

第二部分

题型方法

数列性质常见考题

题型一：数列公共项问题

题目 1 已知集合 $M = \{s | s = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{t | t = 4n - 1, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$

A. $\emptyset$ B. M C. N D. Z

题目 2 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $b_n = a_{2n}$, $\{a_n\}$ 的各项和为 9, 则数列 $\{b_n\}$ 的各项和为 _____.

题目 3 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 0 的等差数列, 从该数列中抽取某些项: $a_1, a_5, a_{17}, a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$ 组成等比数列.

(1) 求公比;

(2) 求数列 $\{kn\}$ 的通项公式, 求数列 $\left\{ \frac{n(k_n + 1)}{2^{2n+1}} \right\}$ 的最大值项.

跟踪训练 1 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 且 $a_1 = b_2 = 4$, $S_3 = 21$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 现由数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 按照下列方式构成新的数列 $\{c_n\}$.

① 将数列 $\{a_n\}$ 中的项去掉数列 $\{b_n\}$ 中的项, 按原来的顺序构成新数列 $\{c_n\}$;

② 数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中的所有项分别构成集合 A 与 B , 将集合 $A \cup B$ 中的所有元素从小到大依次排列构成一个新数列 $\{c_n\}$.

在以上两个条件中任选一个作为已知条件, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 30 项和.

题型二：数列插项问题

题目 1 构造数组, 规则如下: 第一组是两个 1, 即 (1, 1), 第二组是 (1, 2, 1), 第三组是 (1, 3, 2, 3, 1), $\dots$, 在每一组的相邻两个数之间插入这两个数的和得到下一组. 设第 n 组中有 a_n 个数, 且这 a_n 个数的和为 $S_n (n \in \mathbb{N}^*)$. 则 $S_{2021} = (\quad)$

A. $3^{2020} + 2$ B. $3^{2021} + 2$ C. $3^{2021} + 1$ D. $3^{2020} + 1$

题目 2 在数列的每相邻两项之间插入此两项的积, 形成新的数列, 这样的操作叫做该数列的一次“扩展”. 将数列 1, 2 进行“扩展”, 第一次得到数列 1, 2, 2; 第二次得到数列 1, 2, 2, 4, 2; $\dots$. 若第 n 次“扩展”后得到的数列为 $1, x_1, x_2, \dots, x_t, 2$, 并记 $a_n = \log_2(1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_t \cdot 2)$, 其中 $t = 2^n - 1, n \in \mathbb{N}^*$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 _____.

题目 3 在数列的每相邻两项之间插入此两项的积, 形成新的数列, 这样的操作叫做该数列的一次“扩展”. 将数列 1, 2 进行“扩展”, 第一次得到数列 1, 2, 2; 第二次得到数列 1, 2, 2, 4, 2; $\dots$. 设第 n 次“扩展”后所得数列为 $1, x_1, x_2, \dots, x_m, 2$, 并记 $a_n = \log_2(1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m \cdot 2)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____.

跟踪训练 1 在数列的每相邻两项之间插入此两项的平均数, 形成新的数列, 这样的操作叫做该数列的一次“扩展”. 将数列 1, 2 进行“扩展”, 第一次得到数列 $1, \frac{3}{2}, 2$; 第二次得到数列 $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2$; 第 n 次得到数列 $1, x_1, x_2, \dots, 2$, 则第 n 次得到的数列项数为 $2^n + 1$ _____.

跟踪训练 2 构造数组, 规则如下: 第一组是两个 1, 即 (1, 1), 第二组是 (1, $2a$, 1), 第三组是 (1, $a(1 + 2a)$, $2a$,

$a(2a+1), 1) \cdots$, 在每一组的相邻两个数组之间插入这两个数的和的 a 倍得到下一组, 其中 $a \in (0, \frac{1}{4})$, 设第 n 组有 a_n 个数, 且这 a_n 个数的和为 $S_n (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求 a_n 和 S_n ;

(2) 求证: $\frac{a_1-1}{S_1} + \frac{a_2-1}{S_2} + \cdots + \frac{a_n-1}{S_n} \geq \frac{n}{2}$.

跟踪训练 3 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2, 前 n 项和为 S_n , 且 $a_{n+1} = 2S_n + 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数, 使这 $n+2$ 个数组成一个公差为 d_n 的等差数列, 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \frac{2n-1}{n}d_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

题型三: 数列规律问题

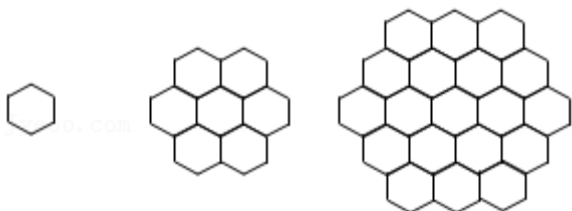
题目 1 0-1 周期序列在通信技术中有着重要应用. 若序列 $a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ 满足 $a_i \in \{0, 1\} (i=1, 2, \cdots)$, 且存在正整数 m , 使得 $a_{i+m} = a_i (i=1, 2, \cdots)$ 成立, 则称其为 0-1 周期序列, 并称满足 $a_{i+m} = a_i (i=1, 2, \cdots)$ 的最小正整数 m 为这个序列的周期. 对于周期为 m 的 0-1 序列 $a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$, $C(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i a_{i+k} (k=1, 2, \cdots, m-1)$ 是描述其性质的重要指标, 下列周期为 5 的 0-1 序列中, 满足 $C(k) \leq \frac{1}{5} (k=1, 2, 3, 4)$ 的序列是 ()

- A. 11010 $\cdots$ B. 11011 $\cdots$ C. 10001 $\cdots$ D. 11001 $\cdots$

题目 2 已知 r, s, t 为整数, 集合 $A = \{a | a = 2^r + 2^s + 2^t, 0 \leq r < s < t\}$ 中的数从小到大排列, 组成数列 $\{a_n\}$, 如 $a_1 = 7, a_2 = 11, a_{121} = ()$

- A. 515 B. 896 C. 1027 D. 1792

题目 3 蜜蜂被认为是自然界中最杰出的建筑师, 单个蜂巢可以近似地看作是一个正六边形, 如图为一组蜂巢的截面图. 其中第一个图有 1 个蜂巢, 第二个图有 7 个蜂巢, 第三个图有 19 个蜂巢, 按此规律, 以 $f(n)$ 表示第 n 幅图的蜂巢总数, 则 $f(4) = ()$; $f(n) = ()$



- A. 35 $3n^2 + 3n - 1$ B. 36 $3n^2 - 3n + 1$ C. 37 $3n^2 - 3n + 1$ D. 38 $3n^2 + 3n - 1$

跟踪训练 1 “0, 1 数列”在通信技术中有着重要应用, 它是指各项的值都等于 0 或 1 的数列. 设 A 是一个有限“0, 1 数列”, $f(A)$ 表示把 A 中每个 0 都变为 1, 0, 1, 每个 1 都变为 0, 1, 0, 所得到的新的“0, 1 数列”, 例如 $A = \{1, 0\}$, 则 $f(A) = \{0, 1, 0, 1, 0, 1\}$. 设 A_1 是一个有限“0, 1 数列”, 定义 $A_{k+1} = f(A_k), k=1, 2, 3, \cdots$. 若有限“0, 1 数列” $A_1 = \{0, 1, 0\}$, 则数列 A_{2022} 的所有项之和为 _____.

题型四: 绝对值数列问题

题目 1 普林斯顿大学的康威教授发现了一类有趣的数列并命名为“外观数列”, 该数列的后一项由前一项的外观产生. 以 1 为首项的“外观数列”记作 A_1 , 其中 A_1 为 1, 11, 21, 1211, 111221, $\cdots$, 即第一项为 1, 外观上看是 1 个 1, 因此第二项为 11; 第二项外观上看是 2 个 1, 因此第三项为 21; 第三项外观上看是 1 个 2, 1 个 1, 因此第四项为 1211, $\cdots$, 按照相同的规则可得 A_i 其它项, 例如 A_3 为 3, 13, 1113, 3113, 132113, $\cdots$ 若 A_i 的第 n 项记作 a_n , A_j 的第 n 项记作 b_n , 其中 $i, j \in [2, 9]$, 若 $c_n = |a_n - b_n|$, 则 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 ()

- A. $2n|i-j|$ B. $n(i+j)$ C. $n|i-j|$ D. $\frac{1}{2}|i-j|$

题目 2 (多选题) 对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正整数 $k(k \geq 2)$, 使得 $a_k > a_{k-1}$, $a_k > a_{k+1}$, 则称 a_k 是数列 $\{a_n\}$ 的“峰值”, k 是数列 $\{a_n\}$ 的“峰值点”, 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_n = \left| n + \frac{8}{n} - 9 \right|$, 下面哪些数不能作为数列 $\{a_n\}$ 的“峰值点”? ()

A. 1 B. 3 C. 6 D. 12

因为 $a_n = \left| n + \frac{8}{n} - 9 \right|$, 所以 $a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = \frac{10}{3}, a_4 = 3, a_5 = \frac{12}{5}, a_6 = \frac{5}{3}, a_7 = \frac{6}{7}$,
 $a_{11} = \frac{30}{11}, a_{12} = \frac{11}{3}, a_{13} = \frac{60}{13}$, 只有 $a_3 > a_2, a_3 > a_4$, 所以“3”是“峰值点”, 其它选项不是.
 故选: ACD.

题目 3 (多选题) 对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正整数 $k(k \geq 2)$, 使得 $a_k < a_{k-1}$, $a_k < a_{k+1}$, 则称 a_k 是数列 $\{a_n\}$ 的“谷值”, k 是数列 $\{a_n\}$ 的“谷值点”, 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_n = \left| n + \frac{9}{n} - 8 \right|$, 则数列 $\{a_n\}$ 的“谷值点”为 ()

A. 2 B. 3 C. 5 D. 7

跟踪训练 1 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3 = 5, a_7 = -3$.

(1) 当 n 为多少时 S_n 取最大值?

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 的每一项都有 $b_n = |a_n|$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

题型五: 数列中存在性、任意性问题

题目 1 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的无穷等差数列, 则“ $\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$ ”的 ()

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

题目 2 对于数列 $\{a_n\}$, 定义 $A_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{n-1}a_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的“加权”, 已知某数列 $\{a_n\}$ 的“加权” $A_n = n \cdot 2^{n+1}$, 记数列 $\{a_n + pn\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $T_n \leq T_5$ 对任意的 $n \in N^*$ 恒成立, 则实数 p 的取值范围为 ()

A. $\left[-\frac{12}{5}, -\frac{7}{3}\right]$ B. $\left[-\frac{16}{7}, -\frac{7}{3}\right]$ C. $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{12}{5}\right]$ D. $\left[-\frac{16}{7}, -\frac{9}{4}\right]$

题目 3 定义: 首项为 1 且公比为正数的等比数列为“ M -数列”. 已知数列 $\{a_n\}$ 是首项和公差均为 1 的等差数列. 设 m 为正整数, 若存在“ M -数列” $\{b_n\}$, 对任意的正整数 k , 当 $k \leq m$ 时, 都有 $b_k \leq a_k \leq b_{k+1}$ 成立, 则 m 的最大值为 _____.

跟踪训练 1 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = -\frac{9}{4}$, 且 $4S_{n+1} = 3S_n - 9$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $3b_n + (n-4)a_n = 0 (n \in N^*)$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

①求 T_n ;

②若 $T_n \leq \lambda b_n$ 对任意 $n \in N^*$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

跟踪训练 2 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$, 设数列 $b_n = a_{n+1} + a_n$.

(1) 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\left\{ \frac{9}{4} \frac{b_n}{S_n \cdot S_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{1}{4}$.

题型六: 奇偶性问题

题目 1 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$, 若 $a_1 = 1$, 则 $a_3 =$ _____, 前 60 项和为 _____.

题目 2 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n - S_{n-2} = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n \geq 3)$, 且 $S_1 = 1, S_2 = -\frac{3}{2}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

题目 3 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n + (-1)^n, n \geq 1$.

- (1) 写出数列 $\{a_n\}$ 的前三项 a_1, a_2, a_3 ;
- (2) 试判断数列 $\{a_n + \frac{2}{3}(-1)^n\}$ 是否为等比数列, 如果是, 求出 $\{a_n + \frac{2}{3}(-1)^n\}$ 的通项公式; 如果不是, 请说明理由;
- (3) 证明: 对任意的整数 $m > 4$, 有 $\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \cdots + \frac{1}{a_m} < \frac{7}{8}$.

跟踪训练 1 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, $a_1 = b_1 = 1, a_5 = 5(a_4 - a_3), b_5 = 4(b_4 - b_3)$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 对任意的正整数 n , 设 $c_n = \begin{cases} \frac{1}{a_n a_{n+2}}, n \text{ 为奇数,} \\ \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}, n \text{ 为偶数.} \end{cases}$ 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

跟踪训练 2 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, $a_1 = b_1 = 1, a_5 = 5(a_4 - a_3), b_5 = 4(b_4 - b_3)$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 对任意的正整数 n , 设 $c_n = \begin{cases} \frac{(3a_n - 2)b_n}{a_n a_{n+2}}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$,

① 求 $c_1 + c_3 + c_5 + \cdots + c_{2n-1}$

② 求 $c_2 + c_4 + c_6 + \cdots + c_{2n}$

题型七: 数列的取整问题

题目 1 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1 = 1, S_7 = 28$. 记 $b_n = [\lg a_n]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[0.9] = 0, [\lg 99] = 1$. 则 b_{11} 的值为 ()

- A. 11 B. 1 C. 约等于 1 D. 2

题目 2 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1 = 1, S_7 = 28$. 记 $b_n = [\lg a_n]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[0.9] = 0, [\lg 99] = 1$.

- (1) 求 b_1, b_{11}, b_{111} ;
- (2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 2019 项和.

题目 3 已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 = 20, a_3 = 8$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0, m]$ ($m \in \mathbb{N}^*$) 中的项的个数, 求数列 $\{b_m\}$ 的前 100 项和 S_{100} .

跟踪训练 1 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d > 0$, 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1 = 1, S_2 \cdot S_3 = 36$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^{n-1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若对一切 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $T_n < M$ (M 为正整数) 成立. 求 M 的最小值.

跟踪训练 2 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均不为 0 的等差数列, S_n 为其前 n 项和, 且满足 $a_n^2 = S_{2n-1}$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 求证: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i \cdot a_{2i+2}} < \frac{1}{4}$;
- (3) 设 $b_n = \frac{a_n + 1}{2a_{n+1}}$, 是否存在正整数 m, n ($1 < m < n$), 使得 b_1, b_m, b_n 依次成等比数列? 若存在, 求出所有的 m, n 的值, 若不存在, 请说明理由.

跟踪训练 3 设 $\{a_n\}$ 是公差为零的等差数列, S_n 为其前 n 项和, 满足: $a_2^2 + a_3^2 = a_4^2 + a_5^2, S_7 = 7$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;

(3) 试求所有的正整数 m , 使得 $\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$ 为数列 $\{a_n\}$ 中的项.