) = \ln x - a + 1$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = e^{a-1}$,

由 $f'(x) < 0$, 可得 $x \in (0, e^{a-1})$, 由 $f'(x) > 0$, 可得 $x \in (e^{a-1}, +\infty)$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, e^{a-1})$ 上单调递减, 在 $(e^{a-1}, +\infty)$ 上单调递增.

(i) 若 $e^{a-1} \geq e$, 即 $a \geq 2$, 则 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减, 则 $f(x) \in [e(1-a), -a]$,

所以 $-1 = e(1-a)$, 所以 $a = 1 + \frac{1}{e} < 2$, 不符合题意;

(ii) 若 $e^{a-1} \leq 1$, 即 $a \leq 1$, 则 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增, 则 $f(x) \in [-a, e(1-a)]$,

所以 $-a = -1$, $a = 1$, 符合题意;

(iii) 若 $1 < a < 2$, 则 $f(x)_{\min} = f(e^{a-1}) = -e^{a-1} = -1$, $a = 1$, 不符合题意.

综上, 可知 $a = 1$;

(2) 由 (1) 可知 $f(x) = x(\ln x - 1)$,

所以 $F(x) = f(x) - g(x) = x \ln x - x - \frac{m}{2}x^2 + m$,

则 $F'(x) = \ln x - mx$,

由题意可知 x_1, x_2 是方程 $F'(x) = 0$, 即 $\ln x - mx = 0$ 的两个根,

则 $\ln x_1 = mx_1, \ln x_2 = mx_2$,

所以 $2\ln x_1 + 3\ln x_2 > 5$ 等价于 $2mx_1 + 3mx_2 > 5$.

因为 $0 < x_1 < x_2$, 所以原不等式等价于 $m > \frac{5}{2x_1 + 3x_2}$.

因为 $\ln x_1 = mx_1, \ln x_2 = mx_2$,

作差得 $\ln \frac{x_1}{x_2} = m(x_1 - x_2)$, 即 $m = \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2}$,

所以原不等式等价于 $\frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} > \frac{5}{2x_1 + 3x_2}$.

因为 $0 < x_1 < x_2$, 所以 $\ln \frac{x_1}{x_2} < \frac{5(x_1 - x_2)}{2x_1 + 3x_2}$ 恒成立.

令 $t = \frac{x_1}{x_2}, t \in (0, 1)$, 则不等式 $\ln t < \frac{5(t-1)}{2t+3}$ 在 $t \in (0, 1)$ 时恒成立.

令 $\varphi(t) = \ln t - \frac{5(t-1)}{2t+3}$, 则 $\varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{25}{(2t+3)^2} = \frac{4t^2 - 13t + 9}{t(2t+3)^2}$.

令函数 $s(t) = 4t^2 - 13t + 9$, 则 $s(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

所以 $s(t) > s(1) = 0$,

则 $t \in (0, 1)$ 时, $\varphi'(t) > 0$, 所以 $\varphi(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增.

又 $\varphi(1) = 0$, 所以 $\varphi(t) < 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立,

故 $2\ln x_1 + 3\ln x_2 > 5$.

【点睛】方法点睛: 利用导数证明不等式问题, 方法如下:

(1) 直接构造函数法: 证明不等式 $f(x) > g(x)$ (或 $f(x) < g(x)$) 转化为证明 $f(x) - g(x) > 0$ (或 $f(x) - g(x) < 0$), 进而构造辅助函数 $h(x) = f(x) - g(x)$;

(2) 适当放缩构造法: 一是根据已知条件适当放缩; 二是利用常见放缩结论;

(3) 构造“形似”函数, 稍作变形再构造, 对原不等式同解变形, 根据相似结构构造辅助函数.

例 3. (2023 春·安徽马鞍山·高二马鞍山二中校考期中) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax + b$, 且满足 $f(x)$ 的导数 $y = f'(x)$ 的最小值为 $-\frac{3}{4}$.

(1) 求 a 值;

(2) 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值与最小值的和为 7, 求 b 值.

【答案】 (1) $a = -\frac{3}{4}$

(2) $b = \frac{3}{8}$

【分析】 (1) 求导, 结合二次函数的最值分析运算;

(2) 求导, 利用导数求函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上最值, 分析运算.

【详解】 (1) $\because f'(x) = 3x^2 + a$, 则 $f'(x)$ 的最小值为 $f'(0) = a$,

由题意可得: $a = -\frac{3}{4}$.

(2) 由 (1) 可得: $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x + b, x \in [-1, 2]$, 则 $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{4}, x \in [-1, 2]$,

令 $f'(x) > 0$, 解得 $\frac{1}{2} < x \leq 2$ 或 $-1 \leq x < -\frac{1}{2}$; 令 $f'(x) < 0$, 解得 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$;

则 $f(x)$ 在 $[-1, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 2]$ 单调递增, 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上单调递减,

且 $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + b = -\frac{1}{4} + b, f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^3 + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + b = \frac{1}{4} + b,$

$f(-1) = -1 - \frac{3}{4}(-1) + b = -\frac{1}{4} + b, f(2) = 2^3 - \frac{3}{4} \times 2 + b = \frac{13}{2} + b,$

且 $-\frac{1}{4} + b < \frac{1}{4} + b < \frac{13}{2} + b,$

所以函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值 $[f(x)]_{\max} = \frac{13}{2} + b$, 最小值 $[f(x)]_{\min} = -\frac{1}{4} + b,$

又 $\because$ 函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值与最小值的和为 7,

则 $\frac{13}{2} + b + (-\frac{1}{4} + b) = \frac{25}{4} + 2b = 7$, 解得 $b = \frac{3}{8}$.

例 4. (2023·吉林通化·梅河口市第五中学校考模拟预测) 已知函数 $f(x) = ax(l - \ln x)$ 和 $g(x) = \frac{b \ln x}{x}$

有相同的最大值, 并且 $ab = e$.

(1) 求 a, b ;

(2) 证明: 存在直线 $y = k$, 其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点, 且从左到右的三个交点的横坐标成等比数列.

【答案】 (1) $\begin{cases} a = 1 \\ b = e \end{cases}$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 分类讨论 a, b , 应用导数研究 $f(x)$ 、 $g(x)$ 研究其单调性、最值, 结合已知求出 a, b ;

(2) 根据 (1) 确定 $f(x)$ 、 $g(x)$ 解析式、单调性、零点, 数形结合判断直线的存在性, 最后设交点坐标, 并代入函数解析式求证交点横坐标的关系, 应用等比中项性质判断等比数列.

【详解】(1) $f'(x) = a(1 - \ln x) + ax\left(-\frac{1}{x}\right) = -a \ln x, x \in (0, +\infty)$.

若 $a < 0$, 则 $x \in (0, 1)$ 时 $f'(x) < 0, x \in (1, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在定义域内先减后增, 无最大值.

若 $a = 0$, 则 $f(x) = 0$, 最大值为 0, 但不满足 $ab = e$.

若 $a > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$.

当 $0 < x < 1$ 时 $f'(x) > 0, f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增;

当 $x > 1$ 时 $f'(x) < 0, f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $x = 1$ 时 $f(x)$ 取得最大值, 最大值为 $f(1) = a$.

$$g'(x) = \frac{b(1 - \ln x)}{x^2}, x \in (0, +\infty).$$

若 $b < 0$, 则 $x \in (0, e)$ 时 $g'(x) < 0, x \in (e, +\infty)$ 时 $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在定义域内先减后增, 无最大值.

若 $b = 0$, 则 $g(x) = 0$, 最大值为 0, 但不满足 $ab = e$.

若 $b > 0$, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = e$.

当 $0 < x < e$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增;

当 $x > e$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

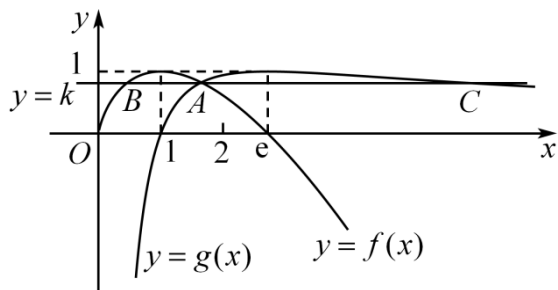
所以 $x = e$ 时 $g(x)$ 取得最大值, 最大值为 $g(e) = \frac{b}{e}$.

综上, $\begin{cases} ab = e \\ a = \frac{b}{e} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = e \end{cases}$.

(2) 由 (1) 知: $f(x) = x(1 - \ln x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$g(x) = \frac{e \ln x}{x}$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f(x)_{\max} = g(x)_{\max} = 1, f(x)$ 有唯一的零点 $e, g(x)$ 有唯一的零点 1.

它们的大致图像如图所示, 设曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(1, e)$ 上交于点 A ,



当直线 $y = k$ 经过点 A 时, 直线 $y = k$ 与曲线 $f(x)$ 还有另一个交点 B ,

设 $B(x_1, k), A(x_2, k), x_1 < x_2$, 不妨设直线 $y = k$ 与曲线 $g(x)$ 还有另一个交点 $C(x_3, k)$,

则 $x_1(1 - \ln x_1) = x_2(1 - \ln x_2) = k$, 则 $x_1 \ln \frac{e}{x_1} = k$, 故 $\frac{e \ln \frac{e}{x_1}}{\frac{e}{x_1}} = k$ ①, 同理得 $\frac{e \ln \frac{e}{x_2}}{\frac{e}{x_2}} = k$ ②,

由①②知, $\frac{e}{x_1}$ 与 $\frac{e}{x_2}$ 是直线 $y=k$ 与曲线 $g(x)$ 交点的横坐标, 故 C 是存在的.

因为 $x_1 < x_2$ 且 $\frac{e \ln x_2}{x_2} = \frac{e \ln x_3}{x_3} = k$, 所以 $\frac{e}{x_1} > \frac{e}{x_2}$, 又 $x_2 < x_3$,

所以 $\frac{e}{x_2} = x_2$, $\frac{e}{x_1} = x_3$, 从而有 $x_2^2 = x_1 x_3$, 故结论成立.

【点睛】关键点点睛: 第二问, 根据 (1) 确定 $f(x)$ 、 $g(x)$ 的单调性、零点, 画出函数草图, 数形结合判断直线 $y=k$ 存在性, 再设点坐标代入函数式列方程求交点横坐标的关系.

5. (2023 春·四川广安·高二广安二中校考期中) 已知 $m > 0$, e 是自然对数的底数, 函数 $f(x) = e^x + m - m \ln(mx - m)$.

(1) 若 $m = 2$, 求函数 $F(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - 4x + 2 - f(x)$ 的极值;

(2) 是否存在实数 m , $\forall x > 1$, 都有 $f(x) \geq 0$? 若存在, 求 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) 极大值为 $F(2) = 2\ln 2 - 6$; $F(x)$ 的极小值为 $F(3) = 4\ln 2 - \frac{15}{2}$

(2) 存在, $(0, e^2]$

【分析】(1) 将 $m = 2$ 代入可得 $F(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 2\ln(2x - 2)$, 对函数 $F(x)$ 求导利用导函数判断其单调性即可得出其极大值为 $F(2) = 2\ln 2 - 6$, $F(x)$ 的极小值为 $F(3) = 4\ln 2 - \frac{15}{2}$;

(2) 易知其定义域为 $(1, +\infty)$, 结合 $m > 0$ 将 $f(x) \geq 0$ 化简变形可得 $e^{x-\ln m} + (x - \ln m) \geq e^{\ln(x-1)} + \ln(x-1)$, 构造函数 $h(x) = e^x + x$ 易得其为单调递增函数, 即 $\ln m \leq x - \ln(x-1)$, 求得函数 $H(x) = x - \ln(x-1)$ 在定义域内的最小值即可得 $m \leq e^2$.

【详解】(1) 由 $m = 2$, 可得 $F(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - 4x + 2 - f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 2\ln(2x - 2)$,

易知 $F(x)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$,

则 $F'(x) = x - 4 + \frac{2}{x-1} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x-1} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-1}$.

x	$(1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	单调递增	$2\ln 2 - 6$	单调递减	$4\ln 2 - \frac{15}{2}$	单调递增

$\therefore F(x)$ 的极大值为 $F(2) = 2\ln 2 - 6$; $F(x)$ 的极小值为 $F(3) = 4\ln 2 - \frac{15}{2}$.

(2) 因为 $m > 0$, 由 $mx - m > 0$ 得 $x > 1$,

即 $f(x)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$.

当 $m > 0, x > 1$ 时, 由 $f(x) = e^x + m - m \ln(mx - m) \geq 0$ 可得,

$e^x + m \geq m \ln(mx - m) = m \ln m + m \ln(x - 1)$, 不等式两边同时除以 m 可得,

$\frac{1}{m}e^x + 1 \geq \ln m + \ln(x - 1)$, 即 $\frac{1}{m}e^x - \ln m \geq \ln(x - 1) - 1$

可得 $e^{x-\ln m} - \ln m \geq \ln(x-1) - 1$

所以 $e^{x-\ln m} + (x - \ln m) \geq \ln(x-1) + (x-1) = e^{\ln(x-1)} + \ln(x-1)$.

设 $h(x) = e^x + x$, 则 $e^{x-\ln m} + (x - \ln m) \geq e^{\ln(x-1)} + \ln(x-1)$

即 $h(x - \ln m) \geq h[\ln(x-1)]$.

易得 $h'(x) = e^x + 1 > 0$, 所以 $h(x)$ 为单调递增函数.

由 $h(x - \ln m) \geq h[\ln(x-1)]$, 可得 $x - \ln m \geq \ln(x-1)$, 所以 $\ln m \leq x - \ln(x-1)$

设 $H(x) = x - \ln(x-1)$, 则 $H'(x) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$.

$\therefore$ 当 $x \in (1, 2)$ 时, $H'(x) = \frac{x-2}{x-1} < 0$, 即 $H(x)$ 单调递减;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $H'(x) = \frac{x-2}{x-1} > 0$, 即 $H(x)$ 单调递增.

即 $x \in (1, +\infty)$ 时, $H(x)_{\min} = H(2) = 2$;

由题意可得 $\ln m \leq H(x)_{\min} = 2$, 即 $m \leq e^2$.

$\therefore$ 存在实数 m , 且 m 的取值范围为 $(0, e^2]$.

【点睛】方法点睛: 不等式恒成立求解参数取值范围时, 常用的方法是通过构造函数将问题转化成求解函数最大值或最小值问题, 即可求得参数取值范围.

例 6. (2023·广西南宁·统考二模) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2 + 2ax - 1$, 其中 a 为常数, e 为自然对数底数, $e = 2.71828 \dots$, 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 .

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: $\sqrt{x_1-1} + \sqrt{x_2-1} > 2$.

【答案】(1) $(\frac{1}{2}e^2, +\infty)$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 二次求导后, 根据函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 即可求解;

(2) 设 $x_1 < x_2$, 先确定 $1 < x_1 < 2 < x_2$, 根据 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$, 可得 $\frac{e^{x_2}}{e^{x_1}} = \frac{x_2-1}{x_1-1}$, 即 $x_2 - x_1 = \ln(x_2-1) - \ln(x_1-1)$, 令 $x_1-1 = t_1, x_2-1 = t_2$, 则 $t_2 - t_1 = \ln t_2 - \ln t_1 = 2\ln\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$. 令 $F(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1)$,

求导后根据单调性可得 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$, 从而得到 $t_2 - t_1 = 2\ln\sqrt{\frac{t_2}{t_1}} > 2 \frac{2(\sqrt{\frac{t_2}{t_1}} - 1)}{\sqrt{\frac{t_2}{t_1}} + 1} = 4 \cdot \frac{\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1}}$ 化

简后即可证明.

【详解】(1) 解法一: $f(x) = e^x - ax^2 + 2ax - 1, f'(x) = e^x - 2ax + 2a$

令 $\varphi(x) = f'(x) = e^x - 2ax + 2a$, 则 $\varphi'(x) = e^x - 2a$.

因 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 故 $\varphi(x) = e^x - 2ax + 2a$ 有两个零点,

若 $a \leq 0$, 则 $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调递增, 不可能有两个零点,

所以 $a > 0$, 令 $\varphi'(x) = e^x - 2a = 0$ 得 $x = \ln 2a$,

当 $x \in (-\infty, \ln 2a)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\ln 2a, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调递增;

所以 $\varphi(x)_{\min} = \varphi(\ln 2a) = 4a - 2a \ln(2a)$

因为 $\varphi(x)$ 有两个零点, 所以 $4a - 2a \ln(2a) < 0$, 则 $a > \frac{1}{2}e^2$.

又 $\varphi(0) = 2a > 0$, $\varphi(1) = e > 0$, $\therefore a > \frac{1}{2}e^2$

故实数 a 的取值范围为 $(\frac{1}{2}e^2, +\infty)$.

解法二:

$$f(x) = e^x - ax^2 + 2ax - 1, f'(x) = e^x - 2ax + 2a,$$

由题意知, $f'(x) = e^x - 2ax + 2a = 0$ 有两个根, 即 $e^x = 2a(x-1)$,

设 $h(x) = e^x, g(x) = 2a(x-1)$,

即函数 $h(x)$ 与 $g(x)$ 有两个不同交点,

设过点 $(1, 0)$ 的直线与 $y = h(x)$ 相切的切点为 (x_0, e^{x_0}) ,

$$h'(x) = e^x, \text{ 则有 } e^{x_0} = \frac{e^{x_0} - 0}{x_0 - 1},$$

解得: $x_0 = 2$, 此时切线斜率为: $h'(2) = e^2$,

当 $g(x) = 2a(x-1)$ 斜率大于 e^2 时, $y = h(x)$ 与 $y = g(x)$ 有两个交点,

则 $2a > e^2$, 故有 $a > \frac{e^2}{2}$,

故实数 a 的取值范围为 $(\frac{1}{2}e^2, +\infty)$.

解法三:

$$f'(x) = e^x - 2ax + 2a,$$

因为 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ,

则 $f'(x) = e^x - 2ax + 2a = 0$ 有两个零点.

$$\text{即 } a = \frac{e^x}{2x-2} = \varphi(x),$$

转化为 $y = a$ 与 $y = \varphi(x)$ 有 2 个交点,

$x = 1$ 时, $f'(1) = e \neq 0$.

$$\varphi'(x) = \frac{2e^x(x-2)}{(2x-2)^2}, x \neq 1,$$

当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $\varphi'(x) < 0$,

当 $x \in (1, 2)$ 时, $\varphi'(x) < 0$,

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$,

$\therefore y = \varphi(x)$ 在 $(-\infty, 1), (1, 2)$ 递减, 在 $(2, +\infty)$ 递增,

要使 $y = a$ 与 $y = \varphi(x)$ 有 2 个交点, 即 $a > \varphi(x)_{\min} = \varphi(2) = \frac{e^2}{2}$

$$\therefore a > \frac{e^2}{2}$$

故实数 a 的取值范围为 $(\frac{1}{2}e^2, +\infty)$.

(2) 设 $x_1 < x_2$, 因为 $\varphi(1) = e > 0$, $\varphi(2) = e^2 - 2a < 0$, 则 $1 < x_1 < 2 < x_2$,

因为 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$, 所以 $e^{x_1} = 2ax_1 - 2a$, $e^{x_2} = 2ax_2 - 2a$,

则 $\frac{e^{x_2}}{e^{x_1}} = \frac{x_2-1}{x_1-1}$, 取对数得 $x_2-x_1 = \ln(x_2-1) - \ln(x_1-1)$.

令 $x_1-1=t_1$, $x_2-1=t_2$, 则 $t_2-t_1 = \ln t_2 - \ln t_1 = 2\ln\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$.

令 $F(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$ ($t>1$)

则 $F'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)} > 0$, $\therefore F(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

则 $F(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} > F(1) = 0$, $\therefore \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$

则 $t_2-t_1 = 2\ln\sqrt{\frac{t_2}{t_1}} > 2 \cdot \frac{2(\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}-1)}{\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}+1} = 4 \cdot \frac{\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}}$

两边约去 $\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}$ 后化简整理

得 $\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2} > 2$, 即 $\sqrt{x_1-1}+\sqrt{x_2-1} > 2$.

【点睛】方法点睛: 利用导数证明不等式常见类型及解题策略:

(1) 构造差函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 根据差函数导函数符号, 确定差函数单调性, 利用单调性得不等量关系, 进而证明不等式;

(2) 根据条件, 寻找目标函数, 一般思路为利用条件将求和问题转化为对应项之间大小关系, 或利用放缩、等量代换将多元函数转化为一元函数.

例 7. (2023·山西·统考二模) 已知函数 $f(x) = (mx-1)e^x + n$ ($m, n \in \mathbf{R}$) 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = ex + 2 - e$, $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$

(1) 求 $f(x)$ 的值域;

(2) 若 $f(a) = f(b) = g(c) = g(d)$, 且 $a < b$, $c < d$, 证明: ① $c + d > 0$; ② $b + c > 0$.

【答案】(1) $[1, +\infty)$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 求出 $f'(x) = (mx+m-1)e^x$, 根据导数的几何意义得出切线方程. 结合已知, 即可求出 m, n 的值. 然后利用导函数得出 $f(x)$ 的单调性, 进而根据函数的单调性, 结合 $y = e^x$ 的取值, 即可得出答案;

(2) 求出 $g'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$, 得出 $g(x)$ 的单调性以及值域, 根据 $f(x)$ 以及 $g(x)$ 的性质, 作出函数的图象. 设 $f(a) = f(b) = g(c) = g(d) = t$, 根据图象, 得出 a, b, c, d 的范围. 构造函数 $G(x) = g(x) - g(-x)$, $-1 < x < 0$, 二次求导证明得到 $g(x) > g(-x)$, 即有 $g(c) > g(-c)$, 从而得出 $g(d) > g(-c)$, 根据函数的单调性, 即可得出①的证明; 先推出 $f(x) = 2 - \frac{1}{g(-x)}$, 即有 $f(-c) = 2 - \frac{1}{t}$. 根据基本不等式, 结合 t 的范围得出 $2 - \frac{1}{t} > t$, 即 $f(-c) > f(b)$, 然后根据函数的单调性, 即可得出②的证明.

【详解】(1) 由题意得 $f'(x) = (mx+m-1)e^x$,

$\therefore f'(1) = (2m-1)e$, $f(1) = (m-1)e + n$.

根据导数的几何意义可知, 函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率

$$k = f'(1) = (2m-1)e,$$

$$\therefore f(x) \text{ 在点 } (1, f(1)) \text{ 处的切线方程为 } y - f(1) = f'(1)(x-1),$$

$$\text{整理可得 } y = (2m-1)ex + n - me,$$

$$\text{由已知可得, } \begin{cases} 2m-1=1 \\ n-me=2-e \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases},$$

$$\therefore f(x) = (x-1)e^x + 2, f'(x) = xe^x, x \in \mathbf{R}.$$

$$\text{令 } f'(x) < 0, \text{ 则 } x < 0, \text{ 所以 } f(x) \text{ 在 } (-\infty, 0) \text{ 上单调递减, 所以 } f(x) > f(0) = 1.$$

$$\text{又 } x < 0 \text{ 时, 有 } (x-1)e^x < 0, \text{ 所以 } f(x) = (x-1)e^x + 2 < 2,$$

$$\text{所以 } 1 < f(x) < 2;$$

$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{ 则 } x > 0, \text{ 所以 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, 所以 } f(x) > f(0) = 1;$$

$$\text{综上所述, } f(x) \text{ 的值域为 } [1, +\infty).$$

$$(2) \text{ ① 由题意得 } g'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}, x \neq -1.$$

$$\text{令 } g'(x) < 0, \text{ 则 } x < -1 \text{ 或 } -1 < x < 0, \text{ 所以 } g(x) \text{ 在 } (-\infty, -1) \text{ 上单调递减, 在 } (-1, 0) \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{所以当 } x < -1 \text{ 时, } g(x) \text{ 的值域为 } (-\infty, 0); \text{ 当 } -1 < x < 0 \text{ 时, } g(x) \text{ 的值域为 } (1, +\infty);$$

$$\text{令 } g'(x) > 0, \text{ 则 } x > 0, \text{ 所以 } g(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{所以当 } x > 0 \text{ 时, } g(x) \text{ 的值域为 } (1, +\infty).$$

$$\text{作出函数 } f(x) = (x-1)e^x + 2 \text{ 以及 } g(x) = \frac{e^x}{x+1} \text{ 的图象如下图,}$$

$$\text{设 } f(a) = f(b) = g(c) = g(d) = t, \text{ 且 } a < b, c < d,$$

$$\text{由图象可知, } 1 < t < 2, \text{ 且 } -1 < c < 0 < d, a < 0 < b.$$

$$\text{令 } G(x) = g(x) - g(-x), -1 < x < 0,$$

$$\text{则 } G'(x) = g'(x) + g'(-x) = \frac{x}{e^x(x+1)^2} \left[e^{2x} - \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2 \right].$$

$$\text{令 } T(x) = (1-x)e^x - (1+x), -1 < x < 0, \text{ 则 } T'(x) = -xe^x - 1.$$

$$\text{令 } Q(x) = -xe^x - 1, \text{ 则 } Q'(x) = -(x+1)e^x < 0,$$

$$\text{所以 } Q(x), \text{ 即 } T'(x) \text{ 在 } (-1, 0) \text{ 上单调递减,}$$

$$\therefore T'(x) < T'(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0,$$

$$\therefore T(x) \text{ 在 } (-1, 0) \text{ 上单调递减,}$$

$$\therefore T(x) > T(0) = 0,$$

$$\therefore (1-x)e^x > (1+x).$$

$$\text{又 } 1-x > 0, \therefore e^x > \frac{1+x}{1-x} > 0.$$

$$\therefore G'(x) = \frac{x}{e^x(x+1)^2} \left[e^{2x} - \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2 \right] = \frac{x}{e^x(x+1)^2} \left(e^x + \frac{1+x}{1-x} \right) \left(e^x - \frac{1+x}{1-x} \right) < 0,$$

$$\therefore G(x) \text{ 在 } (-1, 0) \text{ 上单调递减, } \therefore G(x) > G(0) = 0,$$

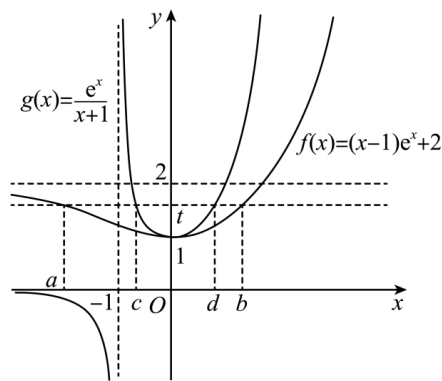
$$\therefore g(x) > g(-x), \therefore g(c) > g(-c).$$

$$\text{又 } g(d) = g(c), \therefore g(d) > g(-c).$$

$$\because g(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, } d > 0, -c > 0,$$

$$\therefore d > -c, \therefore c + d > 0;$$

$$\text{② 由①得, } f(a) = f(b) = g(c) = g(d) = t, 1 < t < 2, a < 0 < b.$$





$$\because g(-x) = \frac{1}{(1-x)e^x}, \therefore 2 - \frac{1}{g(-x)} = 2 - (1-x)e^x = (x-1)e^x + 2 = f(x),$$

$$\therefore f(-c) = 2 - \frac{1}{g(c)} = 2 - \frac{1}{t}.$$

$$\because 1 < t < 2, \therefore t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \times \frac{1}{t}} = 2, \text{当且仅当 } t = \frac{1}{t}, \text{即 } t = 1 \text{ 时, 等号成立.}$$

$$\because 1 < t < 2, \therefore t + \frac{1}{t} > 2, \text{即 } 2 - \frac{1}{t} > t, \text{即 } f(-c) > f(b).$$

$$\because f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, } b > 0, -c > 0$$

$$\therefore -c < b, \therefore b + c > 0.$$

【点睛】关键点睛: 构造函数 $G(x) = g(x) - g(-x)$, $-1 < x < 0$, 根据二次求导得出 $g(x) > g(-x)$. 然后即可根据题中已知条件, 结合函数的单调性, 得出证明.

8. (2023 春·湖南·高三校联考阶段练习) 已知函数 $f(x) = e^x - \ln x - a - 1$

(1) 若 $(1, e+1)$ 为曲线 $y = f(x)$ 上一点, 求曲线 $y = f(x)$ 在该点处的切线方程;

(2) 若 $a > 0$, 证明: $f(x) \geq (1-a)\ln a$.

【答案】(1) $y = (e-1)x + 2$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 利用点在曲线上及导数的几何意义, 结合直线的点斜式方程即可求解;

(2) 利用分析法及分离参数法, 将所证问题 $f(x) \geq (1-a)\ln a$ 转化为 $(e^x - \ln x)_{\min} \geq [(1-a)\ln a + a + 1]_{\max}$, 再利用导数法求函数的最值即可求解.

【详解】(1) 因为点 $(1, e+1)$ 在曲线 $y = f(x)$ 上,

所以 $f(1) = e - a - 1 = e + 1$, 所以 $a = -2$,

所以 $f(x) = e^x - \ln x + 1$,

所以 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, e+1)$ 处的切线的斜率为

$k = f'(1) = e - 1$,

所以过点 $(1, e+1)$ 的切线 l 的方程为 $y - (e+1) = (e-1)(x-1)$, 即 $y = (e-1)x + 2$.

(2) 要证明 $f(x) \geq (1-a)\ln a$, 即要证 $e^x - \ln x - a - 1 \geq (1-a)\ln a$,

即证 $e^x - \ln x \geq (1-a)\ln a + a + 1$.

设 $h(x) = e^x - \ln x$, 则 $h'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, 易得 $h'(x)$ 单调递增,

且 $h'(\frac{1}{3}) < 0$, $h'(1) > 0$, 所以存在 $x_0 \in (\frac{1}{3}, 1)$ 时, $h'(x_0) = e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$,

所以当 $x \in (0, x_0)$, $h(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$, $h(x) > 0$

则 $h(x) = e^x - \ln x$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x)_{\min} = e^{x_0} - \ln x_0 = \frac{1}{x_0} - \ln x_0$.

令 $g(a) = (1-a)\ln a + a + 1$, 则 $g'(a) = -\ln a + \frac{1}{a}$, 易得 $g'(a)$ 单调递减,

且 $g'(\frac{1}{3}) > 0$, $g'(e) < 0$, 所以存在 $a_0 \in (\frac{1}{3}, e)$ 时, $g'(a_0) = -\ln a_0 + \frac{1}{a_0} = 0$,

所以当 $a \in (0, a_0)$, $g(x) > 0$; 当 $a \in (a_0, +\infty)$, $g(x) < 0$,

易知 $g(a) = (1-a)\ln a + a + 1$ 在 $(0, a_0)$ 上单调递增, 在 $(a_0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{所以 } g(a)_{\max} = (1-a_0)\ln a_0 + a_0 + 1 = \frac{1-a_0}{a_0} + a_0 + 1 = \frac{1}{a_0} + a_0.$$

又因为 $y = e^x$ 与 $y = \ln x$ 互为反函数, 两函数的图象均与函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象相交,

设两交点分别为 $A(x_0, e^{x_0})$, $B(a_0, \ln a_0)$, 则它们关于直线 $y = x$ 对称,

所以 $x_0 = \ln a_0$, $a_0 = e^{x_0}$.

又因为 $\frac{1}{a_0} = \ln a_0 = x_0$, 且 $\frac{1}{x_0} = e^{x_0}$, 所以 $\ln \frac{1}{x_0} = x_0 = \frac{1}{a_0}$,

$$h(x)_{\min} - g(a)_{\max} = \frac{1}{x_0} - \ln x_0 - \frac{1}{a_0} - a_0 = a_0 + \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_0} - a_0 = 0,$$

所以 $f(x) \geq (1-a)\ln a$ 成立.

【点睛】方法点睛: 利用导数证明不等式常见类型及解题策略:

(1) 构造差函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 根据差函数导函数符号, 确定差函数单调性, 利用单调性得不等量关系, 进而证明不等式;

(2) 根据条件, 寻找目标函数, 一般思路为利用条件将求和问题转化为对应项之间大小关系, 或利用放缩、等量代换将多元函数转化为一元函数.

【例 9】(2023 春·湖北武汉·高二华中师大一附中校考期中) 已知 $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}ax^2$ 有两个极值点 x_1 , x_2 且 $x_1 > x_2$.

(1) 若 $f(x)$ 的极大值大于 $\frac{e^2}{2}$, 求 a 的范围;

(2) 若 $x_1 > 2x_2$, 证明: $x_1 + x_2 > \frac{3}{a} \ln 2$.

【答案】(1) $0 < a < \frac{2}{e^2}$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 求导 $f'(x) = \ln x - ax + 1$, 由 x_1, x_2 是 $\ln x = ax - 1$ 的两根, 得到 $a = \frac{1 + \ln x_1}{x_1} =$

$\frac{1 + \ln x_2}{x_2}$, 设 $h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, 利用导数法求得 $0 < a < 1$, $0 < x_2 < 1 < x_1$, 再由 $f'(x) =$

$x\left(\frac{\ln x + 1}{x} - a\right) = x(h(x) - a)$, 得到 x_1 为 $f(x)$ 的极大值点求解;

(2) 易得 $\ln x_1 - ax_1 + 1 = 0$, $\ln x_2 - ax_2 + 1 = 0$, 设 $t = \frac{x_1}{x_2} > 2$, 则有 $x_2 = \frac{\ln t}{a(t-1)}$, $x_1 = \frac{t \ln t}{a(t-1)}$, 将问题

转化为证 $\ln t - \frac{3 \ln 2 \cdot (t-1)}{t+1} > 0$ 即可.

【详解】(1) 解: $f'(x) = \ln x - ax + 1$,

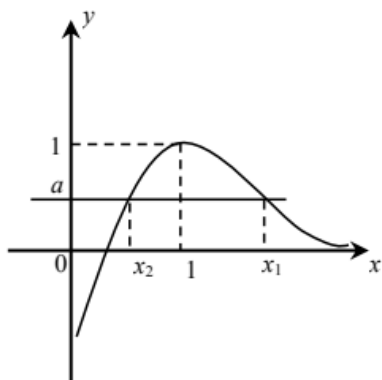
$\therefore x_1, x_2$ 是 $\ln x = ax - 1$ 的两根,

$$\text{即 } a = \frac{1 + \ln x_1}{x_1} = \frac{1 + \ln x_2}{x_2},$$

$$\text{设 } h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}, \therefore h'(x) = \frac{-\ln x}{x^2},$$

$\therefore x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

又 $h(e^{-1}) = 0$, $h(1) = 1$, $x \rightarrow 0^+$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow 0$,



$$\therefore 0 < a < 1, 0 < x_2 < 1 < x_1,$$

$$\because f'(x) = x \left(\frac{\ln x + 1}{x} - a \right) = x(h(x) - a),$$

$\therefore x \in (x_2, x_1)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$x \in (x_1, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

$\therefore x_1$ 为 $f(x)$ 的极大值点,

$$\therefore f(x)_{\text{极大值}} = f(x_1) = x_1 \ln x_1 - \frac{1}{2} a x_1^2 = x_1 \ln x_1 - \frac{1}{2} (\ln x_1 + 1) x_1,$$

$$= \frac{1}{2} x_1 \ln x_1 - \frac{1}{2} x_1 = \frac{1}{2} x_1 (\ln x_1 - 1) > \frac{e^2}{2},$$

$$\therefore x_1 (\ln x_1 - 1) > e^2,$$

$$\text{令 } g(x) = x(\ln x - 1) \quad g'(x) = \ln x - 1 + 1 = \ln x,$$

$\therefore g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore g(x_1) > e^2 = g(e^2)$,

$\therefore x_1 > e^2$, 又 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减,

$$\therefore a = h(x_1) < h(e^2) = \frac{3}{e^2}, \therefore 0 < a < \frac{2}{e^2};$$

$$(2) \ln x_1 - a x_1 + 1 = 0 \quad \ln x_2 - a x_2 + 1 = 0,$$

$$\text{设 } t = \frac{x_1}{x_2} > 2, \text{ 则有 } x_2 = \frac{\ln t}{a(t-1)}, x_1 = \frac{t \ln t}{a(t-1)},$$

$$\text{要证 } x_1 + x_2 > \frac{3}{a} \ln 2, \because a > 0,$$

$$\text{即要证 } \frac{(t+1) \ln t}{t-1} > 3 \ln 2, t > 2,$$

$$\text{即要证 } \ln t - \frac{3 \ln 2 \cdot (t-1)}{t+1} > 0,$$

$$\text{构造 } \varphi(t) = \ln t - \frac{3 \ln 2 \cdot (t-1)}{t+1} > 0 \quad \varphi'(t) = \frac{t^2 - (2 - 6 \ln 2 + 2)}{t(t+1)^2},$$

$$\text{设 } \theta(t) = t^2 + (2 - 6 \ln 2)t + 1 \quad \therefore \theta(t) \text{ 在 } (2, +\infty) \text{ 单调递增},$$

$$\therefore \theta(t) > \theta(2) > 0 \quad \therefore \varphi'(t) > 0 \quad \therefore \varphi'(t) \text{ 单调递增},$$

$$\therefore \varphi(t) > \varphi(2) = 0 \text{ 得证.}$$

【点睛】关键点睛: 本题第一问关键是由 x_1, x_2 是 $\ln x = ax - 1$ 的两根, 得到 $a = \frac{1 + \ln x_1}{x_1} =$

$\frac{1 + \ln x_2}{x_2}$, 通过 $h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ 的单调性, 得到 $0 < a < 1, 0 < x_2 < 1 < x_1$, 进而由 $f'(x) =$

$x\left(\frac{\ln x + 1}{x} - a\right) = x(h(x) - a)$, 得到 x_1 为 $f(x)$ 的极大值点而得解.

10. (天域全国名校联盟 2023 届高三第一次适应性联考数学试题) 已知函数 $f(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x^2}$.

(1) 设函数 $g(x) = e^{kx} - \frac{1}{kx}$ ($k > 0$), 若 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 求 k 的最小值;

(2) 若方程 $f(x) = m$ 有两个不相等的实根 x_1, x_2 , 求证: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < \frac{2(1 - \ln m)}{m}$.

【答案】(1) 1;

(2) 证明见解析.

【分析】(1) 将问题转化为不等式 $e^{2\ln x + kx} - \frac{x}{k} - (1 + 2\ln x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 利用导数证明 $k = 1$ 时, 不等式 $e^{2\ln x + x} - 2\ln x - x - 1 \geq 0$ 成立, 进而分类讨论 $0 < k < 1$ 与 $k > 1$ 两种情况, 从而得解;

(2) 利用导数研究函数 $f(x)$ 的性质可得 $0 < m < 1$, 由题意可得 $m(x_1^2 + x_2^2) < 2x_1x_2(1 - \ln m)$, 原不等式变形为 $1 + \ln x_1x_2 < x_1x_2 - x_1x_2\ln m$, 利用分析法, 构造函数 $h(x) = \ln x - x + 1$ ($x > 0$) 证明 $\ln x + 1 \leq x$, 即 $1 + \ln x_1x_2 \leq x_1x_2$, 结合 $x_1x_2 < x_1x_2 - x_1x_2\ln m$ 即可证明.

【详解】(1) 当 $k > 0, x > 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$ 即 $\frac{1 + 2\ln x}{x^2} \leq e^{kx} - \frac{1}{kx}$ 恒成立,

等价于 $1 + 2\ln x \leq x^2 e^{kx} - \frac{x}{k} \Leftrightarrow 1 + 2\ln x \leq e^{2\ln x + kx} - \frac{x}{k} \Leftrightarrow e^{2\ln x + kx} - \frac{x}{k} - (1 + 2\ln x) \geq 0$ 恒成立.

设 $u(x) = e^x - x - 1$, 则 $u'(x) = e^x - 1$,

令 $u'(x) < 0 \Rightarrow x < 0$, 令 $u'(x) > 0 \Rightarrow x > 0$,

所以函数 $u(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $u(x)_{\min} = u(0) = 0$, 得 $u(x) \geq 0$, 即 $e^x - x - 1 \geq 0$,

当 $k = 1$ 时, 令 $v(x) = 2\ln x + x$ ($x > 0$), 易得 $v(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $v\left(\frac{1}{e}\right) = 2\ln \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = -2 + \frac{1}{e} < 0$, $v(1) = 1 > 0$,

所以 $v(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$, 即 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点 x_0 ,

所以 $u(v(x)) \geq u(v(x_0)) = 0$, 即 $e^{2\ln x + x} - 2\ln x - x - 1 \geq 0$, 且 $e^{2\ln x_0 + x_0} - 2\ln x_0 - x_0 - 1 = 0$;

当 $0 < k < 1$ 时, 令 $m(k) = e^{2\ln x + kx} - \frac{x}{k} - (1 + 2\ln x)$,

易得关于 k 的函数 $y = e^{2\ln x + kx}$ 与 $y = -\frac{x}{k}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 则 $m(k) < m(1) = e^{2\ln x + x} - 2\ln x - x - 1$,

当 $x = x_0$ 时, $m(k) < 0$, 即 $e^{2\ln x + kx} - \frac{x}{k} - (1 + 2\ln x) < 0$, 不满足题意;

当 $k > 1$ 时, 易得 $m(k) > m(1) = e^{2\ln x + x} - 2\ln x - x - 1 \geq 0$, 即 $e^{2\ln x + kx} - \frac{x}{k} - (1 + 2\ln x) \geq 0$ 恒成立;

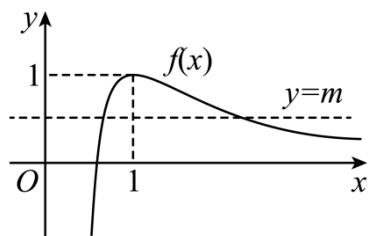
综上: $k \geq 1$, 则实数 k 的最小值为 1;

(2) 由题意知, $m > 0$,

$f(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x^2}$, 则 $f'(x) = \frac{-4\ln x}{x^3}$ ($x > 0$),

令 $f'(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$, 令 $f'(x) < 0 \Rightarrow x > 1$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 则 $f(x)_{\max} = f(1) = 1$,
 当 $x > 1$ 时, 易得 $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2} > 0$ 恒成立, 当 $x = \frac{1}{e}$ 时, $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2} < 0$,
 又函数 $f(x) = m$ 有两个不同的实根 x_1, x_2 , 即 $f(x)$ 与 $y = m$ 的图像有两个交点,
 作出 $f(x)$ 与 $y = m$ 的部分图像如图:



所以 $0 < m < 1$, 且 $m = \frac{1+2\ln x_1}{x_1^2}, m = \frac{1+2\ln x_2}{x_2^2}$,

得 $mx_1^2 = 1 + 2\ln x_1, mx_2^2 = 1 + 2\ln x_2$, 有 $m(x_1^2 + x_2^2) = 2 + 2\ln x_1 x_2$.

要证 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < \frac{2(1-\ln m)}{m}$, 即证 $m(x_1^2 + x_2^2) < 2x_1 x_2(1 - \ln m)$,

即证 $2 + 2\ln x_1 x_2 < 2x_1 x_2(1 - \ln m)$, 即证 $1 + \ln x_1 x_2 < x_1 x_2 - x_1 x_2 \ln m$,

由 $x_1 x_2 > 0, \ln m < 0$, 得 $x_1 x_2 < x_1 x_2 - x_1 x_2 \ln m$.

设 $h(x) = \ln x - x + 1 (x > 0)$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 (x > 0)$,

令 $h'(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$, 令 $h'(x) < 0 \Rightarrow x > 1$,

所以函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x)_{\max} = h(1) = 0$, 则 $h(x) \leq 0$, 即 $\ln x + 1 \leq x$,

所以 $1 + \ln x_1 x_2 \leq x_1 x_2$, 则 $1 + \ln x_1 x_2 \leq x_1 x_2 < x_1 x_2 - x_1 x_2 \ln m$,

即 $1 + \ln x_1 x_2 < x_1 x_2 - x_1 x_2 \ln m$, 即证.

【点睛】方法点睛: 破解含双参不等式证明题, 先由已知条件入手, 寻找双参所满足的关系式, 并把含双参的不等式转化为含单参的不等式; 进而巧构造函数, 再借用导数判断函数的单调性, 求出函数的最值; 最后回归双参的不等式的证明, 把所求的最值应用到双参不等式, 即可证得结果.