

数列专题4 存在性与恒成立问题

题目 1 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \frac{(a_n + 1)^2}{4}, n \in \mathbf{N}^*$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n + b_{n+1} = 2n^2 + 2n + 1, n \in \mathbf{N}^*$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 试问: 数列 $\{b_n - S_n\}$ 是否构成等比数列 (注: S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和)? 请说明理由;

(3) 若 $b_1 = 1$, 是否存在正整数 n , 使得 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{b_k + 1}{b_k^2 + b_k + 1} \right| \leq \frac{55}{111} \leq \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{b_k}}{b_k^2 + b_k + 1}$ 成立? 若存在求所有的正整数 n ; 否则, 请说明理由.

方法归纳 【点睛】

数列求和的方法技巧

(1) 倒序相加: 用于等差数列、与二项式系数、对称性相关联的数列的求和.

(2) 错位相减: 用于等差数列与等比数列的积数列的求和.

(3) 分组求和: 用于若干个等差或等比数列的和或差数列的求和.

题目 2 从① $(a_n + 1)(a_n + 2) = 6S_n$, 且 $a_1 < 2$; ② $a_1 = 1, a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n (n \geq 2)$, 且存在 $m \geq 2, m \in \mathbf{N}^*$ 使得 $S_m = 5, (m+1)S_{m-1} + (m-1)S_{m+1} = 13m - 11$; ③ 若 $a_n - a_{n-1} = d$ (常数), 且 $6S_n = a_n \cdot a_{n+1} + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$, $a_1 < 2$, 这三个条件中任选一个, 补充在下面题目的横线中, 并解答.

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , _____.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^{n-1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

题目 3 对于数列 $\{a_n\}$: 若存在正整数 n_0 , 使得当 $n \geq n_0$ 时, a_n 恒为常数, 则称数列 $\{a_n\}$ 是准常数数列. 现已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = a$, 且 $a_{n+1} = |a_n - 1|, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 若 $a = \frac{3}{2}$, 试判断数列 $\{a_n\}$ 是否是准常数数列;

(2) 当 a 与 n_0 满足什么条件时, 数列 $\{a_n\}$ 是准常数数列? 写出符合条件的 a 与 n_0 的关系;

(3) 若 $a \in (k, k+1) (k \in \mathbf{N}^*)$, 求 $\{a_n\}$ 的前 $3k$ 项的和 S_{3k} (结果用 k, a 表示).

题目 4 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $a_1 = b_1$, _____, $b_2 = 8$, $b_1 - 3b_3 = 4$. 在以下三个条件中任选一个① $S_5 = 30$, ② $S_4 = 5a_2$, ③ $3a_3 - a_5 = b_2$, 补充在上面横线上, 并作答.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 是否存在正整数 k , 使得数列 $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 的前 k 项和 $T_k > \frac{3}{4}$? 若存在, 求 k 的最小值; 若不存在, 说明理由.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

题目 5 已知数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是首项为 1 的等差数列, 偶数项是首项为 2 的等比数列. 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_3 = a_4, a_3 + a_5 = 2 + a_4$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 前 $2k$ 项和 S_{2k} ;

(3) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 是否存在连续的三项 am, am_{+1}, am_{+2} , 按原来的顺序成等差数列? 若存在, 求出所有满足条件的正整数 m 的值; 若不存在, 说明理由.

题目 6 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_n > 0$, $S_3 = 15$, 公差 $d > 1$, 且 _____. 从① $a_2 - 1$ 为 $a_1 - 1$ 与 $a_3 + 1$ 等比中项, ②等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q = 3$, $b_1 = a_1, b_2 = a_4$ 这两个条件中, 选择一个补充在上面问题的横线上, 使得符合条件的数列 $\{a_n\}$ 存在并作答.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{1}{6}$.

题目 7 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 0 的等差数列, $a_1 = 1$, 且 a_1, a_2, a_4 成等比数列; 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和是 S_n , 且 $S_n = 2b_n - 1, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \frac{\sqrt{a_n + a_{n+1}}}{a_n a_{n+1}}$, 是否存在正整数 m , 使得 $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \cdots + c_m^2 > \frac{31(a_n - 3)}{b_{n+2}} x_n$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立? 若存在, 求 m 的最小值; 若不存在, 请说明理由.

题目 8 ① $\{2^n a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_3 = \frac{5}{8}$; ② $\left\{\frac{a_n}{2n-1}\right\}$ 为等比数列, 且 $a_2 = \frac{3}{4}$. 从①②两个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并解答.

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{2}$, _____.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 已知 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 试问是否存在正整数 p, q, r , 使得 $S_n = p - qa_{n+r}$? 若存在, 求 p, q, r 的值; 若不存在, 说明理由.

题目 9 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 3, a_n = xa_{n-1} + n - 2 (n \geq 2)$, 其中 $x \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $x = 1$, 求出 a_n ;

(2) 是否存在实数 x, y 使 $\{a_n + yn\}$ 为等比数列? 若存在, 求出 S_n , 若不存在, 说明理由.

题目 10 已知递增的等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, 且 a_5, a_8, a_{13} 成等比数列. 数列 $\{b_n\}$ 满足: $3S_n = 2 + b_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 其中 S_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \frac{1}{a_n \sqrt{a_{n+1}} + a_{n+1} \sqrt{a_n}}$, T_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 是否存在实数 λ , 使得不等式 $T_n \leq \lambda \leq S_n$ 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

题目 11 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 公差 $d > 0$, 其前四项中去掉某一项后 (按原来的顺序) 恰好构成一个等比数列.

(1) 求 d 的值.

(2) 令 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n < \lambda^2 - \lambda - \frac{1}{2}$ 对 $\forall n \in \mathbf{N}_+$ 恒成立, 求 λ 取值范围.

题目 12 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d \neq 0$, $a_3 = 5$, a_2 是 a_1 与 a_5 的等比中项, 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $4S_n = b_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = a_n b_n$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $\lambda \left(T_n + \frac{1}{8}\right) \leq 1$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

题目 13 各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2} a_n$, 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 且 $b_1 = a_2, b_2 = a_4$.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n = \begin{cases} \frac{(3n-2) \cdot b_n}{a_n \cdot a_{n+2}}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{3}{b_n}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, T_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $T_{2n} \geq \lambda$ 恒成立, 求 T_{2n} 及实数的 λ 取值范围.

题目 14 已知正项等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{3n} = 3a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $2a_1, a_3 + 1, a_8$ 成等比数列.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 $c_n = \frac{2^{a_{n+1}}}{(1+2^{a_n})(1+2^{a_{n+1}})}$, R_n 是数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 均有 $R_n < \lambda$ 恒成立, 求 λ 的最小值.

题目 15 已知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为等差数列, $a_1 = b_1 = 1$, $a_3 = a_1 + a_2$, $b_5 = b_4 + a_2$, 记 $c_n = \max\{b_1 - na_1, b_2 - na_2, \dots, b_n - na_n\} (n = 1, 2, 3, \dots)$, 其中 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ 表示 $x_1, x_2, \dots, x_s$ 这 s 个数中最大的数.

- (1) 计算 c_1, c_2, c_3 , 猜想数列 $\{c_n\}$ 的通项公式并证明;
- (2) 设数列 $\left\{\frac{1}{(3-c_n)(2-c_n)}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n < -m^2 + 4m$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 求偶数 m 的值.

题目 16 设数列 $\{a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是公差为零的等差数列, 满足 $a_3 + a_6 = a_9$, $a_5 + a_7^2 = 6a_9$. 数列 $\{b_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $4S_n + 2b_n = 3$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 在 b_1 和 b_2 之间插入 1 个数 x_{11} , 使 b_1, x_{11}, b_2 成等差数列; 在 b_2 和 b_3 之间插入 2 个数 x_{21}, x_{22} , 使 b_2, x_{21}, x_{22}, b_3 成等差数列; $\dots$; 在 b_n 和 b_{n+1} 之间插入 n 个数 $x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}$, 使 $b_n, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}, b_{n+1}$ 成等差数列.
- (i) 求 $T_n = x_{11} + (x_{21} + x_{22}) + (x_{31} + x_{32} + x_{33}) + \dots + (x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn})$;
- (ii) 是否存在正整数 m, n , 使 $T_n = \frac{a_{m+1}}{2a_m}$ 成立? 若存在, 求出所有的正整数对 (m, n) ; 若不存在, 请说明理由.

题目 17 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 4^{n-1}$,

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 令 $b_n = \frac{9a_n}{(a_n + 3)(a_{n+1} + 3)}$, 记数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n , 求 T_n ;
- (3) 利用第二问结果, 设 λ 是整数, 问是否存在正整数 n , 使等式 $T_n + \frac{3\lambda}{5a_{n+1}} = \frac{7}{8}$ 成立? 若存在, 求出 λ 和相应的 n 值; 若不存在, 说明理由.

题目 18 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 $b_n = (-1)^n S_n$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 满足 $T_n - mn^2 > 0$ 对一切正奇数 n 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

题目 19 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $3a_n - 2S_n = 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 记 $b_n = \begin{cases} \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{n}{a_n}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 T_{2n} , 若不等式 $(-1)^n \lambda < T_{2n} + \frac{24n}{32}$. $\left(\frac{1}{9}\right)^n - \frac{n}{4n+1}$ 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 求 λ 的取值范围.

题目 20 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$.

- (1) 证明数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是等差数列, 并求出 a_n ;
- (2) 求 S_n ;
- (3) 令 $b_n = \frac{S_n}{3^n}$, 若对任意正整数 n , 不等式 $b_n < \frac{m^2 - m + 11}{27}$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.