

八个模型——搞定空间几何体的外接球与内切球

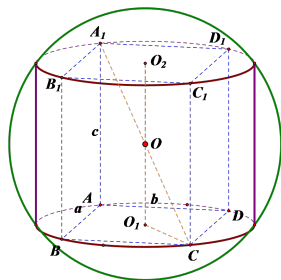
1 有关定义

1. 球的定义:空间中到定点的距离等于定长的点的集合(轨迹)叫球面,简称球.
2. 外接球的定义:若一个多面体的各个顶点都在一个球的球面上,则称这个多面体是这个球的内接多面体,这个球是这个多面体的外接球.
3. 内切球的定义:若一个多面体的各面都与一个球的球面相切,则称这个多面体是这个球的外切多面体,这个球是这个多面体的内切球.

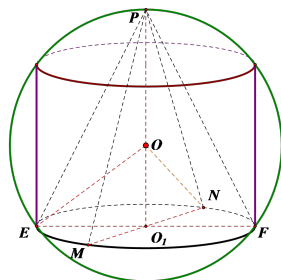
2 外接球的有关知识与方法

1. 性质:

- 性质 1:过球心的平面截球面所得圆是大圆,大圆的半径与球的半径相等;
- 性质 2:经过小圆的直径与小圆面垂直的平面必过球心,该平面截球所得圆是大圆;
- 性质 3:过球心与小圆圆心的直线垂直于小圆所在的平面(类比:圆的垂径定理);
- 性质 4:球心在大圆面和小圆面上的射影是相应圆的圆心;
- 性质 5:在同一球中,过两相交圆的圆心垂直于相应的圆面的直线相交,交点是球心(类比:在同圆中,两相交弦的中垂线交点是圆心).



初图1



初图2

2. 结论:

- 结论 1:长方体的外接球的球心在体对角线的交点处,即长方体的体对角线的中点是球心;
- 结论 2:若由长方体切得的多面体的所有顶点是原长方体的顶点,则所得多面体与原长方体的外接球相同;
- 结论 3:长方体的外接球直径就是面对角线及与此面垂直的棱构成的直角三角形的外接圆圆心,换言之,就是:底面的一条对角线与一条高(棱)构成的直角三角形的外接圆是大圆;
- 结论 4:圆柱体的外接球球心在上下两底面圆的圆心连一段中点处;
- 结论 5:圆柱体轴截面矩形的外接圆是大圆,该矩形的对角线(外接圆直径)是球的直径;
- 结论 6:直棱柱的外接球与该棱柱外接圆柱体有相同的外接球;
- 结论 7:圆锥体的外接球球心在圆锥的高所在的直线上;
- 结论 8:圆锥体轴截面等腰三角形的外接圆是大圆,该三角形的外接圆直径是球的直径;
- 结论 9:侧棱相等的棱锥的外接球与该棱锥外接圆锥有相同的外接球.

3. 终极利器:勾股定理、正弦定理及余弦定理(解三角形求线段长度);

3 内切球的有关知识与方法

1. 若球与平面相切,则切点与球心连线与切面垂直.(与直线切圆的结论有一致性).
2. 内切球球心到多面体各面的距离均相等,外接球球心到多面体各顶点的距离均相等.(类比:与多边形的内切圆).
3. 正多面体的内切球和外接球的球心重合.

4. 正棱锥的内切球和外接球球心都在高线上,但不一定重合.

5. 基本方法:

(1) 构造三角形利用相似比和勾股定理;

(2) 体积分割是求内切球半径的通用做法(等体积法).

★ 4 与台体相关的,此略.

★ 5 八大模型



1. 柱体背景模型

题型一: 墙角模型 (三条棱两两垂直, 不找球心的位置即可求出球半径)

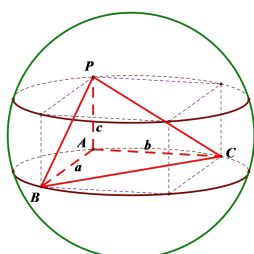


图1-1

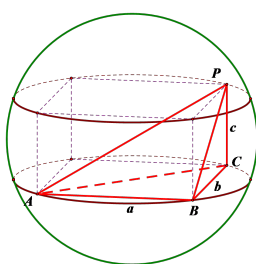


图1-2

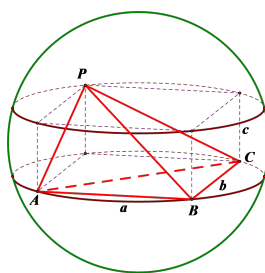


图1-3

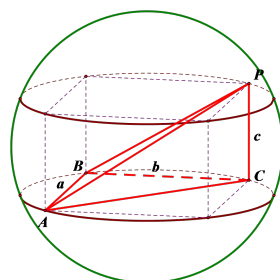


图1-4

方法: 找三条两两垂直的线段, 直接用公式 $(2R)^2 = a^2 + b^2 + c^2$, 即 $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, 求出 R

题型二: 对棱相等模型 (补形为长方体)

题设: 三棱锥(即四面体)中, 已知三组对棱分别相等, 求外接球半径 ($AB = CD$, $AD = BC$, $AC = BD$)

第一步: 画出一个长方体, 标出三组互为异面直线的对棱;

第二步: 设出长方体的长宽高分别为 a, b, c , $AD = BC = x$,

$AB = CD = y$, $AC = BD = z$, 列方程组,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = x^2 \\ b^2 + c^2 = y^2 \\ c^2 + a^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow (2R)^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2},$$

补充: 图 2-1 中, $V_{A-BCD} = abc - \frac{1}{6}abc \times 4 = \frac{1}{3}abc$.

第三步: 根据墙角模型, $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}}$, $R^2 =$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{8}, R = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{8}}, \text{ 求出 } R.$$

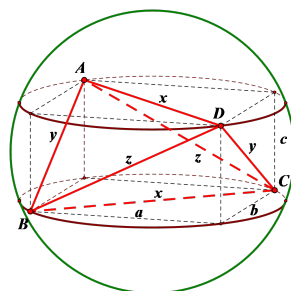


图2-1

题型三: 汉堡模型 (直棱柱的外接球、圆柱的外接球)

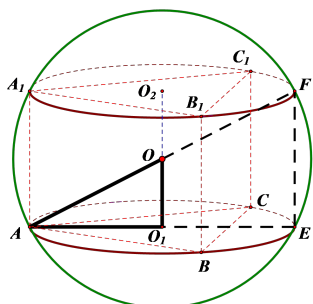


图3-1

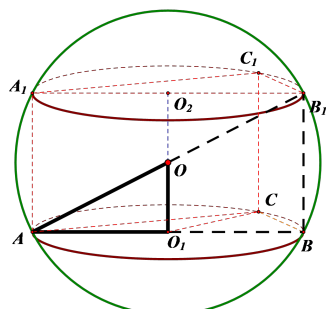


图3-2

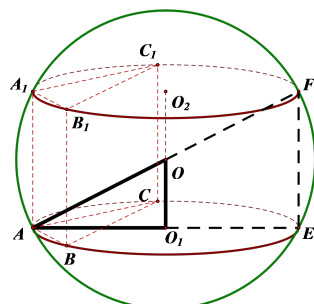


图3-3

题设:如图3-1,图3-2,图3-3,直三棱柱内接于球(同时直棱柱也内接于圆柱,棱柱的上下底面可以是任意三角形)

第一步:确定球心 O 的位置, O_1 是 $\triangle ABC$ 的外心,则 $OO_1 \perp$ 平面 ABC ;

第二步:算出小圆 O_1 的半径 $AO_1 = r$, $OO_1 = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}h$ ($AA_1 = h$ 也是圆柱的高);

第三步:勾股定理: $OA^2 = O_1A^2 + O_1O^2 \Rightarrow R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 \Rightarrow R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$, 解出 R



2. 锥体背景模型

题型一: 切瓜模型 (两个大小圆面互相垂直且交于小圆直径 - 正弦定理求大圆直径是通法)

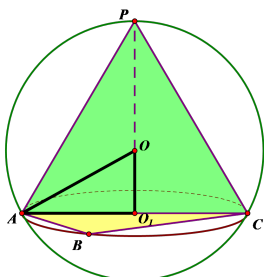


图4-1

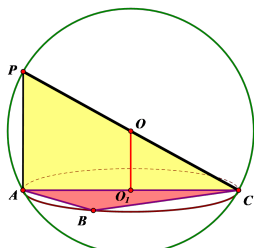


图4-2

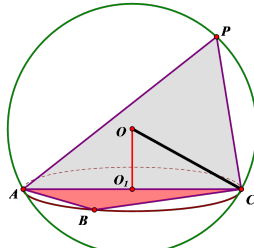


图4-3

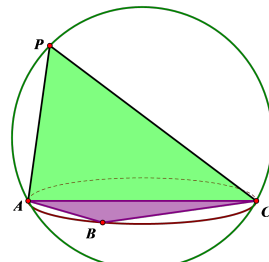


图4-4

1. 如图4-1,平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ,且 $AB \perp BC$ (即 AC 为小圆的直径),且 P 的射影是 $\triangle ABC$ 的外心 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱相等 $\Leftrightarrow$ 三棱 $P-ABC$ 的底面 $\triangle ABC$ 在圆锥的底上,顶点 P 点也是圆锥的顶点.

解题步骤:

第一步:确定球心 O 的位置,取 $\triangle ABC$ 的外心 O_1 ,则 P, O, O_1 三点共线;

第二步:先算出小圆 O_1 的半径 $AO_1 = r$,再算出棱锥的高 $PO_1 = h$ (也是圆锥的高);

第三步:勾股定理: $OA^2 = O_1A^2 + O_1O^2 \Rightarrow R^2 = (h - R)^2 + r^2$,解出 R ;

事实上, $\triangle ACP$ 的外接圆就是大圆,直接用正弦定理也可求解出 R .

2. 如图4-2,平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ,且 $AB \perp BC$ (即 AC 为小圆的直径),且 $PA \perp AC$,则

利用勾股定理求三棱锥的外接球半径:① $(2R)^2 = PA^2 + (2r)^2 \Leftrightarrow 2R = \sqrt{PA^2 + (2r)^2}$;

② $R^2 = r^2 + OO_1^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{r^2 + OO_1^2}$

3. 如图4-3,平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ,且 $AB \perp BC$ (即 AC 为小圆的直径)

$OC^2 = O_1C^2 + O_1O^2 \Leftrightarrow R^2 = r^2 + O_1O^2 \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{R^2 - O_1O^2}$

4. 题设:如图4-4,平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ,且 $AB \perp BC$ (即 AC 为小圆的直径)

第一步:易知球心 O 必是 $\triangle PAC$ 的外心,即 $\triangle PAC$ 的外接圆是大圆,先求出小圆的直径 $AC = 2r$;

第二步:在 $\triangle PAC$ 中,可根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,求出 R .

题型二：垂面模型（一条直线垂直于一个平面）



1. 题设：如图 5, $PA \perp$ 平面 ABC , 求外接球半径.

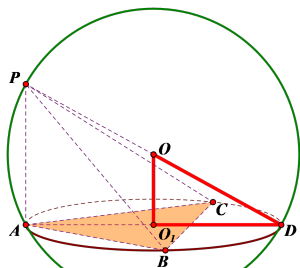


图5

解题步骤：

第一步：将 $\triangle ABC$ 画在小圆面上， A 为小圆直径的一个端点，作小圆的直径 AD ，连接 PD ，则 PD 必过球心 O ；

第二步： O_1 为 $\triangle ABC$ 的外心，所以 $OO_1 \perp$ 平面 ABC ，算出小圆 O_1 的半径 $O_1D = r$ (三角形的外接圆直径算法：利用正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$)， $OO_1 = \frac{1}{2}PA$ ；

第三步：利用勾股定理求三棱锥的外接球半径：① $(2R)^2 = PA^2 + (2r)^2 \Leftrightarrow 2R = \sqrt{PA^2 + (2r)^2}$ ；

② $R^2 = r^2 + OO_1^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{r^2 + OO_1^2}$.

2. 题设：如图 5-1 至 5-8 这七个图形， P 的射影是 $\triangle ABC$ 的外心 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱相等 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的底面 $\triangle ABC$ 在圆锥的底上，顶点 P 点也是圆锥的顶点.

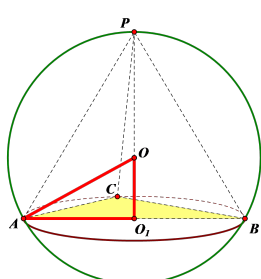


图5-1

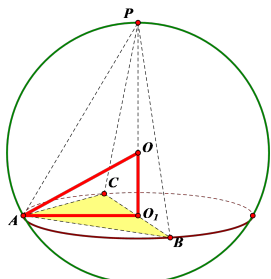


图5-2

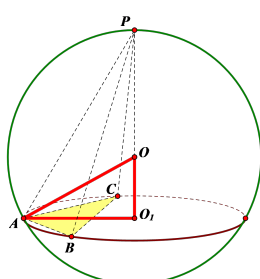


图5-3

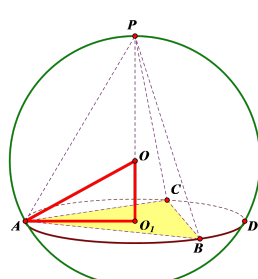


图5-4

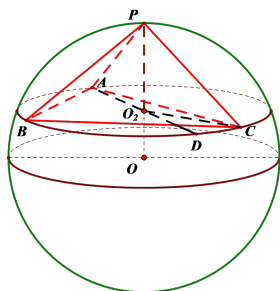


图5-6

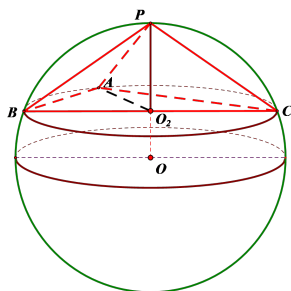


图5-7

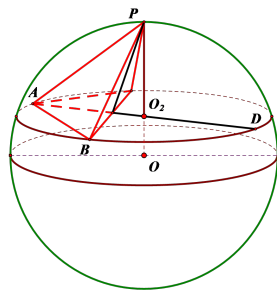


图5-8

解题步骤：

第一步：确定球心 O 的位置，取 $\triangle ABC$ 的外心 O_1 ，则 P, O, O_1 三点共线；

第二步：先算出小圆 O_1 的半径 $AO_1 = r$ ，再算出棱锥的高 $PO_1 = h$ (也是圆锥的高)；

第三步：勾股定理： $OA^2 = O_1A^2 + O_1O^2 \Rightarrow R^2 = (h - R)^2 + r^2$ ，解出 R

方法二：小圆直径参与构造大圆，用正弦定理求大圆直径得球的直径.



3. 二面角背景模型

题型一：折叠模型

题设：两个全等三角形或等腰三角形拼在一起，或菱形折叠（如图6）

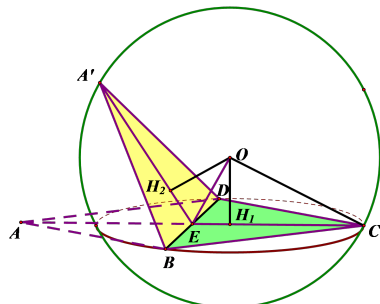


图6

第一步：先画出如图6所示的图形，将 $\triangle BCD$ 画在小圆上，找出 $\triangle BCD$ 和 $\triangle A'BD$ 的外心 H_1 和 H_2 ；

第二步：过 H_1 和 H_2 分别作平面 BCD 和平面 $A'BD$ 的垂线，两垂线的交点即为球心 O ，连接 OE, OC ；

第三步：解 $\triangle OEH_1$ ，算出 OH_1 ，在 $Rt\triangle OCH_1$ 中，勾股定理： $OH_1^2 + CH_1^2 = OC^2$

注：易知 O, H_1, E, H_2 四点共面且四点共圆，证略。

题型二：两直角三角形拼接在一起（斜边相同，也可看作矩形沿对角线折起所得三棱锥）模型

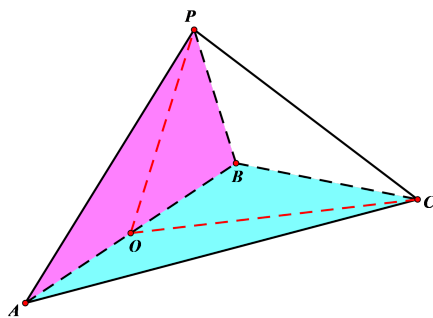


图7

题设：如图7， $\angle APB = \angle ACB = 90^\circ$ ，求三棱锥 $P-ABC$ 外接球半径（分析：取公共的斜边的中点 O ，连接 OP, OC ，则 $OA = OB = OC = OP = \frac{1}{2}AB$ ， $\therefore O$ 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球球心，然后在 OCP 中求出半径），当看作矩形沿对角线折起所得三棱锥时与折起成的二面角大小无关，只要不是平角球半径都为定值。



4. 多面体的内切球问题模型

题型一：锥体的内切球问题

1. 题设：如图8-1，三棱锥 $P-ABC$ 上正三棱锥，求其内切球的半径。

第一步：先现出内切球的截面图， E, H 分别是两个三角形的外心；

第二步：求 $DH = \frac{1}{3}BD$ ， $PO = PH - r$ ， PD 是侧面 $\triangle ABP$ 的高；

第三步：由 $\triangle POE$ 相似于 $\triangle PDH$ ，建立等式： $\frac{OE}{DH} = \frac{PO}{PD}$ ，解出 r

2. 题设：如图8-2，四棱锥 $P-ABCD$ 是正四棱锥，求其内切球的半径

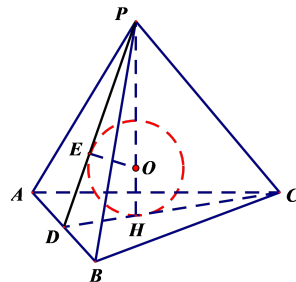


图8-1

第一步:先现出内切球的截面图, P, O, H 三点共线;

第二步:求 $FH = \frac{1}{2}BC$, $PO = PH - r$, PF 是侧面 $\triangle PCD$ 的高;

第三步:由 $\triangle POG$ 相似于 $\triangle PFH$, 建立等式: $\frac{OG}{HF} = \frac{PO}{PF}$, 解出

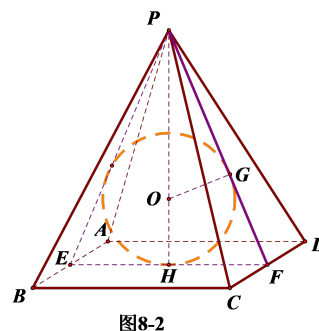


图8-2

3. 题设:三棱锥 $P-ABC$ 是任意三棱锥, 求其的内切球半径

方法:等体积法, 即内切球球心与四个面构成的四个三棱锥的体积之和相等

第一步:先画出四个表面的面积和整个锥体体积;

第二步:设内切球的半径为 r , 建立等式: $V_{P-ABC} = V_{O-ABC} + V_{O-PAB} + V_{O-PAC} + V_{O-PBC} \Rightarrow$

$$V_{P-ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot r + \frac{1}{3}S_{\triangle PAB} \cdot r + \frac{1}{3}S_{\triangle PAC} \cdot r + \frac{1}{3}S_{\triangle PBC} \cdot r = \frac{1}{3}(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PAC} + S_{\triangle PBC}) \cdot r$$

第三步:解出 $r = \frac{3V_{P-ABC}}{S_{O-ABC} + S_{O-PAB} + S_{O-PAC} + S_{O-PBC}}$