

第一部分

知识笔记



第二十章 解三角形



学习笔记

【考点剖析】

知识点一：基本定理公式

(1) 正弦定理：在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ， R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径，则

定理	正弦定理	余弦定理
公式	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B;$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$
常见变形	$(1)a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C;$ $(2)\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R};$	$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$ $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac};$ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$

(2) 面积公式：

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r \quad (r \text{ 是三角形内切圆的半径, 并可由此计算 } R, r.)$$

知识点二：相关应用

(1) 正弦定理的应用

① 边化角，角化边 $\Leftrightarrow a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C$

② 大边对大角 大角对大边： $a > b \Leftrightarrow A > B \Leftrightarrow \sin A > \sin B \Leftrightarrow \cos A < \cos B$

$$\text{③ 合分比: } \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{a+c}{\sin A + \sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(2) $\triangle ABC$ 内角和定理： $A+B+C=\pi$

① $\sin C = \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \Leftrightarrow c = a\cos B + b\cos A$

同理有： $a = b\cos C + c\cos B, b = c\cos A + a\cos C.$

② $-\cos C = \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B;$

$$\text{③ 斜三角形中, } -\tan C = \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} \Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

$$\text{④ } \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}; \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$$

⑤ 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 成等差数列 $\Leftrightarrow B = \frac{\pi}{3}, A+C = \frac{2\pi}{3}.$

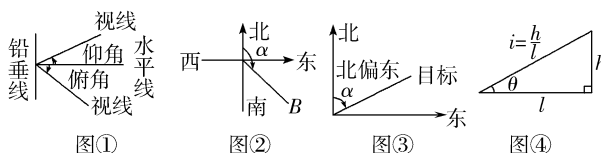
知识点三：实际应用

(1) 仰角和俯角

学习笔记



在视线和水平线所成的角中,视线在水平线上方的角叫仰角,在水平线下方的角叫俯角(如图①).



(2) 方位角

从指北方向顺时针转到目标方向线的水平角,如 B 点的方位角为 α (如图②).

(3) 方向角:相对于某一正方向的水平角.

①北偏东 α ,即由指北方向顺时针旋转 α 到达目标方向(如图③).

②北偏西 α ,即由指北方向逆时针旋转 α 到达目标方向.

③南偏西等其他方向角类似.

(4) 坡角与坡度

①坡角:坡面与水平面所成的二面角的度数(如图④,角 θ 为坡角).

②坡度:坡面的铅直高度与水平长度之比(如图④, i 为坡度). 坡度又称为坡比.

2 【方法技巧与总结】

1. 方法技巧:解三角形多解情况

在 $\triangle ABC$ 中,已知 a, b 和 A 时,解的情况如下:

	A 为锐角			A 为钝角或直角	
图形					
关系式	$a = b \sin A$	$b \sin A < a < b$	$a \geq b$	$a > b$	$a \leq b$
解的个数	一解	两解	一解	一解	无解

2. 在解三角形题目中,若已知条件同时含有边和角,但不能直接使用正弦定理或余弦定理得到答案,要选择“边化角”或“角化边”,变换原则常用:

- (1) 若式子含有 $\sin x$ 的齐次式,优先考虑正弦定理,“角化边”;
- (2) 若式子含有 a, b, c 的齐次式,优先考虑正弦定理,“边化角”;
- (3) 若式子含有 $\cos x$ 的齐次式,优先考虑余弦定理,“角化边”;
- (4) 代数变形或者三角恒等变换前置;
- (5) 含有面积公式的问题,要考虑结合余弦定理使用;
- (6) 同时出现两个自由角(或三个自由角)时,要用到 $A + B + C = \pi$.

第二部分

题型方法

题型一：正弦定理的应用

例 1 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 30^\circ$, $BC = 1$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 3

例 2 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + c^2 - b^2)$.

- (1) 求角 B 的大小;
(2) 若 $a + \sqrt{2}b = 2c$, 求 $\sin C$.

例 3 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 分别以 a, b, c 为边长的三个正三角形的面积依次为 S_1, S_2, S_3 , 已知 $S_1 - S_2 + S_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin B = \frac{1}{3}$.

- (1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;
(2) 若 $\sin A \sin C = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 求 b .

例 4 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 若 $\sin A = \frac{3}{5}$, $A = 2B$, 角 C 为钝角, $b = 5$.

- (1) 求 $\sin(A - B)$ 的值;
(2) 求边 c 的长.

例 5 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2\cos C(a\cos B + b\cos A) = c$.

- (1) 若 $\cos A = \frac{\sqrt{6}}{4}$, 求 $\sin(2A + C)$ 的值;
(2) 若 $c = \sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求边 a, b 的值.
(1) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}$; (2) $a = 2, b = 3$ 或 $a = 3, b = 2$

例 6 在① $a = 6$; ② $a = 8$; ③ $a = 12$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求 $\cos A$ 的值; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.

问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 S , 且 $a^2 + b^2 - c^2 = 4S$, $c = 5\sqrt{2}$, _____?

题型二：余弦定理的应用

例 1 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 且 $4\sqrt{3}S = (a + b)^2 - c^2$, 则 $\sin\left(C - \frac{\pi}{6}\right) = ()$

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

例 2 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a = 2\sqrt{6}$, $\cos A = -\frac{1}{4}$, $\sin B = 2\sin C$, 则 $b = ()$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

例 3 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边. 若 a, b, c 成等比数列, 且 $a^2 - c^2 = (a - b)c$, 则 A 的大小是 ()

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

例 4 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $2b^2 - 3c^2 - ac = 0, \sin(A + B) = 2\sin A$, 则 $\tan C =$ _____.

题型三: 判断三角形的形状

例 1 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a^2 - b^2 = c^2 - \sqrt{2}bc$ 且 $b\cos C = a\sin B$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()

A. 等腰直角三角形

B. 等边三角形

C. 等腰三角形

D. 直角三角形

例 2 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b-c}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()

A. 等边三角形

B. 为直角的直角三角形

C. 为顶角的等腰三角形

D. 为顶角的等腰三角形或 B 为顶角的等腰三角形

例 3 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $c^2 + b^2 \cos^2 A = 2bccosA$, 则 $\triangle ABC$ 为 ()

A. 等腰非等边三角形

B. 直角三角形

C. 钝角三角形

D. 等边三角形

例 4 已知 $\triangle ABC$ 中, 三内角 A, B, C 满足 $2B = A + C$, 三边 a, b, c 满足 $b^2 = ac$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()

A. 直角三角形

B. 等腰直角三角形

C. 等边三角形

D. 钝角三角形

例 5 设 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 满足 $2B = A + C$, 又 $\sin^2 B = \sin A \sin C$, 则这个三角形的形状是 ()

A. 直角三角形

B. 等边三角形

C. 等腰直角三角形

D. 钝角三角形

例 6 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c , $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状一定是 ()

A. 正三角形

B. 直角三角形

C. 等腰三角形

D. 等腰直角三角形

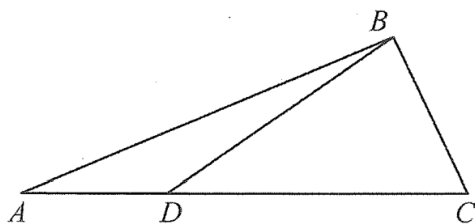
方法归纳 【方法技巧与总结】

(1) 求最大角的余弦, 判断 $\triangle ABC$ 是锐角、直角还是钝角三角形.

(2) 用正弦定理或余弦定理把条件的边和角都统一成边或角, 判断是等腰、等边还是直角三角形.

题型四: 正、余弦定理与的综合

例 1 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AC 边上一点, $\angle ABC$ 为钝角, $\angle DBC = 90^\circ$.



(1) 证明: $\cos \angle ADB + \sin C = 0$;

(2) 若 $AB = 2\sqrt{7}, BC = 2$, 再从下面①②中选取一个作为条件, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

① $\sin \angle ABC = \frac{3\sqrt{21}}{14}$; ② $AC = 3AD$.

注:若选择两个条件分别解答,则按第一个解答计分.

例 2 在① $AB = 2AD$, ② $\sin \angle ACB = 2\sin \angle ACD$, ③ $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ACD}$ 这三个条件中任选一个,补充在下面问题中,并解答.

已知在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC + \angle ADC = \pi$, $BC = CD = 2$, 且 _____.

(1) 证明: $\tan \angle ABC = 3\tan \angle BAC$;

(2) 若 $AC = 3$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.

例 3 在① $\sin 2C = \sqrt{3}\cos C$, ② $c(2 + \cos B) = \sqrt{3}b\sin C$, ③ $b\sin A + \sqrt{3}a\cos B = 0$ 这三个条件中任选一个,补充在下面的问题中,若问题中的三角形存在,求该三角形的面积;若问题中的三角形不存在,说明理由.

问题:是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $b = 7, c = 5$, _____?

例 4 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $(\frac{1}{2}a^2 - b^2)\sin C$.

(1) 证明: $\sin A = 2\sin B$;

(2) 若 $a\cos C = \frac{3}{2}b$, 求 $\cos A$.

例 5 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 BC 边上的高等于 a .

(1) 求证: $\sin A = \sin B\sin C$;

(2) 若 $\angle BAC = 45^\circ$, 求 $\frac{c}{b} + \frac{b}{c}$ 的值.

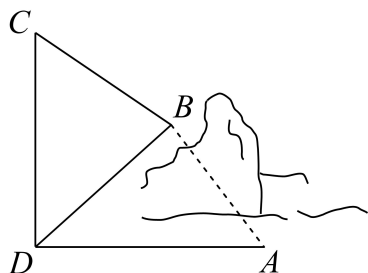
例 6 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $b\tan A + b\tan B = \frac{\sqrt{3}c}{\cos A}$.

(1) 求角 B ;

(2) D 是 AC 边上的点, 若 $CD = 1, AD = BD = 3$, 求 $\sin A$ 的值.

题型五: 解三角形的实际应用

例 1 为了测量隧道口 A, B 间的距离, 开车从 A 点出发, 沿正西方向行驶 $400\sqrt{2}$ 米到达 D 点, 然后从 D 点出发, 沿正北方向行驶一段路程后到达 C 点, 再从 C 点出发, 沿东南方向行驶 400 米到达隧道口 B 点处, 测得 BD 间的距离为 1000 米.

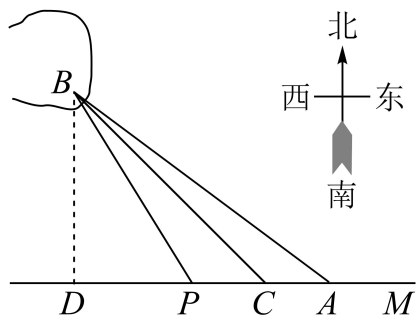


(1) 若隧道口 B 在点 D 的北偏东 θ 度的方向上, 求 $\cos \theta$ 的值;

(2) 求隧道口 AB 间的距离.

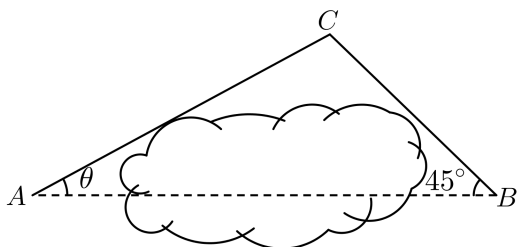
例 2 如图, 某沿海地区计划铺设一条电缆联通 A, B 两地, A 处位于东西方向的直线 MN 上的陆地处, B 处位于海上一个灯塔处, 在 A 处用测角器测得 $\tan \angle BAN = \frac{3}{4}$, 在 A 处正西方向 1km 的点 C 处, 用测角器测得 $\tan \angle BCN = 1$. 现有两种铺设方案: ①沿线段 AB 在水下铺设; ②在岸 MN 上选一点 P , 设 $\angle BPN = \theta$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 先沿线段 AP 在地下铺设, 再沿线段 PB 在水下铺设, 预算地下、水下的电缆铺设费用分别为 2 万元

/km、4 万元 /km.



- (1) 求 A 、 B 两点间的距离；
- (2) 请选择一种铺设费用较低的方案，并说明理由.

例 3 如图，一架飞机从 A 地飞往 B 地，两地相距 200km . 飞行员为了避开某一区域的雷雨云层，从机场起飞以后，就沿与原来的飞行方向成 θ 角的方向飞行，飞行到 C 地，再沿与原来的飞行方向成 45° 角的方向继续飞行 $60\sqrt{2}\text{km}$ 到达终点.

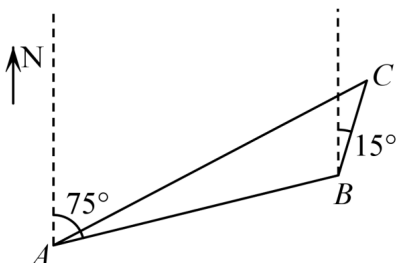


- (1) 求 A 、 C 两地之间的距离；
- (2) 求 $\tan\theta$.

例 4 在某海域 A 处的巡逻船发现南偏东 60° 方向，相距 a 海里的 B 处有一可疑船只，此可疑船只正沿射线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x (x \geq 0)$ (以 B 点为坐标原点，正东，正北方向分别为 x 轴， y 轴正方向，1 海里为单位长度，建立平面直角坐标系) 方向匀速航行. 巡逻船立即开始沿直线匀速追击拦截，巡逻船出发 t 小时后，可疑船只所在位置的横坐标为 bt . 若巡逻船以 30 海里 / 小时的速度向正东方向追击，则恰好 1 小时与可疑船只相遇.

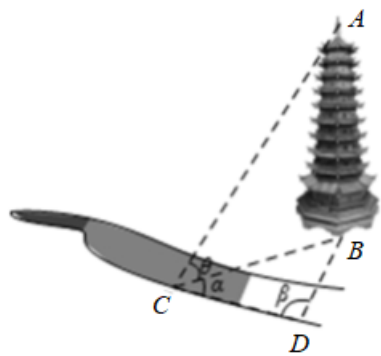
- (1) 求 a, b 的值；
- (2) 若巡逻船以 $5\sqrt{21}$ 海里 / 小时的速度进行追击拦截，能否拦截成功？若能，求出拦截时间，若不能，请说明理由.

例 5 如图所示，遥感卫星发现海面上有三个小岛，小岛 B 位于小岛 A 北偏东 75° 距离 60 海里处，小岛 B 北偏东 15° 距离 $30\sqrt{3} - 30$ 海里处有一个小岛 C .



- (1) 求小岛 A 到小岛 C 的距离；
- (2) 如果有游客想直接从小岛 A 出发到小岛 C ，求游船航行的方向.

例 6 如图，测量河对岸的塔高 AB 时，可以选取与塔底 B 在同一水平面内的两个测量基点 C 与 D . 现测得 $\angle BCD = \alpha = 35^\circ$ ， $\angle BDC = \beta = 100^\circ$ ， $CD = 400\text{m}$. 在点 C 测得塔顶 A 的仰角为 50.5° .



(1) 求 B 与 D 两点间的距离 (结果精确到 $1m$);

(2) 求塔高 AB (结果精确到 $1m$).

参考数据: 取 $\sqrt{2}\sin 35^\circ = 0.811$, $\sqrt{2}\sin 80^\circ = 1.393$, $\tan 50.5^\circ = 1.2$.

题型六: 倍角关系

例 1 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, $A = 2B$, 则 $\cos B =$ _____.

例 2 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C \sin(A - B) = \sin B \sin(C - A)$.

(1) 若 $A = 2B$, 求 C ;

(2) 证明: $2a^2 = b^2 + c^2$

例 3 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $b = 4$.

(1) 若 $\sin C = 2\sin B$, $a \cos C = 4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $A = 2B$, 且 $\triangle ABC$ 的边长均为正整数, 求 a .

例 4 已知 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c .

(1) 若 $A < B < C$, $B = \frac{\pi}{3}$, $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R , $ac = 2R^2(1 - 2\cos A \cos C)$, 求 A 的大小;

(2) 若 $a = 3$, $b = 2$, $A = 2B$, 求 c 边的长.

例 5 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 边长均为正整数, 且 $b = 4$.

(1) 若角 B 为钝角, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $A = 2B$, 求 a .

例 6 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b = 3$, $c = 1$, $A = 2B$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求 $\cos(2A + \frac{\pi}{6})$ 的值.

题型七: 三角形解的个数

例 1 设在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若满足 $a = \sqrt{3}$, $b = m$, $B = \frac{\pi}{6}$ 的 $\triangle ABC$ 不唯一, 则 m 的取值范围为 ()

A. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$

B. $(0, \sqrt{3})$

C. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

D. $(\frac{1}{2}, 1)$

例 2 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $b = 6$, 下面使得三角形有两组解的 a 的值可以为 ()

A. 4

B. $3\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{7}$

D. $3\sqrt{3}$

例 3 在三角形 ABC 中 (A 点在 BC 上方), 若 $A = \frac{\pi}{3}$, $BC = 2\sqrt{3}$, BC 边上的高为 h , 三角形 ABC 的解的个数为 n , 则以下错误的是 ()

A. 当 $h > 3$ 时, $n = 0$

B. 当 $h = 3$ 时, $n = 1$

C. 当 $0 < h \leq 1$ 时, $n = 0$

D. 当 $1 < h < 3$ 时, $n = 2$

例 4 已知在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 则根据条件解三角形时恰有一解的一组条件是 ()

A. $a = 3, b = 4, A = \frac{\pi}{6}$

B. $a = 4, b = 3, A = \frac{\pi}{3}$

C. $a = 1, b = 2, A = \frac{\pi}{4}$

D. $a = 2, b = 3, A = \frac{2\pi}{3}$

例 5 $\triangle ABC$ 中, 已知下列条件: ① $b = 3, c = 4, B = 30^\circ$; ② $a = 5, b = 8, A = 30^\circ$; ③ $c = 6, b = 3\sqrt{3}, B = 60^\circ$; ④ $c = 9, b = 12, C = 60^\circ$, 其中满足上述条件的三角形有两解的是 ()

A. ①④

B. ①②

C. ①②③

D. ③④

题型八: 三角形中的面积与周长问题

例 1 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $C = 2A$.

(1) 求证: $c = 2a \cos A$;

(2) 若 $c = 2a \cos A, A < B < C, b = 10$, 且 $a + c = 2b$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

例 2 从 ① $A = \frac{\pi}{3}$, ② $a = 3\sqrt{2} \sin B$ 这两个条件中选一个, 补充到下面问题中, 并完成解答.

已知锐角 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是内角 A, B, C 所对的边, 且 $\sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 C - \sqrt{2} \sin A \sin C$.

(1) 求角 B ;

(2) 已知 $b = \sqrt{6}$, 且 _____, 求 $\sin C$ 的值及 $\triangle ABC$ 的面积.

例 3 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C \sin(A - B) = \sin B \sin(C - A)$.

(1) 证明: $2a^2 = b^2 + c^2$;

(2) 若 $a = 5, \cos A = \frac{25}{31}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

例 4 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . $A \in (0, \frac{\pi}{2}), \sqrt{3} \sin A + \cos A = \sqrt{3}$.

(1) 求 $\tan 2A$ 的值;

(2) 若 $b = 2\sqrt{3}, a = 2, b^2 > a^2 + c^2$, 求 c 和面积 S 的值.

例 5 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . $\sqrt{3} \sin A + \cos A = \sqrt{3}, b = 2\sqrt{3}$. 请再从条件 ①: $a = 2, \sin^2 B > \sin^2 A + \sin^2 C$; 条件 ②: $a < b, a \cos A \cos C = c \sin^2 A + \frac{1}{2}a$. 这两个条件中选择一个作为已知, 求:

(1) $\tan 2A$ 的值;

(2) c 和面积 S 的值.

例 6 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin 2C = \sqrt{3} \sin C$.

(1) 求 $\angle C$;

(2) 若 $b = 6$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

例 7 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2b \cos B = c \cos A + a \cos C$.

- (1) 求角 B 的大小;
 (2) 若 $a + 2c = 16$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $8\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

例 8 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a\sin(A + B - C) = c\sin(B + C)$.

- (1) 求角 C 的值;
 (2) 若 $2a + b = 6$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

例 9 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $b = \sqrt{7}$, $c = 4$, $2\cos\left(B - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{7}\sin C = 3$.

- (1) 求 B ;
 (2) 若 C 为锐角, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

例 10 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $4a = \sqrt{5}c$, $\cos C = \frac{3}{5}$.

- (1) 求 $\sin A$ 的值;
 (2) 若 $b = 11$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

题型九: 三角形面积最大值, 及取值范围问题

例 1 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\tan(B + C) = \tan \frac{A}{2}$, 且 $a = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

例 2 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a\sin \frac{A+C}{2} = b\sin A$.

- (1) 求 B ;
 (2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $c = 1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 若 $a + c = 4$, $2\sin B = \sin A + \sin C$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $2\sqrt{3}$ D. 4

例 4 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 若 $a = 2$, $b = \sqrt{3}c$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $2\sqrt{3}$ D. 4

例 5 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a = 2$, 且 $(2 + b)(\sin A - \sin B) = (c - b)\sin C$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____.

例 6 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 角 A, B, C 的对边, $\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C = \cos A \cos B + \cos C - \cos 2B$, 且 $c = \sqrt{3}$, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $C = \frac{\pi}{3}$ B. $C = \frac{2\pi}{3}$
 C. $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

例 7 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a = b\cos C + c\sin B$.

- (I) 求 B ;
 (II) 若 $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

例 8 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 设 $\sin A \cos B = \sin B(2 - \cos A)$.

- (1) 若 $b + c = \sqrt{3}a$, 求 A ;
- (2) 若 $a = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

例 9 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , D 是 AB 的中点, 若 $CD = 1$ 且 $(a - \frac{1}{2}b)\sin A = (c + b)(\sin C - \sin B)$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是 _____

例 10 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a - b \cos C = \sqrt{3}c \sin B$.

- (1) 求 B ;
- (2) 若 $a = 2$, 且 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S 的取值范围.

题型十: 三角形周长最大值, 及取值范围问题

例 1 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$, 且 $c = 4$, 则 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围是 _____.

例 2 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\sqrt{3} \sin C + \cos C = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A}$

- (1) 求 A ;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 1, 求 $b^2 + c^2$ 的取值范围.

例 3 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a \sin \frac{A+C}{2} = b \sin A, b = 2\sqrt{3}$.

- (1) 求角 B 的大小;
- (2) 求 $2a - c$ 的取值范围.

例 4 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a \sin(A+B) = c \sin \frac{B+C}{2}$.

- (1) 求角 A 的大小;
- (2) 若角 B 为钝角, 求 $\frac{b}{c}$ 的取值范围.

例 5 在 $\triangle ABC$ 中, 设角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\cos^2 A = \sin^2 B + \cos^2 C + \sin A \sin B$.

- (1) 求角 C 的大小;
- (2) 若 $c = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

例 6 $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = \sin B \sin C$.

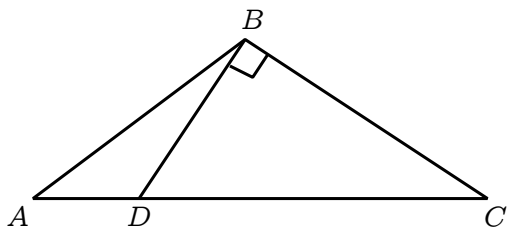
- (1) 求 A ;
- (2) 若 $BC = 3$, 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

例 7 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a(\cos C + \sqrt{3} \sin C) = b + c$.

- (1) 求角 A ;
- (2) 若 $a = 5$, 求 $\triangle ABC$ 的周长的最大值.

题型十一: 角平分线相关的定理

例 1 在中 $\triangle ABC$, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\angle ABC = 120^\circ$, $BD \perp AC$ 交 AC 于点 D , 且 $BD = 1$, 则 $2a + c$ 的最小值为 _____.



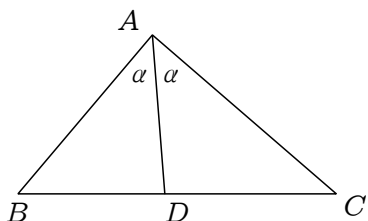
例 2 $\triangle ABC$ 中 D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $BD = 2DC$.

- (1) 求 $\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}$;
- (2) 若 $\angle BAC = 60^\circ$, 求 $\angle B$.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 _____. 在① $b \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = -\sqrt{3} c \cos B$; ② $2S_{\triangle ABC} = -\sqrt{3} \vec{BA} \cdot \vec{BC}$; ③ $\tan A + \tan C - \sqrt{3} = -\sqrt{3} \tan A \tan C$ 这三个条件中任选一个, 补充在上面的问题中, 并进行解答.

- (1) 求角 B 的大小;
- (2) 若角 B 的内角平分线交 AC 于 D , 且 $BD = 1$, 求 $a + 4c$ 的最小值.

例 4 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D , $AD = 1$, 则 $b + c$ 的最小值为_____.



例 5 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

- (1) 求 $\frac{\sin B}{\sin C}$;
- (2) 若 $AD = 1$, $DC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 BD 和 AC 的长.

题型十二: 有关三角形中线问题

★方法归纳【方法技巧与总结】★

遇到角平分线问题一般有两种思路:

思路一: 中线倍长法

思路二: 利用平面向量

例 1 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是内角 A, B, C 所对的边, 且满足 $\frac{\cos B}{\cos C} + \frac{b}{2a + c} = 0$,

- (1) 求角 B 的值;
- (2) 若 $c = 2$, AC 边上的中线 $BD = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

例 2 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $A = \frac{2\pi}{3}$.

- (1) 若 $a = 6$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, D 为边 BC 的中点, 求 AD 的长度;

(2) 若 E 为边 BC 上一点, 且 $AE = \sqrt{6}$, $BE:EC = 2c:b$, 求 $b + 2c$ 的最小值.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c , 且满足 $b \cos \frac{B+C}{2} = a \sin B$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $a = \sqrt{19}$, $\vec{BA} \cdot \vec{AC} = 3$, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 求 AD 的长.

例 4 在① $(a-c)\sin(A+B) = (a-b)(\sin A + \sin B)$; ② $2S = \sqrt{3} \vec{BA} \cdot \vec{BC}$; ③ $b \cos C = a - \frac{\sqrt{3}}{3} c \sin B$; 这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并解答问题. 问题: 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 _____.

(1) 求角 B 的大小;

(2) AC 边上的中线 $BD = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

题型十三: 有关内切圆问题 (等面积法)

例 1 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $BC = 1$, $AC = 5$, 则

A. $AB = 2\sqrt{5}$

B. $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$

C. $\triangle ABC$ 外接圆直径是 $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

D. $\triangle ABC$ 内切圆半径是 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

例 2 已知在 $\triangle ABC$ 中, $5 + 4\cos(A+B) = 4\sin^2 C$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心为 O , $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 4, 求 $\triangle ABO$ 面积的最大值.

例 3 三角形有一个角是 60° , 夹在这个角的两边长分别为 8 和 5, 则 ()

A. 三角形另一边长为 6

B. 三角形的周长为 20

C. 三角形内切圆面积为 3π

D. 三角形外接圆周长为 $\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$

例 4 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\cos C - \sqrt{3} \sin C = \frac{a-2c}{b}$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $b = 2$, 记 r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径, 求 r 的最大值.

题型十四: 与向量结合问题

例 1 锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 向量 $\vec{m} = (a, \sqrt{3}b)$ 与 $\vec{n} = (\cos A, \sin B)$ 平行.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $a = \sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

例 2 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $(2b-c)\cos A = a\cos C$, $a = 3$.

(1) 求角 A ;

(2) 若点 D 满足 $\vec{BD} = \frac{1}{3}\vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{BC}$, 求 $\triangle BCD$ 面积的最大值.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a > c$. 已知 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 2$, $\cos B = \frac{1}{3}$, $b = 3$. 求:

(1) a 和 c 的值;

(2) $\cos(B-C)$ 的值.

例 4 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是三内角 A, B, C 的对边, 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$. 解答下列问题:

- (1) 求证: $A = B$;
- (2) 求 c 的值;
- (3) 若 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

题型十五: 三角函数与解三角形结合

例 1 设向量 $\vec{a} = (\sin x, \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin x - \cos x))$, $\vec{b} = (\cos x, \sin x + \cos x)$, $x \in R$, 记函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$

- (1) 求函数 $f(x)$ 的对称轴及对称中心;
- (2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $f(A) = \frac{1}{2}$, $a = \sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

例 2 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin\omega x \cos\omega x + 2\cos^2\omega x (\omega > 0)$ 的最小正周期为 π .

- (1) 求 ω 的值和函数 $f(x)$ 的单调增区间;
- (2) 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 A, B, C , 其对应的边分别为 a, b, c , 若有 $f(A) = 3$, $BC = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

例 3 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x - \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}$.

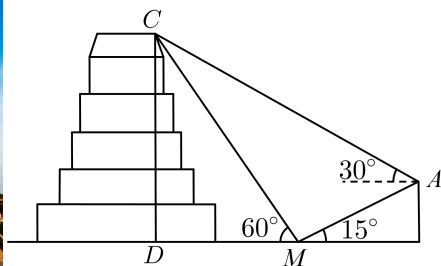
- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;
- (2) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a = \frac{8\sqrt{5}}{5}$, D 为边 AB 上一点, $CD = 2$, B 为锐角, 且 $f(B) = 0$, 求 $\angle BDC$ 的正弦值.



1. 【过关测试】

一、单选题

跟踪训练 1 滕王阁, 位于江西省南昌市西北部沿江路赣江东岸, 始建于唐朝永徽四年, 因唐代诗人王勃诗句“落霞与孤鹜齐飞, 秋水共长天一色”而流芳后世. 如图, 小明同学为测量滕王阁的高度, 在滕王阁的正东方向找到一座建筑物 AB , 高为 $12m$, 在它们的地面上的点 $M(B, M, D$ 三点共线) 测得楼顶 A , 滕王阁顶部 C 的仰角分别为 15° 和 60° , 在楼顶 A 处测得阁顶部 C 的仰角为 30° , 则小明估算滕王阁的高度为 () (精确到 $1m$)



- A. $42m$ B. $45m$ C. $51m$ D. $57m$

跟踪训练 2 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\sin C = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $c = 2, b = 3$, 则 $\cos B$ 的值为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{7}}{14}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{14}$ C. $\pm \frac{\sqrt{7}}{14}$ D. $\pm \frac{\sqrt{7}}{7}$

跟踪训练 3 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $b\sin B + c\sin C = \frac{4}{3}a\sin A$, 则

$\frac{\sin A \tan A}{\sin B \sin C}$ 的值为 ()

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

跟踪训练 4 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\sin C = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $b = 3$, $c = 2$. 则 $\cos B$ 的值为 ()

A. $-\frac{\sqrt{7}}{14}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{14}$ C. $\pm \frac{\sqrt{7}}{14}$ D. $\pm \frac{\sqrt{7}}{7}$

跟踪训练 5 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $A = \frac{5\pi}{6}$, $a = 2\sqrt{7}$, $c = \sqrt{3}b$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

A. $2\sqrt{6}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

跟踪训练 6 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 5$, $BC = 3$, $CA = 4$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ()

A. 16

B. 9

C. -9

D. -16

跟踪训练 7 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 45^\circ$, $c = 4$, 只需添加一个条件, 即可使 $\triangle ABC$ 存在且唯一. 条件: ① $a = 3\sqrt{2}$; ② $b = 2\sqrt{5}$; ③ $\cos C = -\frac{4}{5}$ 中, 所有可以选择的条件的序号为 ()

A. ①

B. ①②

C. ②③

D. ①②③

跟踪训练 8 在 $\triangle ABC$ 中, 三边长 a, b, c 满足 $a + c = 3b$, 则 $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}$ 的值为 ()

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

二、多选题

跟踪训练 9 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $b \sin A = (3b - c) \sin B$, 且 $\cos A = \frac{1}{3}$, 则下列结论正确的是 ()

A. $a + c = 3b$ B. $\tan A = 2\sqrt{2}$ C. $\triangle ABC$ 的周长为 $4c$ D. $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{2}}{9}a^2$

跟踪训练 10 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $AC = 5$, $BC = 7$, O 为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心, I 为 $\triangle ABC$ 内切圆的圆心, 则下列叙述正确的是 ()

A. $\triangle ABC$ 外接圆半径为 $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ B. $\triangle ABC$ 内切圆半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = 8$ D. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$

跟踪训练 11 在 $\triangle ABC$ 中各角所对得边分别为 a, b, c , 下列结论正确的有 ()

A. $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$ 则 $\triangle ABC$ 为等边三角形;B. 已知 $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$, 则 $\angle C = 60^\circ$;C. 已知 $a = 7$, $b = 4\sqrt{3}$, $c = \sqrt{13}$, 则最小内角的度数为 30° ;D. 在 $a = 5$, $A = 60^\circ$, $b = 4$, 解三角形有两解.

跟踪训练 12 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $\sin B(1 + 2\cos C) = 2\sin A \cos C + \cos A \sin C$, 则下列结论可能成立的是 ()

A. $a = 2b$ B. $b = 2a$ C. $A = 2B$ D. $C = 90^\circ$

三、填空题

跟踪训练 13 已知 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $p = \frac{a+b+c}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, 该公式称作海伦公式, 最早由古希腊数学家阿基米德得出. 若 $\triangle ABC$ 的周长为

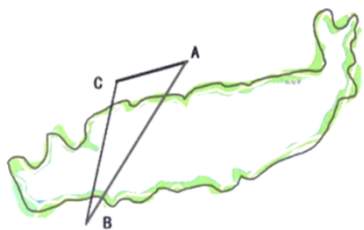
15, $(\sin A + \sin B) : (\sin B + \sin C) : (\sin C + \sin A) = 4 : 6 : 5$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.

跟踪训练 14 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\sin^2 B = \frac{3\sqrt{7}}{2} \sin A$, $b = 4a$, $a + c = 5$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.

跟踪训练 15 沈阳二中北校区坐落于风景优美的辉山景区, 景区内的一泓碧水蜿蜒形成了一个“秀”字, 故称“秀湖”. 湖畔有秀湖阁 (A) 和临秀亭 (B) 两个标志性景点, 如图. 若为测量隔湖相望的 A、B 两地之间的距离, 某同学任意选定了与 A、B 不共线的 C 处, 构成 $\triangle ABC$, 以下是测量数据的不同方案:

- ①测量 $\angle A$ 、 AC 、 BC ;
- ②测量 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 BC ;
- ③测量 $\angle C$ 、 AC 、 BC ;
- ④测量 $\angle A$ 、 $\angle C$ 、 $\angle B$.

其中一定能唯一确定 A、B 两地之间的距离的所有方案的序号是 _____.



跟踪训练 16 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $2b^2 - 3c^2 - ac = 0$, $\sin(A + B) = 2\sin A$, 则 $\cos C =$ _____.

四、解答题

跟踪训练 17 已知在三角形 $\triangle ABC$ 中, $a = 2b$, 三角形的面积 $S = 12$.

- (1) 若 $b = 4$, 求 $\tan(A + B)$;
- (2) 若 $\sin C = \frac{3}{5}$, 求 $\sin A, \sin B$.

跟踪训练 18 已知三角形花园 ABC , 顶点 A, B, C 为花园的三个出入口, 满足 $AB = 20\sqrt{76}$, $BC = 20\sqrt{61}$, $CA = 20\sqrt{91}$ (单位: 米).

- (1) 求三角形花园的面积 (精确到 1 平方米);
- (2) 若三角形 3 个内角均小于 120° , 到三角形三个顶点距离之和最短的点 M 必满足 MA, MB, MC 正好三等分 M 点所在的周角, 该点所对三角形三边的张角相等, 均为 120° . 所以这个点也称为三角形的等角中心. 请根据此知识求出三角形花园的最佳会合点 P 到三个出入口的最小距离和 (满足到三个出入口的距离和最小).

跟踪训练 19 已知函数 $f(x) = \cos x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3} \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期以及在 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间;
- (2) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 若 $g(B) = 0$, $a = 4$, $b = \frac{7}{2}$, 求 c 的值.

跟踪训练 20 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a^2 - b^2 = c\left(a \cos B - \frac{b}{2}\right)$.

- (1) 求角 A 的大小;
- (2) 若 $c = 8$, $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$, 求 BC 边上的高.

跟踪训练 21 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A \cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$.

- (1) 求角 A ;
- (2) 若 $AC = 8$, 点 D 是线段 BC 的中点, $DE \perp AC$ 于点 E , 且 $DE = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, 求 CE 的长.

跟踪训练 22 已知对任意 θ, φ , 都有: $\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi = \sin(\theta + \varphi) \sin(\theta - \varphi)$, 若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边

分别为 a, b, c . $a \neq b$, 且 $a \sin A - b \sin B = 3 \sin(A - B)$.

(1) 求 c ;

(2) 若 $b = 2a$, 过点 C 作 $CH \perp AB$, 垂足为 H , 若 $AH = 4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S .