

课题：两角差的余弦公式

湖南师大附中

吴菲

三维目标：

知识目标：通过让学生猜想、探索、发现并推导“两角差的余弦公式”；了解单角与复角的三角函数之间的内在联系；通过变式训练，加深对两角差的余弦公式的理解；培养学生的运算能力及逻辑推理能力，提高学生的数学素质。

能力目标：运用两角差的余弦公式，会进行简单的求值、化简、证明；体会化归、数形结合等数学思想在数学当中的运用，使学生树立联系与转化的辩证唯物主义观点，提高学生分析问题、解决问题的能力。

情感目标：本节课通过创设问题情景，使学生体验科学探索的过程，感受科学探索的乐趣，激励科学探索的勇气，培养学生的创新精神和良好的团队合作意识。

重点难点：

教学重点：通过探究得到两角差的余弦公式

教学难点：探索过程的组织和适当引导。

教学过程：

一、 走入生活

引入：同学们，在第一章我们学习了同角三角函数式的变换，今天我们将一起探究一种包含两个角的三角函数式的变换：两角差的余弦公式。先让我们走入生活，看一个例子：

例：如图所示，一个斜坡的高为 6m，斜坡的水平长度为 8m，已知作用在物体上的力 F 与水平方向的夹角为 60° ，且大小为 10N，在力 F 的作用下物体沿斜坡运动了 3 m，求力 F 作用在物体上的功 W 。

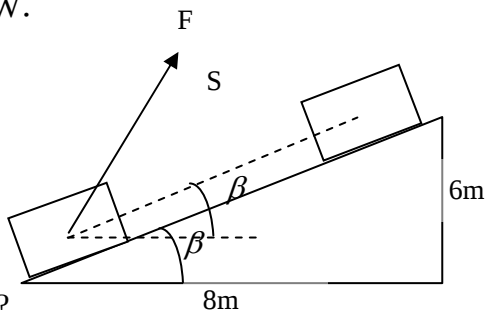
$$\begin{aligned}\text{解： } W &= \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos(60^\circ - \beta) \\ &= 30 \cos(60^\circ - \beta).\end{aligned}$$

提问：1、解决问题需要什么？

2、你能找到哪些与 β 有关的条件？

3、能否利用这些条件求出 $\cos(60^\circ - \beta)$ ？如果能，提出你的猜想。

4、怎样检验这些猜想是否正确？



生活实例引入，体现数学与实际生活的联系，增强学生的应用意识，激发学生的学习热情，同时也让学生体会数学知识的产生、发展过程。

二、合作探讨

从特殊情况去猜测公式的结构形式.

令 $\alpha = \pi$, 则: $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\pi - \beta) = -\cos \beta$

令 $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, 则: $\cos(\alpha - \beta) = \cos(-\frac{\pi}{2} - \beta) = -\sin \beta$

分析: 可见, 我们的公式的形式应该与 $\cos \alpha \cos \beta$ 和 $\sin \alpha \sin \beta$ 均有关系?

他们之间存在怎样的代数关系呢? 会不会是“+”、“-”、“ $\times$ ”、“ $\div$ ”? 请同学们根据下表中数据, 相互交流讨论, 提出你的猜想.

用具体值检验猜想的合理性.

令 $\alpha = 120^\circ, \beta = 30^\circ$ 则 $\cos(\alpha - \beta) = \cos(120^\circ - 30^\circ) = \cos 90^\circ = 0$

三角函数	$\cos 120^\circ$	$\cos 30^\circ$	$\sin 120^\circ$	$\sin 30^\circ$
三角函数值	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

学生再举特例进行验证. (各抒己见)

利用几何画板, 对更多的情况加以验证.

三、提出猜想: $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

师: 要让猜想更有说服力, 我们还要进行理论证明.

四、理论证明:

引导探究: 研究三角函数问题, 我们常用的一种方法就是利用单位圆, 在单位圆中, 角的余弦值可用余弦线来表示.

我们先来讨论最简单的情况:

α, β 为锐角, 且 $\alpha > \beta$

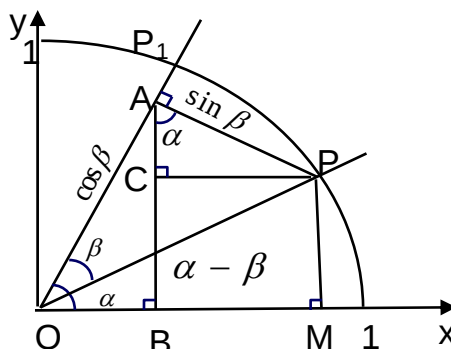
方法一: (利用三角函数线)

证明: 在单位圆O中, 作 $\angle P_1OX = \alpha$,

交单位圆于点 P_1 , 作 $\angle P_1OP = \beta$,

则 $\angle XOP = \alpha - \beta$. 过点P作PM垂直x轴于M, $PA \perp OP_1$ 于点A, 过点

点A作 $AB \perp OM$ 于点B, 过点P, 作 $PC \perp AB$ 于点C, 则:



鼓励学生发挥想象力, 大胆猜测, 然后再去验证其合理性, 增强学生探索问题、挑战困难的勇气.

依据特殊情况进行猜想往往是人们探索问题的第一步.

鼓励学生对各种可能的情况进行探索, 培养他们的交流合作意识, 在探索的过程中获得成就感.

引导学生运用数形结合的思想给出证明.

$$OA = \cos \beta, \quad AP = \sin \beta, \quad \text{且 } \angle PAC = \angle P_1OX = \alpha$$

$$OM = OB + BM = OB + CP = OA \cos \alpha + AP \sin \alpha = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (\alpha, \beta \text{ 为锐角, 且 } \alpha > \beta)$$

方法小结：在整个证明过程中，我们通过几何的手段，得到了一个代数公式，这运用到了在数学探究过程中一种重要的思想方法：数形结合。

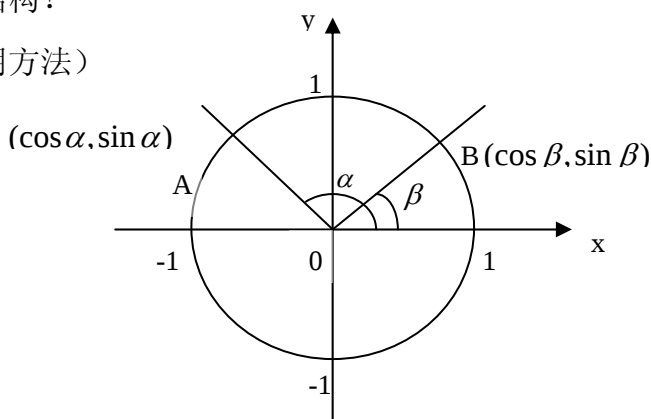
提问：当 α, β 取任意角的时候，结果又会怎样呢？（展示下一张幻灯片），大家思考一下。（给学生思考的时间，要求学生说出自己的思考结果。若学生说出来要给予及时的肯定，若没能说出则作为课后思考作业）。

方法二：（利用向量）

启发思考：我们来仔细观察猜想的结构，等式的左边是差角的余弦，我们在什么地方见到过类似结构？

（引导学生发现，提出证明方法）

（学生：向量的数量积！）



证明：在平面直角坐标系 xOy 内作单位圆 O ，以 Ox 为始边作角 α, β ，它们终边与单位圆 O 的交点分别为 A, B ，则：

$$\overrightarrow{OA} = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \overrightarrow{OB} = (\cos \beta, \sin \beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = (\cos \alpha, \sin \alpha) \cdot (\cos \beta, \sin \beta)$$

$$= \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \quad (0 \leq \alpha - \beta \leq \pi)$$

方法小结：对比一下两种证明方法，你认为哪种更简单？向量在我们数学探究过程中是一种非常简洁有效的工具，在今后的学习中我们还将继续领悟向量在数学探究过程中的魅力！

加强新旧知识的联系。

使学生从直观角度加强对差角公式结构形式的认识。

让学生经历用向量知识解出一个数学问题的过程，体会向量方法的作用。

思考：1、$\alpha - \beta$ 作为两向量的夹角，有没有限制条件？ 2、如果 $\alpha - \beta$ 不在 $[0, \pi]$ 这个区间内，我们的结论还会成立吗？怎样给出证明？（展示幻灯片，引导学生找到 $\alpha - \beta$ 与夹角 θ 之间的关系） 推广完善：令 θ 为 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 的夹角， ① 当 $\alpha - \beta \in [0, \pi]$ 时，则 $\alpha - \beta = \theta$ $\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \theta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ ② 当 $\alpha - \beta \notin [0, \pi]$ 时，则存在 $k, m \in \mathbb{Z}$，使得 $\alpha - \beta = 2k\pi + \theta \text{ 或 } \beta - \alpha = 2m\pi + \theta$ 无论哪种情况，都有 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \theta$ 即 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \theta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ 小结：两角差的余弦公式： $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ （其中 α, β 为任意角，简记为 $C_{(\alpha-\beta)}$） 思考：请同学们仔细观察一下公式的结构，说说公式的结构有什么特点？应怎样记忆？（对学生的回答给予及时肯定） 五、知识运用 1、解决引例中的问题. 2、学以致用：已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \cos \beta = -\frac{5}{13}, \beta$ 是第三象限角，求 $\cos(\alpha - \beta)$. （运用公式时应根据角的范围，正确确定两角正、余弦值的范围） 3、公式的逆用：. 求 $\frac{1}{2} \cos 15^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 15^\circ$ 的值 4、拓广延伸：已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \alpha \in (0, \pi), \cos \beta = -\frac{5}{13}, \beta$ 是第三象限角，求 $\cos(\alpha - \beta)$ （此题根据学生的接受情况，作为后备练习）	统一对“恒等”要求的认识. 运用分类讨论思想. 要求学生 对公式的形式 加以分析，体 会数学中的对 称美. 1、学生运用 所学解决实际 问题. 2、利用变 式突破学生在 运用公式过程 中的易错点. 3、对逆用 公式解题加深 认识. 4、活用公
---	--

5、公式活用： $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}$, 且 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $\cos \beta$.

(此题根据学生的接受情况, 作为后备练习)

六、回顾总结

师: 我们一起来回顾总结一下今天这节课的收获.

1、公式探究的一般步骤:

特殊→猜想→证明

2、在运用两角差的余弦公式时应注意:

- (1) 根据角的范围, 确定两角正、余弦值的正、负.
- (2) 适当逆用公式, 可达到化简计算的目的.
- (3) 灵活选取两角的形式, 活用公式.

七、课后思考

适当变换两角差的余弦公式中两角的形式, 例如取 $\beta = -\alpha$, 你能得到哪些结论?

八、作业:

必做: P₁₀₄ 2、3、4

选做: $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{4}{5}$,

求 $\cos(\alpha - \beta)$

式, 加深学生对公式中两角形式变化的认识, 强化整体思想.

课后思考
为下节课做铺垫

课题：两角差的余弦公式

湖南师大附中

吴菲

三维目标：

知识目标：通过让学生猜想、探索、发现并推导“两角差的余弦公式”；了解单角与复角的三角函数之间的内在联系；通过变式训练，加深对两角差的余弦公式的理解；培养学生的运算能力及逻辑推理能力，提高学生的数学素质。

能力目标：运用两角差的余弦公式，会进行简单的求值、化简、证明；体会化归、数形结合等数学思想在数学当中的运用，使学生树立联系与转化的辩证唯物主义观点，提高学生分析问题、解决问题的能力。

情感目标：本节课通过创设问题情景，使学生体验科学探索的过程，感受科学探索的乐趣，激励科学探索的勇气，培养学生的创新精神和良好的团队合作意识。

重点难点：

教学重点：通过探究得到两角差的余弦公式

教学难点：探索过程的组织和适当引导。

教学过程：

一、 走入生活

引入：同学们，在第一章我们学习了同角三角函数式的变换，今天我们将一起探究一种包含两个角的三角函数式的变换：两角差的余弦公式。先让我们走入生活，看一个例子：

例：如图所示，一个斜坡的高为 6m，斜坡的水平长度为 8m，已知作用在物体上的力 F 与水平方向的夹角为 60° ，且大小为 10N，在力 F 的作用下物体沿斜坡运动了 3 m，求力 F 作用在物体上的功 W 。

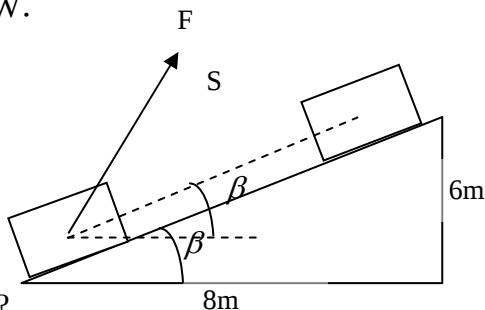
$$\begin{aligned}\text{解： } W &= \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos(60^\circ - \beta) \\ &= 30 \cos(60^\circ - \beta).\end{aligned}$$

提问：1、解决问题需要什么？

2、你能找到哪些与 β 有关的条件？

3、能否利用这些条件求出 $\cos(60^\circ - \beta)$ ？如果能，提出你的猜想。

4、怎样检验这些猜想是否正确？



生活实例引入，体现数学与实际生活的联系，增强学生的应用意识，激发学生的学习热情，同时也让学生体会数学知识的产生、发展过程。

二、合作探讨

从特殊情况去猜测公式的结构形式.

令 $\alpha = \pi$, 则: $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\pi - \beta) = -\cos \beta$

令 $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, 则: $\cos(\alpha - \beta) = \cos(-\frac{\pi}{2} - \beta) = -\sin \beta$

分析: 可见, 我们的公式的形式应该与 $\cos \alpha \cos \beta$ 和 $\sin \alpha \sin \beta$ 均有关系?

他们之间存在怎样的代数关系呢? 会不会是“+”、“-”、“ $\times$ ”、“ $\div$ ”? 请同学们根据下表中数据, 相互交流讨论, 提出你的猜想.

用具体值检验猜想的合理性.

令 $\alpha = 120^\circ, \beta = 30^\circ$ 则 $\cos(\alpha - \beta) = \cos(120^\circ - 30^\circ) = \cos 90^\circ = 0$

三角函数	$\cos 120^\circ$	$\cos 30^\circ$	$\sin 120^\circ$	$\sin 30^\circ$
三角函数值	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

学生再举特例进行验证. (各抒己见)

利用几何画板, 对更多的情况加以验证.

三、提出猜想: $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

师: 要让猜想更有说服力, 我们还要进行理论证明.

四、理论证明:

引导探究: 研究三角函数问题, 我们常用的一种方法就是利用单位圆, 在单位圆中, 角的余弦值可用余弦线来表示.

我们先来讨论最简单的情况:

α, β 为锐角, 且 $\alpha > \beta$

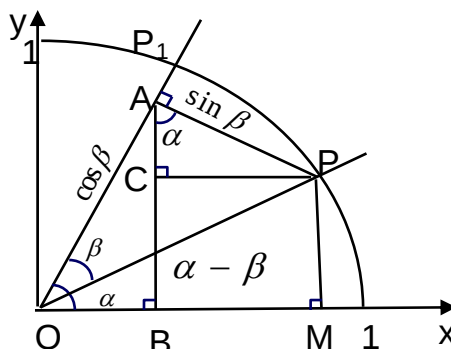
方法一: (利用三角函数线)

证明: 在单位圆O中, 作 $\angle P_1OX = \alpha$,

交单位圆于点 P_1 , 作 $\angle P_1OP = \beta$,

则 $\angle XOP = \alpha - \beta$. 过点P作PM垂直x轴于M, $PA \perp OP_1$ 于点A, 过点

点A作 $AB \perp OM$ 于点B, 过点P, 作 $PC \perp AB$ 于点C, 则:



鼓励学生发挥想象力, 大胆猜测, 然后再去验证其合理性, 增强学生探索问题、挑战困难的勇气.

依据特殊情况进行猜想往往是人们探索问题的第一步.

鼓励学生对各种可能的情况进行探索, 培养他们的交流合作意识, 在探索的过程中获得成就感.

引导学生运用数形结合的思想给出证明.

$$OA = \cos \beta, \quad AP = \sin \beta, \quad \text{且 } \angle PAC = \angle P_1OX = \alpha$$

$$OM = OB + BM = OB + CP = OA \cos \alpha + AP \sin \alpha = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (\alpha, \beta \text{ 为锐角, 且 } \alpha > \beta)$$

方法小结：在整个证明过程中，我们通过几何的手段，得到了一个代数公式，这运用到了在数学探究过程中一种重要的思想方法：数形结合。

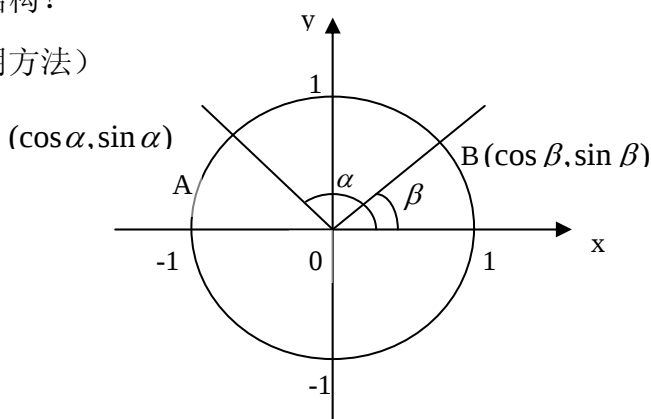
提问：当 α, β 取任意角的时候，结果又会怎样呢？（展示下一张幻灯片），大家思考一下。（给学生思考的时间，要求学生说出自己的思考结果。若学生说出来要给予及时的肯定，若没能说出则作为课后思考作业）。

方法二：（利用向量）

启发思考：我们来仔细观察猜想的结构，等式的左边是差角的余弦，我们在什么地方见到过类似结构？

（引导学生发现，提出证明方法）

（学生：向量的数量积！）



证明：在平面直角坐标系 xOy 内作单位圆 O ，以 Ox 为始边作角 α, β ，它们终边与单位圆 O 的交点分别为 A, B ，则：

$$\overrightarrow{OA} = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \overrightarrow{OB} = (\cos \beta, \sin \beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = (\cos \alpha, \sin \alpha) \cdot (\cos \beta, \sin \beta)$$

$$= \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \quad (0 \leq \alpha - \beta \leq \pi)$$

方法小结：对比一下两种证明方法，你认为哪种更简单？向量在我们数学探究过程中是一种非常简洁有效的工具，在今后的学习中我们还将继续领悟向量在数学探究过程中的魅力！

加强新旧知识的联系。

使学生从直观角度加强对差角公式结构形式的认识。

让学生经历用向量知识解出一个数学问题的过程，体会向量方法的作用。

思考：1、$\alpha - \beta$ 作为两向量的夹角，有没有限制条件？ 2、如果 $\alpha - \beta$ 不在 $[0, \pi]$ 这个区间内，我们的结论还会成立吗？怎样给出证明？（展示幻灯片，引导学生找到 $\alpha - \beta$ 与夹角 θ 之间的关系） 推广完善：令 θ 为 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 的夹角， ① 当 $\alpha - \beta \in [0, \pi]$ 时，则 $\alpha - \beta = \theta$ $\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \theta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ ② 当 $\alpha - \beta \notin [0, \pi]$ 时，则存在 $k, m \in \mathbb{Z}$，使得 $\alpha - \beta = 2k\pi + \theta \text{ 或 } \beta - \alpha = 2m\pi + \theta$ 无论哪种情况，都有 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \theta$ 即 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \theta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ 小结：两角差的余弦公式： $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ （其中 α, β 为任意角，简记为 $C_{(\alpha-\beta)}$） 思考：请同学们仔细观察一下公式的结构，说说公式的结构有什么特点？应怎样记忆？（对学生的回答给予及时肯定） 五、知识运用 1、解决引例中的问题. 2、学以致用：已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \cos \beta = -\frac{5}{13}, \beta$ 是第三象限角，求 $\cos(\alpha - \beta)$. （运用公式时应根据角的范围，正确确定两角正、余弦值的范围） 3、公式的逆用：. 求 $\frac{1}{2} \cos 15^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 15^\circ$ 的值 4、拓广延伸：已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \alpha \in (0, \pi), \cos \beta = -\frac{5}{13}, \beta$ 是第三象限角，求 $\cos(\alpha - \beta)$ （此题根据学生的接受情况，作为后备练习）	统一对“恒等”要求的认识. 运用分类讨论思想. 要求学生 对公式的形式 加以分析，体 会数学中的对 称美. 1、学生运用 所学解决实际 问题. 2、利用变 式突破学生在 运用公式过程 中的易错点. 3、对逆用 公式解题加深 认识. 4、活用公
---	--

5、公式活用： $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}$, 且 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $\cos \beta$.

(此题根据学生的接受情况, 作为后备练习)

六、回顾总结

师: 我们一起来回顾总结一下今天这节课的收获.

1、公式探究的一般步骤:

特殊→猜想→证明

2、在运用两角差的余弦公式时应注意:

- (1) 根据角的范围, 确定两角正、余弦值的正、负.
- (2) 适当逆用公式, 可达到化简计算的目的.
- (3) 灵活选取两角的形式, 活用公式.

七、课后思考

适当变换两角差的余弦公式中两角的形式, 例如取 $\beta = -\alpha$, 你能得到哪些结论?

八、作业:

必做: P₁₀₄ 2、3、4

选做: $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{4}{5}$,

求 $\cos(\alpha - \beta)$

式, 加深学生对公式中两角形式变化的认识, 强化整体思想.

课后思考
为下节课做铺垫