

课题：等差数列（一）

重庆市第十八中学詹远美

【教学目标】

1. **知识目标**：掌握等差数列的概念；理解等差数列的通项公式的推导过程；了解等差数列的函数特征；能用等差数列的通项公式解决相应的一些问题。

2. **能力目标**：让学生亲身经历“从特殊入手，研究对象的性质，再逐步扩大到一般”这一研究过程，培养他们观察、分析、归纳、推理的能力。通过阶梯性的强化练习，培养学生分析问题解决问题的能力。

3. **情感目标**：通过对等差数列的研究，培养学生主动探索、勇于发现的求索精神；使学生逐步养成细心观察、认真分析、及时总结的好习惯。

【教学重难点】

1. **教学重点**：等差数列的概念的理解，通项公式的推导及应用。

2. **教学难点**：（1）对等差数列中“等差”两字的把握；

（2）对等差数列函数特征的理解；

（3）用不完全归纳法推导等差数列的通项公式。

【教学过程】

一. 课题引入

1. **复习回顾**：（上节课我们学习了数列的定义及通项公式，那么什么叫数列？什么是数列 $\{a_n\}$ 的通项公式）

从函数的观点看，数列可看成是定义域为 N^* （或它的子集 $\{1, 2, \dots, n\}$ ）的函数，当自变量从小到大的依次取值时，所对应的一系列函数值。数列的通项公式 $a_n = f(n)$ 是该函数的解析式。

2. **创设情境 引入课题**：（这节课我们将学习一类特殊的数列，下面我们看这样一些例子）

①德国数学家高斯八岁时计算 $1+2+3+\dots+100=?$ 时，所用到的数列：1, 2, 3, 4, ..., 100

②姚明刚进 NBA 一周里每天训练发球的个数依次是：6000, 6500, 7000, 7500, 8000, 8500, 9000

③匡威运动鞋（女）的尺码（鞋底长，单位是 cm）： $22\frac{1}{2}, 23, 23\frac{1}{2}, 24, 24\frac{1}{2}, 25, 25\frac{1}{2}, 26$

引导学生观察：上面的数列①、②、③有什么共同特点？

对于数列（1），从第2项起，每一项与前一項的差都等于_____；

对于数列（2），从第2项起，每一项与前一項的差都等于_____；

对于数列（3），从第2项起，每一项与前一項的差都等于_____；

发现这些数列有一个共同特点：从第二项起，每一项与前一項的差等于同一个常数，我们把有这一特点的数列叫做等差数列（板书课题）。

二、新课探究

（一）等差数列的定义

1、（完善黑体字形成）等差数列的定义

如果一个数列从第二项起，每一项与前一項的差等于同一个常数，那么这个数列就叫等差数列。这个常数叫做等差数列的公差，通常用字母 d 来表示。

上面三个数列都是等差数列，公差依次是____，____，____。

你觉得在理解等差数列的定义时应注意什么？强调：

① “从第二项起”（这是为了保证“每一项”都有“前一项”）；

② 每一项与它的前一项的差必须是同一个常数（因为“同一个常数”体现了等差数列的基本特征）；

在理解概念的基础上，由学生将等差数列的文字语言转化为数学语言，归纳出数学表达式：

2、等差数列定义的数学表达式（在理解概念的基础上，引导学生将等差数列的文字语言转化为数学语言，归纳出数学表达式）： $a_n - a_{n-1} = d$ (d 是常数, $n \in N$ 且 $n \geq 2$)

试一试：（加深对概念的理解）

① 9, 8, 7, 6, 5, 4, ……是等差数列吗？

② 常数列 3, 3, …, 3, …是等差数列吗？

③ 数列 1, 4, 7, 11, 15, 19 是等差数列吗？

可见，公差 d 可以是正数、负数，也可以是 0；

当 $d > 0$, 是递增数列；当 $d < 0$, 是递减数列；当 $d = 0$, 是常数列。

④ 若数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_{n+1} - a_n = d$ (d 是常数, $n \in N$ 且 $n \geq 2$)，则数列 $\{a_n\}$ 是等差数列吗？（此题易判断错，强调理解定义必须准确，也为后续内容埋下伏笔）

（二）等差数列的通项公式

1、公式推导—探究活动一

如果等差数列 $\{a_n\}$ 首项是 a_1 ，公差是 d ，那么这个等差数列 a_2, a_3, a_4 如何表示？ a_n 呢？（步步为营，层层推进）

根据等差数列的定义可得：

$$a_2 - a_1 = d, \quad a_3 - a_2 = d, \quad a_4 - a_3 = d, \quad \dots$$

所以： $a_2 = a_1 + d$,

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$

……

由此完成 $a_n = a_1 + (\quad)d$ 填空（学生易归纳填出），得 $a_n = a_1 + (n-1)d \cdots (*)$ ，这是等差数列的通项公式吗？（让学生回答）

当 $n=1$ 时，对 $(*)$ 式两边均为 a_1 ，即等式也成立，说明 $(*)$ 式对 $n \in N^*$ 都成立，因此等差数列的通项公式就是： $a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n \in N^*$

（至此指出）上面求通项公式的方法叫不完全归纳法，这种导出公式的方法不够严密，因此我们有必要寻求更为严密的推导方法。

根据等差数列的定义可得：

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = a_1 \\ a_2 - a_1 = d \\ a_3 - a_2 = d \\ \dots\dots \\ a_n - a_{n-1} = d \end{array} \right\}$$

将以上 n 个式子相加得 $a_n = a_1 + (n-1)d$ (该过程应体现探索)。这种求通项公式的方法叫**叠加法**。

2、公式理解

通项公式含有 a_1, d, n, a_n 这 4 个量, 已知三个量, 第 4 个量就是未知数, 通项公式就是方程, 解方程就可以求出第 4 个量。即利用方程的思想“知三可求一”。

三、应用与探索

例 1. 已知等差数列 1 8, 1 5, 1 2, 9, …… -----公式的简单应用

①请写出 a_{20}, a_n

②-279 是否是这个数列中的项, 如果是, 是第几项?

解: ① $\because a_1 = 18, a_2 = 15, \therefore d = a_2 - a_1 = 15 - 18 = -3,$

$$\therefore a_{20} = a_1 + (20-1)d = 18 - 3 \times 19 = -39, a_n = a_1 + (n-1)d = 18 - 3(n-1) = -3n + 21;$$

②解 $-3n + 21 = -279$ 得 $n = 100$, 即 -279 是该数列的第 100 项。

说明: 要判断 -279 是不是数列的项, 关键是求出通项公式, 并判断是否存在正整数 n , 使得 $a_n = -279$ 成立, 实质上是要求方程 $a_n = -279$ 的正整数解。

例 2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 10, a_{15} = 25$, 求 a_{25} 的值。 -----公式的深化与推广

$$\text{解: } \begin{cases} a_5 = a_1 + 4d \\ a_{15} = a_1 + 14d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ d = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a_{25} = 40.$$

解方程组比较麻烦, 可否避免? 发现: $a_{15} - a_5 = 10d = (15-5)d$ ——是一种巧合, 还是对任意的两项差都满足? 请同学们**思考**: ——探究活动二

在公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_n 与 a_m 有何关系?

$$\text{分析: } \begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_m = a_1 + (m-1)d \end{cases} \Rightarrow a_n - a_m = (n-m)d \Rightarrow a_n = a_m + (n-m)d \quad (\text{证实并非}$$

$$\text{巧合}) \Rightarrow d = \frac{a_n - a_m}{n - m}.$$

比较 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 与 $a_m = a_n + (m-n)d$ 发现, 前式是后式的特例, 后式是前式的推广。为此我们不妨把 $a_m = a_n + (m-n)d$ 叫做等差数列的变通式好了。

(在 $a_n = a_m + (n-m)d$ 后板书: 等差数列的变通式)

请用**变通式**再解例 2。

解法二: 由 $a_{15} = a_{10} + 10d$ 即 $25 = 10 + 10d$ 得 $10d = 15$, 所以 $a_{25} = a_{15} + 10d = 25 + 15 = 40$ 。

发现: 5, 15, 25 成等差, a_5, a_{15}, a_{25} 也成等差; 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $k_1, k_2, k_3 \cdots$ 成等差数列, 那

么 $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3} \cdots$ 成等差数列吗? (课后思考)

练一练: (强化通项公式与变通式的应用)

(1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_5 = 10, a_{12} = 31$, 则 $a_n =$ _____;

(2) 若 $d = -2, a_{20} = -397$, 则 $a_n =$ _____

(3) $5\sqrt{3}$ 是数列 $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{15}, \dots$ 的第 _____ 项;

(4) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 + a_5 = 4, a_n = 33$, 则 n 的值为 _____;

例 3: (由等差数列通项公式得 $a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d)$ (d, b 是常数), 当 $d \neq 0$ 的时候, 通项公式是关于 n 的一次式, 一次项的系数是公差。等差数列通项可以写成 $a_n = pn + q$ 形式) 反之如果数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = pn + q$ (其中 p, q 是常数), 那么这个数列是等差数列吗?

分析: 判定 $\{a_n\}$ 是不是等差数列, 也就要看 $a_n - a_{n-1}$ ($n > 1$) 是不是与 n 无关的常数。

解: 对数列 $\{a_n\}$ 中的任意两项 a_n 与 a_{n-1} ($n > 1$), $a_n - a_{n-1} = (pn + q) - [p(n-1) + q] = p$ 为常数,

$\therefore \{a_n\}$ 是等差数列, 首项 $a_1 = p + q$, 公差为 p 。

由些得出: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列的充要条件是其通项 $a_n = pn + q$ (p, q 是常数)。

探究活动三:

(1) 在直角坐标系中, 画出 $a_n = -3n + 21$ 的图象。这个图象有什么特点? (无穷多个孤立点。)

(2) 在同一坐标系下, 画出函数 $y = -3x + 21$ 的图象。你发现了什么? ——实例展示

($a_n = -3n + 21$ 的图象是直线 $y = -3x + 21$ 上均匀排开的无穷多个孤立点。)

(3) 等差数列 $a_n = pn + q$ 与函数 $y = px + q$ 图象间的有什么关系?

(当 $p \neq 0$ 时, $a_n = pn + q$ 也是关于 n 的一次式; $a_n = pn + q$ 的图象是直线 $y = px + q$ 上均匀排开的无穷多个孤立点。)

四、归纳小结 提炼精华

本节课主要学习了:

一个定义: $a_n - a_{n-1} = d$ (d 是常数, $n \in N$ 且 $n \geq 2$)

两个公式: $a_n = a_1 + (n-1)d$, $a_n = a_m + (n-m)d$

两种思想: 方程思想、函数的思想。

三种方法: 不完全归纳法、迭代法、叠加法 (此条不板书)。

五、课后作业 运用巩固

必做题: A. 课本 P114 习题 3.2 第 1, 2, 6 题

B. 补充: 1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = -2$, a_{10} 是第一个大于 1 的项。求公差 d 的取值范围。

2. 我国古代算书《孙子算经》卷中第 25 题记有: “今有五等诸侯, 共分橘子六十颗。人分加三颗。

问: 五人各得几何?

选做题: 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_7 = 16$, 求下列各式的值: (为下节课研究等差数列的性质做铺垫)

(1) $a_6 + a_8$; (2) $a_3 + a_{11}$

教案说明

一、本课时的数学本质与教学目标定位

1、本课时内容的本质：

“等差”是等差数列这一现象中最一般的东西，“等差”是等差数列的最根本的性质。从知识内在联系函数的度看，等差数列的通项公式是非0自然 n 的一次式，其图象是一条直线上的一群孤立的、均匀排开的点。从等差数列概念的形成到通项公式的运用这一过程看，它让学生经历了“从特殊入手，研究对象的性质，再逐步扩大到一般”这一常用数学研究方法的完整过程。从思想与方法提炼的维度看，在等差数列第一课时的教学过程中不仅渗透了函数的思想和方程的观点，还提炼出了“不完全归纳法”、“叠加法”等数学方法。

2、本课时教学目标定位：

从教纲、教材层面看：本节的重点是等差数列的概念及其通项公式的推导和应用。本节教材先在具体事例的基础上引出等差数列的概念，接着用不完全归纳法推出等差数列的通项公式，最后应用这个公式进行相关计算。可见本课内容的安排旨在培养学生观察分析、归纳猜想、应用等能力。

从学生知识层面看：学生对数列已有初步的认识，对方程和数学公式的运用已有一定的基础，对函数思想的认识也逐渐趋于深刻。

从学生素质层面看：从高一新生入学开始，我就很注意学生自主探究习惯的养成。现阶段我的学生思维活跃，课堂参与意识较强，并已具有一定的分析、推理能力。

鉴于上述原因，我确定了本节课的三维教学目标，该目标的特点是：重视概念的形成过程和对概念的本质认识，强调公式的推导证明，强调用函数的观点研究问题，强调学生的亲身经历，突出对学生分析、解决问题能力的培养，关注学生良好的思维习惯的养成。

二、本节课的地位与作用

数列是高中数学的重要内容，是历年高考的热点与重点之一。数列作为离散的函数，有着承前启后的作用，它既是前一章《函数》内容的延伸，也是数学归纳法、数列极限等后续课程的基础。数列在实际的生产生活中运用特别广泛。数列对于培养学生观察问题的能力与数学应用能力的培养是不可或缺的。

等差数列则是数列这章的两大核心内容——等差数列、等比数列中的第一个。为此对于等差数列的学习就其知识本生无疑已是非常重要的了，同时还能为学习等比数列，乃至研究其它更一般的数列，提供了方法指明了方向。

等差数列的第一课时，是在学生前面了解了数列的一般性概念、数列的通项公式、递推公式基础上，第一次对一个特殊数列展开研究的开始，它是继续研究等差数的基础，它为等比数列概念的学习、通项公式的推导与应用等，给出了“示范”提供了“模式”。

三、教学诊断分析

1、本节课易了解的地方：

- ①观察引例发现所给数列的共同点，并归纳出等差数列的定义。
- ②等差数列定义的理解及利用定义判断简单数列是否是等差数列。

③公差可以是正数、负数，也可以是0；

当 $d > 0$ 时，是递增数列；当 $d < 0$ 时，是递减数列，当 $d = 0$ 时，是常数列。

④等差数列通项公式的基本应用——知三求一。

2、不易理解地方及易错点：

①若数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_{n+1} - a_n = d$ （ d 是常数， $n \in N$ 且 $n \geq 2$ ），则数列 $\{a_n\}$ 是等差数列吗？（这一问题的判断）

② $5\sqrt{3}$ 是数列 $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{15}, \dots$ 的第____项；（误判数列 $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{15}, \dots$ 为等差数列）

③不完全归纳得出的结论为什么不一定正确？，这种方法为什么不够严密。

④等差数列通项公式变形为： $a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d)$ ，而断定 a_n 是关于 n 的一次函数。

四、教法特点及预期效果分析：

1、教法特点：

本节课采用诱导思维法及讲练结合法。诱导思维法：这种方法有利于学生对知识进行主动建构；有利于突出重点，突破难点；有利于调动学生的主动性和积极性，发挥其创造性。讲练结合法：可以及时巩固所学内容，抓住重点，突破难点。本节课先是从具体的例子出发，引导学生观察，进而得到等差数列的概念，接着由等差数列的概念出发，运用观察，分析，归纳的方法推导等差数列的通项公式，培养学生用数学不完全归纳法得到数学结论的思维能力。在对这个公式时，启发学生不同角度去看待同一个问题，加强思维能力，培养学生运用辩证法思想思维数学问题。接着根据公式进行例题讲解，最后给出反馈练习，测试学生对本堂知识的掌握程度，以便及时反馈给老师，在练习的过程中，采用先易后难，层层推进的方式给出习题，符合学生的认知能力，同时亦可兼顾不同层次的学生，真正做到“因材施教”。

2、预期效果分析：

学生对学习数学有浓厚兴趣，课堂上，能大胆发言，乐于做练习。对数列的知识有初步的接触和认识，对方程、函数，掌握得也较理想。对数学公式的运用已具备一定的技能，解二元一次方程组较为熟练。在引导分析时，留出“空白”，让学生去联想、探索，同时鼓励学生大胆质疑，围绕中心各抒己见，把思路方法和需要解决的问题弄清。本节课所选例紧扣教材，由浅入深，步步为营，层层推进，学生掌握情况较好。