



高 2023 届

数学课程讲义

七分册 (学生用书)

(立体几何、空间向量及其应用)

巴蜀中学数学教研组

目 录

第十五章 立体几何	1
15.1 基本立体图形	1
15.1.1 空间几何体的结构	1
15.1.2 多面体	7
15.2 立体图形的直观图	10
15.3 空间几何体的表面积与体积	12
15.3.1 柱体、锥体、台体的表面积与体积	12
15.3.2 球的表面积与体积	15
15.4 空间点、直线、平面之间的位置关系	17
15.4.1 平面	17
15.4.2 空间点、直线、平面之间的位置关系	20
15.5 空间直线、平面的平行	24
15.5.1 直线与直线的平行	24
15.5.2 直线与平面平行	27
15.5.2.1 直线与平面平行的判定定理	27
15.5.2.2 直线与平面平行的性质定理	29
15.5.3 平面与平面平行	31
15.5.3.1 平面与平面平行的判定定理	31
15.5.3.2 平面与平面平行的性质定理	33
15.6 空间直线、平面的垂直	35
15.6.1 直线与直线垂直	35
15.6.2 直线与平面垂直	35
15.6.3 平面与平面垂直	38
15.7 专题研究	41
15.7.1 几何体的外接球和内切球	41
15.7.2 空间中的距离问题	44
第十六章 空间向量及其应用	46
16.1 空间向量及运算	46
16.2 空间向量的应用（一）——平行与垂直	50
16.3 空间向量的应用（二）——空间角（1）	53
16.4 空间向量的应用（三）——空间角（2）	56
16.5 空间向量的应用（四）——空间距离	60

第十五章 立体几何

15.1 基本立体图形

15.1.1 空间几何体的结构

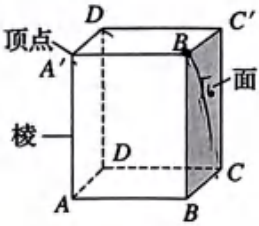
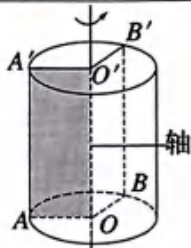
【学习目标】

- 1.通过对实物模型的观察，归纳认知棱柱、棱锥、棱台的结构特征。
- 2.理解棱柱、棱锥、棱台之间的关系。
- 3.能运用棱柱、棱锥、棱台的结构特征描述现实生活中简单几何体的结构和有关计算。

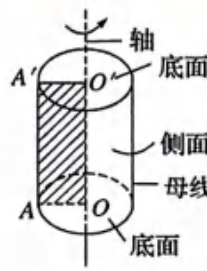
【要点整合】

1.空间几何体的定义、分类及相关概念

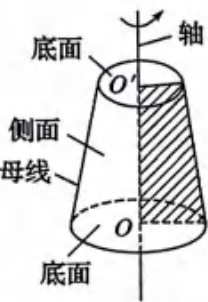
空间中的物体都占据着空间的一部分，若只考虑这些物体的形状和大小，而不考虑其他因素，那么由这些物体抽象出来的空间图形就叫作空间几何体。

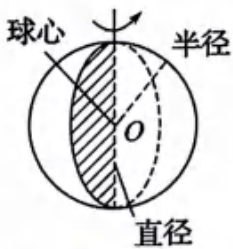
类别	多面体	旋转体
定义	由若干个 <u>平面多边形</u> 围成的几何体	由一个平面图形绕它所在平面内的一条 <u>定直线</u> 旋转所形成的封闭几何体
图形		
相关概念	面：围成多面体的各个 <u>多边形</u> 棱：相邻两个面的 <u>公共边</u> 顶点：棱与棱的公共点	轴：形成旋转体所绕的定直线

2.旋转体的结构特征

名称	定义	图形及表示	相关概念
圆柱	以 <u>矩形的一边</u> 所在直线为旋转轴，其余三边旋转形成的面所围成的旋转体叫做圆柱	 如图可记作：圆柱 $O'O$	圆柱的轴： <u>旋转轴</u> 圆柱的底面： <u>垂直于轴</u> 的边旋转而成的圆面 圆柱的侧面： <u>平行于轴</u> 的边旋转而成的曲面 圆柱的母线：无论旋转到什么位置， <u>不垂直于轴</u> 的边

名称	定义	图形及表示	相关概念
圆锥	以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成的面所围成的旋转体	 如图可记作：圆锥SO	圆锥的轴： <u>旋转轴</u> 圆锥的底面： <u>垂直于轴的边</u> 旋转而成的 <u>圆面</u> 圆锥的侧面： <u>直角三角形的斜边</u> 旋转而成的 <u>曲面</u> 圆锥的母线：无论旋转到什么位置， <u>不垂直于轴的边</u>

名称	定义	图形及表示	相关概念
圆台	用 <u>平行于圆锥底面</u> 的平面去截圆锥， <u>底面和截面</u> 之间的部分叫做圆台 旋转法定义：以直角梯形中 <u>垂直于底边的腰</u> 所在直线为旋转轴，将直角梯形绕旋转轴旋转一周而形成的旋转体叫做圆台	 如图可记作：圆台$O'O$	圆台的轴： <u>旋转轴</u> 圆台的底面： <u>垂直于轴的边</u> 旋转而成的 <u>圆面</u> 圆台的侧面： <u>不垂直于轴的边</u> 旋转一周而成的 <u>曲面</u> 圆台的母线：无论旋转到什么位置， <u>不垂直于轴的边</u>

名称	定义	图形及表示	相关概念
球	以半圆的直径所在直线为旋转轴， <u>半圆面</u> 旋转一周形成的旋转体叫做球体，简称球	 如图可记作：球O	球心：半圆的 <u>圆心</u> 半径：半圆的 <u>半径</u> 直径：半圆的 <u>直径</u>

3.多面体的结构特征

名称	定义	图形及表示	相关概念	分类
棱柱	有两个面互相平行，其余各面都是 <u>四边形</u> ，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的多面体叫做棱柱	如图可记作： 棱柱 $ABCDEF-A'B'C'D'E'F'$	底面：两个互相平行的面 侧面：其余各面 侧棱：相邻侧面的 <u>公共边</u> 顶点：侧面与底面的 <u>公共顶点</u>	按底面多边形的边数分： 三棱柱、四棱柱、.....

名称	定义	图形及表示	相关概念	分类
棱锥	有一个面是 <u>多边形</u> ，其余各面都是有一个公共顶点的 <u>三角形</u> ，由这些面所围成的多面体叫做棱锥	如图可记作： 棱锥 $S-ABCD$	底面： <u>多边形面</u> 侧面：有公共顶点的各个 <u>三角形面</u> 侧棱：相邻侧面的 <u>公共边</u> 顶点：各侧面的 <u>公共顶点</u>	按底面多边形的边数分： 三棱锥、四棱锥、.....

名称	定义	图形及表示	相关概念	分类
棱台	用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面与截面之间的部分叫做棱台	如图可记作： 棱台 $ABCD-A'B'C'D'$	上底面：平行于棱锥底面的 <u>截面</u> 下底面：原棱锥的 <u>底面</u> 侧面：其余各面 侧棱：相邻侧面的公共边 顶点：侧面与上(下)底面的公共顶点	由三棱锥、四棱锥、五棱锥.....截得的棱台分别叫做三棱台、四棱台、五棱台

棱柱、棱锥、棱台之间的关系：



4.简单组合体

(1)概念：由 简单几何体 组合而成的几何体叫做简单组合体。常见的简单组合体大多是由具有柱、锥、台、球等几何结构特征的物体组成的。

(2)基本形式：一种是由简单几何体 拼接 而成，另一种是由简单几何体 截去 或 挖去 一部分而成。

【典例讲练】

题型一 旋转体的结构特征

例1 判断下列各命题是否正确：

- (1)圆柱上底面圆上任一点与下底面圆上任一点的连线都是圆柱的母线；
- (2)一直角梯形绕下底所在直线旋转一周，所形成的曲面围成的几何体是圆台；
- (3)圆锥、圆台中经过轴的截面是轴截面，圆锥的轴截面是等腰三角形，圆台的旋转轴截面是等腰梯形；
- (4)到定点的距离等于定长的点的集合是球.

【练习1】下列叙述中正确的个数是()

- ①以直角三角形的一边为轴旋转所得的旋转体是圆锥；
- ②以直角梯形的一腰为轴旋转所得的旋转体是圆台；
- ③圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆，
- ④用一个平面去截圆锥，得到一个圆锥和一个圆台.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

题型二 多面体的结构特征

例2 下列说法正确的是()

- A. 有两个面平行，其余各面都是四边形的几何体叫棱柱
- B. 有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱
- C. 各侧面都是正方形的四棱柱一定是正方体
- D. 九棱柱有9条侧棱，9个侧面，侧面均为平行四边形

【练习2】下列命题中，正确的是()

- A. 棱柱中所有的侧棱都相交于一点
- B. 棱柱中互相平行的两个面叫做棱柱的底面
- C. 棱柱的侧面是平行四边形，而底面不是平行四边形
- D. 棱柱的侧棱相等，侧面是平行四边形

例3 下列关于棱锥、棱台的说法：

- ①棱台的侧面一定不会是平行四边形；②由四个平面围成的封闭图形只能是三棱锥；③棱锥被平面截成的两部分不可能都是棱锥. 其中正确说法的序号是_____.

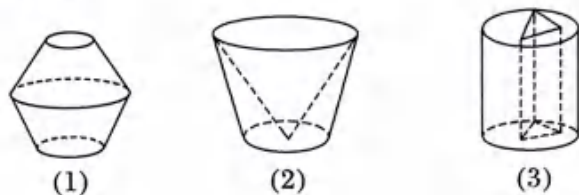
【练习 3】下列说法中，正确的是()

- ①棱锥的各个侧面都是三角形；
- ②有一个面是多边形，其余各面都是三角形，由这些面围成的几何体是棱锥；
- ③四面体的任何一个面都可以作为三棱锥的底面；
- ④棱锥的各侧棱长相等。

A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ②④

题型三 组合体的结构特征

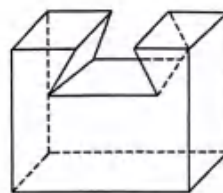
例 4 描述下列几何体的结构特征。



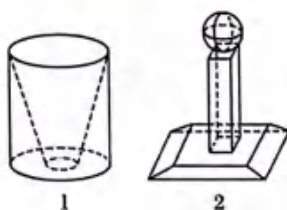
【练习 4】(1)右图中的组合体的结构特征有以下几种说法：

- ①由一个长方体割去一个四棱柱构成。
- ②由一个长方体与两个四棱柱组合而成。
- ③由一个长方体挖去一个四棱台构成。
- ④由一个长方体与两个四棱台组合而成。

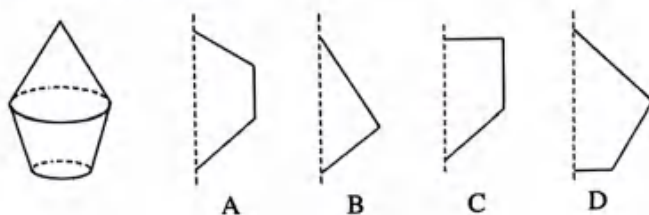
其中正确说法的序号是_____。



(2)观察下列几何体，分析它们是由哪些基本几何体组成的。



【练习 5】下图是由哪个平面图形旋转得到的()



题型四 旋转体中的计算问题

例 5 用一个平行于圆锥 SO 底面的平面截这个圆锥，截得圆台上、下底面的面积之比为 $1:16$ ，截去的圆锥的母线长是 3 cm ，求圆台的母线长.

【练习 6】圆台的两底面面积分别为 $1,49$ ，平行于底面的截面面积的 2 倍等于两底面面积之和，求圆台的高被截面分成的两部分的比.

15.1.2 多面体

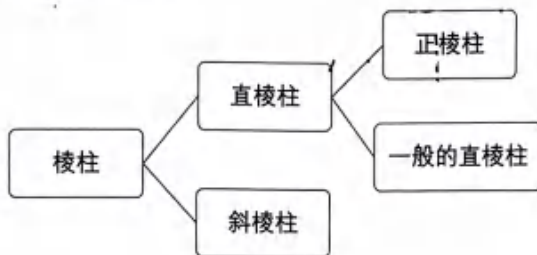
【学习目标】

- 1.了解棱柱、棱锥、棱台的分类，掌握正棱柱、正棱锥、正棱台的概念.
- 2.能够区分常见的四棱柱.
- 3.了解五个正多面体.

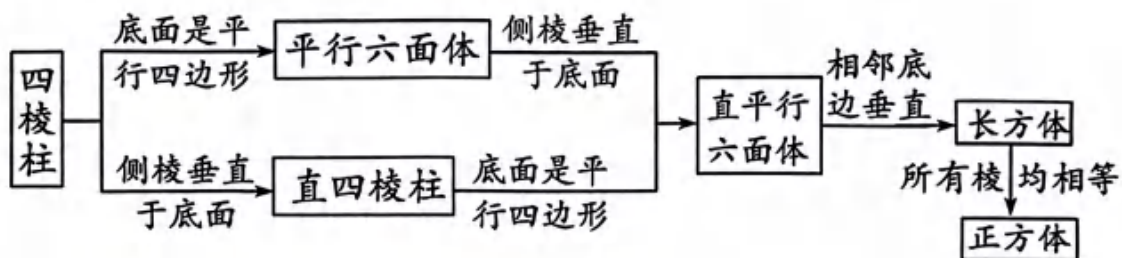
【要点整合】

1.各种棱柱之间的关系

(1)棱柱的分类



(2)常见的几种四棱柱之间的转化关系

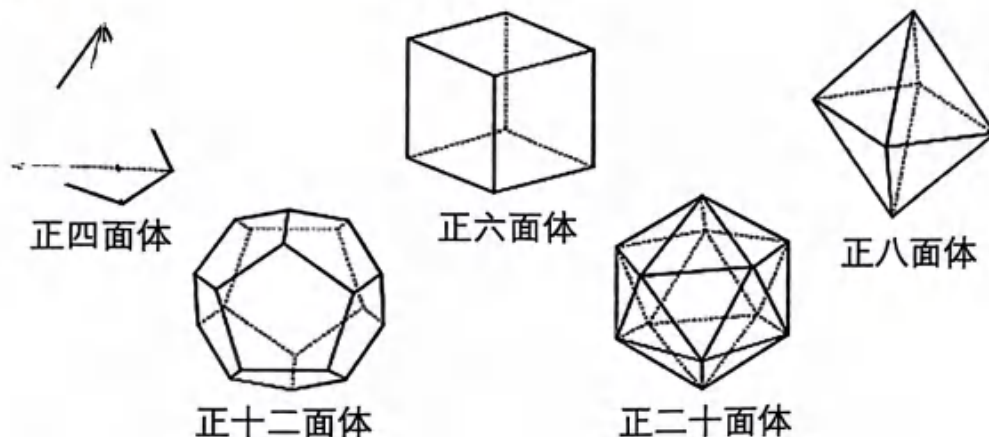


3.棱柱、棱锥、棱台在结构上既有区别又有联系，具体见下表：

名称		底面	侧面	侧棱	高	平行于底面的截面
棱柱	斜棱柱	平行且全等的两个多边形	平行四边形	平行且相等		与底面全等
	直棱柱	平行且全等的两个多边形	矩形	平行、相等且垂直于底面	等于侧棱	与底面全等
	正棱柱	平行且全等的两个正多边形	全等的矩形	平行、相等且垂直于底面	等于侧棱	与底面全等

棱锥	正棱锥	一个正多边形	全等的等腰三角形	有一个公共顶点且相等	过底面中心	与底面相似
	其他棱锥	一个多边形	三角形	有一个公共顶点		与底面相似
棱台	正棱台	平行且相似的两个正多边形	全等的等腰梯形	相等且延长后交于一点		与底面相似
	其他棱台	平行且相似的两个多边形	梯形	延长后交于一点		与底面相似

4.五个正多面体:



【典例讲练】

题型一 多面体的概念

例1 下列说法中正确的是()

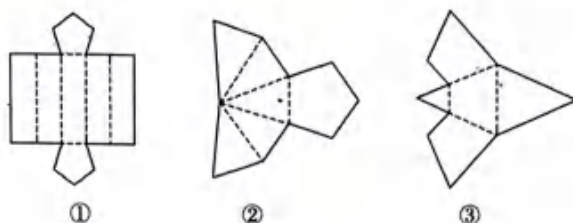
- A. 棱柱的面中，至少有两个面互相平行
- B. 棱柱中两个互相平行的平面一定是棱柱的底面
- C. 棱柱中一条侧棱就是棱柱的高
- D. 棱柱的侧面一定是平行四边形，但它的底面一定不是平行四边形

【练习1】下列说法错误的是()

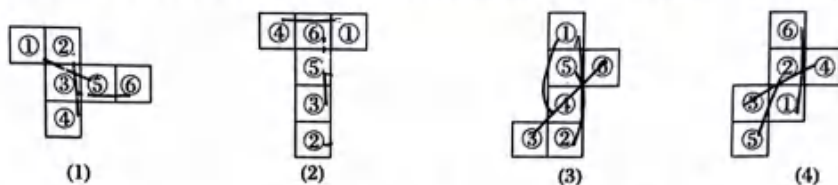
- A. 多面体至少有四个面
- B. 九棱柱有9条侧棱，9个侧面，侧面为平行四边形
- C. 长方体、正方体都是棱柱
- D. 三棱柱的侧面为三角形

题型二 多面体的平面展开图

例 2 如图是三个几何体的侧面展开图，请问各是什么几何体？



【练习 2】如图都是正方体的表面展开图，还原成正方体后，其中两个完全一样的的是()



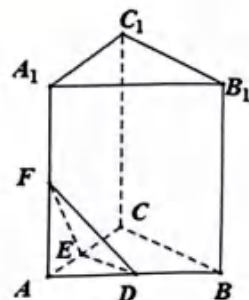
- A. (1)(2) B. (2)(3) C. (3)(4) D. (1)(4)

题型三 最短距离问题

例 3 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=4$ ， $BC=3$ ， $BB_1=5$ ，一只蚂蚁从点 A 出发沿表面爬行到点 C_1 ，求蚂蚁爬行的最短路线。

【练习 3】如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB=4$ ， $AA_1=4\sqrt{3}$ ， D 、 F 分别是棱 AB 、 AA_1 的中点， E 为棱 AC 上的动点，则 $\triangle DEF$ 的周长的最小值为()

- A. 10 B. $2\sqrt{7}+4$
C. $2\sqrt{7}+2\sqrt{3}+4$ D. $4\sqrt{3}+2$



15.2 立体图形的直观图

【学习目标】

1. 了解空间几何体的概念.
2. 了解“斜二测画法”的概念并掌握斜二测画法的步骤.
3. 会用斜二测画法画出一些简单平面图形和常见几何体的直观图.
4. 逆用斜二测画法, 找出直观图的原图.

【要点整合】

1. 直观图

立体几何中, 用来表示空间图形的斜二测画法, 习惯上称为空间图形的直观图, 为了使直观图具有立体感, 经常使用平面图形来作直观图.

2. 用斜二测画法作水平放置的平面图形的直观图的步骤

(1) 在平面图形上取互相垂直的 x 轴和 y 轴, 作出与之对应的 x' 轴和 y' 轴, 使得它们正方向的夹角为 45° (或 135°).

(2) 平面图形中与 x 轴平行(或重合)的线段画成与 x' 轴平行(或重合)的线段, 且长度不变.

平面图形中与 y 轴平行(或重合)的线段画成与 y' 轴平行(或重合)的线段, 且长度为原来长度的一半.

(3) 连接有关线段, 擦去作图过程中的辅助线.

3. 用斜二测画法作立体图形直观图的步骤

(1) 在立体图形中取水平平面, 在其中取互相垂直的 x 轴与 y 轴, 作出水平平面上图形的直观图(保留 x' 轴与 y' 轴).

(2) 在立体图形中, 过 x 轴与 y 轴的交点取 z 轴, 并使 z 轴垂直于 x 轴与 y 轴, 过 x' 轴与 y' 轴的交点作 z 轴对应的 z' 轴, 且 z' 轴垂直于 x' 轴.

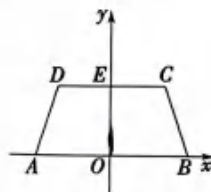
图形中与 z 轴平行(或重合)的线段画成与 z' 轴平行(或重合)的线段, 且长度不变, 连接有关线段.

(3) 擦去有关辅助线, 并把被面遮挡住的线段擦除(或改成虚线).

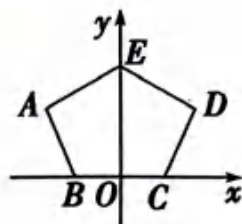
注意: 水平放置的圆, 其直观图一般用“正等测画法”画成椭圆.

【典例讲练】

例 1 (1) 用斜二测画法画出图中等腰梯形 $ABCD$ 的直观图(其中 O, E 分别为线段 AB, DC 的中点)



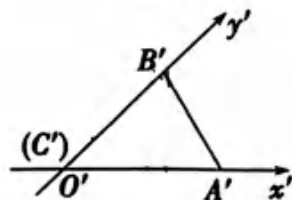
(2)若将本例中的等腰梯形 ABCD 改为正五边形 ABCDE，如图所示，那么其直观图如何画出？



【练习 1】如图， $\triangle A'B'C'$ 是水平放置的 $\triangle ABC$ 斜二测画法的直观图，

(1)能否判断 $\triangle ABC$ 的形状？

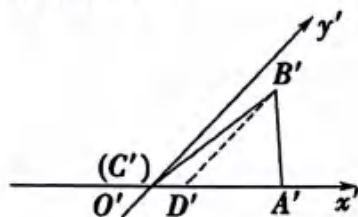
(2)若 $A'C'=6$ ， $B'C'=4$ ，则 AB 边的实际长度是多少？



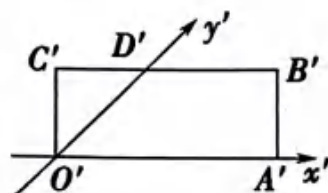
例 2 用斜二测画法画正六棱柱(底面是正六边形，侧棱垂直于底面)的直观图。

【练习 2】画出正四棱锥(底面是正方形 侧面是有一个公共顶点且全等的等腰三角形的棱锥)的直观图。

例 3 如图所示， $\triangle A'B'C'$ 是水平放置的平面图形的斜二测直观图，将其还原成平面图形。



【练习 3】如图所示，矩形 $O'A'B'C'$ 是水平放置的一个平面图形的直观图，其中 $O'A'=6$ cm， $C'D'=2$ cm，则原图形的形状是_____。



【课后巩固】_____完成课时作业 (144)

15.3 空间几何体的表面积与体积

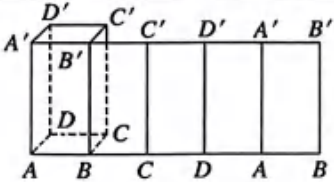
15.3.1 柱体、锥体、台体的表面积与体积

【学习目标】

- 1.了解柱体、锥体、台体的表面积与体积的计算公式.
- 2.理解并掌握侧面展开图与几何体的表面积之间的关系,并能利用计算公式求几何体的表面积与体积.

【要点整合】

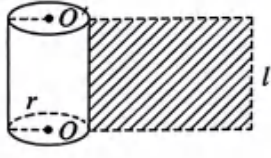
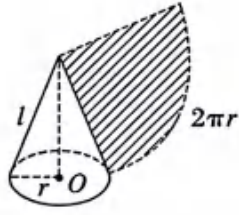
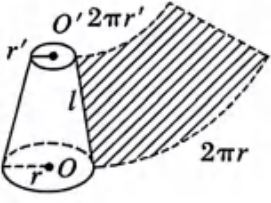
1.棱柱、棱锥、棱台的表面积

	图形	表面积
多面体		多面体的表面积就是各个面的面积的和,也就是 <u>展开图</u> 的面积

注:①将棱柱、棱锥、棱台的侧面展开,其侧面展开图分别是由若干个平行四边形、若干个三角形、若干个梯形组成的平面图形,侧面展开图的面积就是棱柱、棱锥、棱台的侧面积.

②棱柱、棱锥、棱台的表面积等于它们的侧面积与各自的底面积的和.

2.圆柱、圆锥、圆台的表面积

	图形	表面积公式
旋转体		底面积: $S_{\text{底}} = \pi r^2$ 侧面积: $S_{\text{侧}} = 2\pi r l$ 表面积: $S = 2\pi r(r + l)$ <u>r为底面半径, l为侧面母线长</u>
		底面积: $S_{\text{底}} = \pi r^2$ 侧面积: $S_{\text{侧}} = \pi r l$ 表面积: $S = \pi r(r + l)$ <u>r为底面半径, l为侧面母线长</u>
		上底面面积: $S_{\text{上底}} = \pi r'^2$ 下底面面积: $S_{\text{下底}} = \pi r^2$ 侧面积: $S_{\text{侧}} = \pi(r'l + rl)$ 表面积: $S = \pi(r'^2 + r^2 + r'l + rl)$ <u>r'为上底面半径, r为下底面半径, l为侧面母线长</u>

3.柱体、锥体与台体的体积公式

几何体	体积	说明
柱体	$V_{\text{柱体}} = Sh$	S 为柱体的底面积, h 为柱体的高
锥体	$V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3}Sh$	S 为锥体的底面积, h 为锥体的高
台体	$V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$	S', S 分别为台体的上、下底面面积, h 为台体的高

【典例讲练】

题型一 空间几何体的表面积与侧面积

例 1 现有一个底面是菱形的直四棱柱, 它的体对角线长为 9 和 15, 高是 5, 求该直四棱柱的侧面积.

例 2 圆台的母线长为 8 cm, 母线与底面成 60° 角, 轴截面的两条对角线互相垂直, 求圆台的表面积.

【练习 1】若正方体的棱长为 $\sqrt{2}$, 则以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的表面积为()

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

B. $2\sqrt{3}$

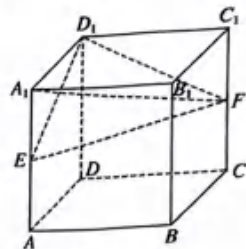
C. $\sqrt{3}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

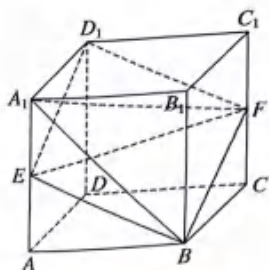
题型二 柱体、锥体、台体的体积

例 3 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB=3$, $BC=4$, $\angle ABC=90^\circ$, 把 $\triangle ABC$ 绕其斜边 AC 所在的直线旋转一周后, 所形成的几何体的体积是多少?

例 4(1)如图, 已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体, E 为 AA_1 的中点, F 为 CC_1 上一点, 求三棱锥 A_1-D_1EF 的体积.

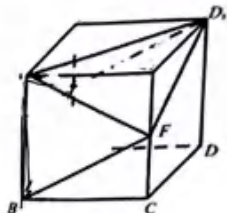


(2)例 4(1)中条件改为点 F 为 CC_1 的中点, 其他条件不变, 如图, 求四棱锥 A_1-EBFD_1 的体积.

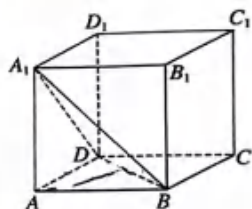


【练习 2】如图, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E, F 分别为棱 AA_1, CC_1 的中点, 则四棱锥

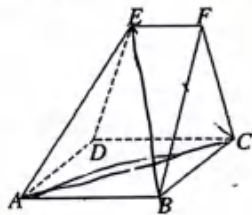
B_1-EBFD_1 的体积为_____.



【练习 3】如图, 在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 求点 A 到平面 A_1BD 的距离 d .



例 5 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知平面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, $EF \parallel AB$, $EF=2$, EF 上任意一点到平面 $ABCD$ 的距离均为 3, 求该多面体的体积.



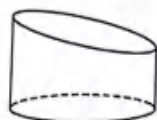
【练习 4】如图, 一个底面半径为 2 的圆柱被一平面所截, 截得的几何体的最短和最长母线长分别为 2 和 3, 则该几何体的体积为()

A. 5π

B. 6π

C. 20π

D. 10π



【课后巩固】_____完成课时作业 (145)

15.3.2 球的表面积与体积

【学习目标】

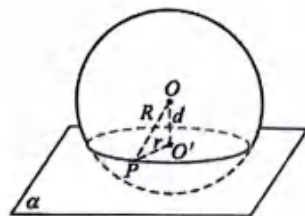
- 1.记准球的表面积和体积公式，会计算球的表面积和体积(重点).
- 2.能解决与球有关的组合体的计算问题(难点).

【要点整合】

- 1.球心到截面圆心距离公式: $d^2 = R^2 - r^2$
- 2.球的体积和表面积公式, 设球的半径为 R

(1)体积公式: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

(2)表面积公式: $S = 4\pi R^2$.



【典例讲练】

题型一 球的体积和表面积

例 1(1)已知球的表面积为 64π , 求它的体积;

(2)已知球的体积为 $\frac{500}{3}\pi$, 求它的表面积.

[解析](1)设球的半径为 R , 则 $4\pi R^2 = 64\pi$, 解得 $R = 4$, 所以球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256}{3}\pi$.

(2)设球的半径为 R , 则 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500}{3}\pi$, 解得 $R = 5$, 所以球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 5^2 = 100\pi$.

【练习 1】一个球的表面积是 16π , 则它的体积是()

- A. 64π B. $\frac{64\pi}{3}$ C. 32π D. $\frac{32\pi}{3}$

例 2(1)两个球的体积之比为 $8:27$, 那么这两个球的表面积之比为()

- A. $2:3$ B. $4:9$ C. $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ D. $\sqrt{8}:\sqrt{27}$

(2)两个半径为 1 的铁球, 熔化成一个大球, 则这个大球的半径为_____.

题型二 球的截面问题

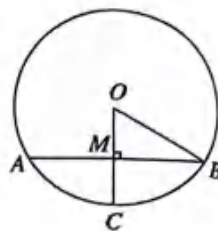
例3 如图,有一个水平放置的透明无盖的正方体容器,容器高8 cm,将一个球放在容器口,再向容器内注水,当球面恰好接触水面时测得水深为6 cm,若不计容器的厚度,则球的体积为()

A. $\frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$

B. $\frac{866\pi}{3} \text{ cm}^3$

C. $\frac{1\,372\pi}{3} \text{ cm}^3$

D. $\frac{2\,048\pi}{3} \text{ cm}^3$



例4 一个球内有相距9 cm的两个平行截面,它们的面积分别为 $49\pi \text{ cm}^2$ 和 $400\pi \text{ cm}^2$,求球的表面积.

【练习2】用一平面去截球所得截面的面积为 2π ,已知球心到该截面的距离为1,则该球的表面积为_____.

【课后巩固】_____完成课时作业(146)

15.4 空间点、直线、平面之间的位置关系

15.4.1 平面

【学习目标】

- 1.了解平面的概念及表示方法.
- 2.理解平面的基本事实 1、事实 2、事实 3 及三个推论.
- 3.会用符号语言准确表述几何对象的位置关系.

【要点整合】

知识点一 平面的概念

1.平面的特征：“平面”是平的，它无厚度，可以无限延展。

2.平面的表示：

(1)平面通常用希腊字母 α, β, γ 等表示，如平面 α 、平面 β 、平面 γ 等，

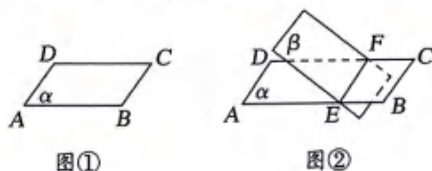
(2)平面也可以用代表平行四边形的四个顶点，或者相对的两个顶点的大写英文字母作为这个平面的名称，如平面 $ABCD$ 、平面 AC 、平面 BD ，

(3)平面还可以用平面内不共线的三点的字母表示，如平面 ABC 。

2.平面的画法

(1)水平放置的平面常画成一个平行四边形，锐角通常画成 45° ，且横边长等于其邻边长的 2 倍，如图①。

(2)如果一个平面被另一个平面遮挡住，为了增强它的立体感，把被遮挡部分用虚线画出来，如图②。



知识点二 点、线、面之间的关系

1. 直线在平面内的概念：

如果直线 l 上的所有点都在平面 α 内，就说直线 l 在平面 α 内，或者说平面 α 经过直线 l 。

2. 一些文字语言与数学符号的对应关系：

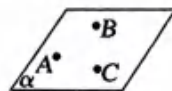
文字语言表达	数学符号	文字语言表达	数学符号表示
点 A 在直线 l 上	$A \in l$	点 A 在直线 l 外	$A \notin l$
点 A 在平面 α 内	$A \in \alpha$	点 A 在平面 α 外	$A \notin \alpha$
直线 l 在平面 α 内	$l \subset \alpha$	直线 l 在平面 α 外	$l \not\subset \alpha$
直线 l, m 相交于点 A	$l \cap m = A$	平面 α, β 相交于直线 l	$\alpha \cap \beta = l$

知识点三 平面的三个基本事实

1.基本事实 1：过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面。

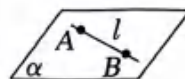
A, B, C 三点不共线 $\Rightarrow$ 存在惟一的平面 α ，使 $A, B, C \in \alpha$

作用：(1) 确定平面；(2) 证明点、线共面问题；(3) 判断两个平面重合



2.基本事实 2: 如果一条直线上的两点在一个平面内, 那么这条直线在此平面内.

$A \in l, B \in l$, 且 $A \in \alpha, B \in \alpha \Rightarrow l \subset \alpha$



作用: 判定直线和点是否在平面内

3.基本事实 3: 如果两个不重合的平面有一个公共点, 那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

$P \in \alpha$, 且 $P \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = l$, 且 $P \in l$

作用: (1) 判断两个平面相交; (2) 证明点共线问题; (3) 证明线共点问题



利用基本事实 1 和 2 得三个推论:

推论 1: 经过一条直线和直线外的一点, 有且只有一个平面.

推论 2: 经过两条相交直线, 有且只有一个平面.

推论 3: 经过两条平行直线, 有且只有一个平面.

【典例讲练】

题型一 三种语言的转换

例 1 用符号表示下列语句, 并画出图形.

(1) 直线 a 经过平面 α 内一点 A , α 外一点 B ;

(2) 直线 a 在平面 α 内, 也在面 β 内.

【练习 1】(1) 若点 M 在直线 a 上, a 在平面 α 内, 则 M, a, α 之间的关系可记为()

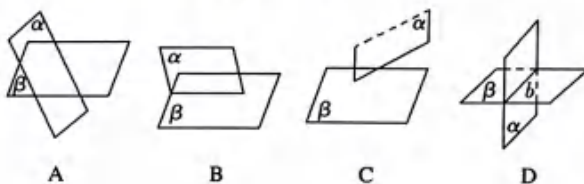
A. $M \in a, a \in \alpha$

B. $M \in a, a \subset \alpha$

C. $M \subset a, a \subset \alpha$

D. $M \subset a, a \in \alpha$

(2) 如图表示两个相交平面, 其中画法正确的是()



题型二 确定平面个数问题 (事实 1 及三个推论)

例 2 空间四点可以确定几个平面? 并画出图形.

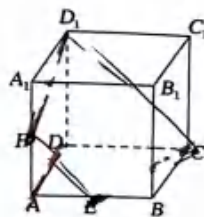
【练习 2】(1)3 条直线相交于 1 点，最多能确定_____个平面；
3 条直线相交于 3 点，最多能确定_____个平面.

(2)空间有五个点，其中有四个点在同一平面内，但没有任何三点共线，这样的五个点确定平面的个数最多可以是_____.

题型三 点共线、线共点、面共线问题

例 3 已知 $\triangle ABC$ 在平面 α 外，它的三边所在的直线分别交面 α 于 P, Q, R ，求证： P, Q, R 在同一条直线上.

【练习 3】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别是 AB 和 AA_1 的中点.
求证：(1) E, C, D_1, F 四点共面；
(2) CE, D_1F, DA 三线共点.



【课后巩固】—— 完成课时作业 (147)

15.4.2 空间点、直线、平面之间的位置关系

【学习目标】

1. 会判断空间两直线的位置关系.
2. 会判断空间直线与平面的位置关系.
3. 会判断空间两平面的位置关系.

【要点整合】

知识点一 空间两直线的位置关系

1. 空间两条直线的三种位置关系

①从是否有公共点的角度来分: $\begin{cases} \text{没有公共点} \begin{cases} \text{平行} \\ \text{异面} \end{cases} \\ \text{有且仅有一个公共点} \longrightarrow \text{相交} \end{cases}$

②从是否共面的角度来分: $\begin{cases} \text{在同一平面内} \begin{cases} \text{平行} \\ \text{相交} \end{cases} \\ \text{不在任何一个平面内} \longrightarrow \text{异面} \end{cases}$

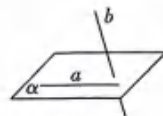


图 (1)

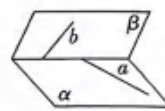


图 (2)

2. 异面直线: 不同在任何一个平面内的两条直线.

(1) 异面直线的画法(衬托平面法)

如图(1)(2)所示, 为了表示异面直线不共面的特点, 作图时, 通常用一个或两个平面来衬托.

(2) 判断两直线为异面直线的方法: ①定义法; ②反证法 (两直线既不平行也不相交); ③判定定理法

知识点二 直线与平面的位置关系

1. 直线与平面的位置关系

位置关系	定义	图形语言	符号语言
直线在平面内	<u>有无数个公共点</u>		$a \subset \alpha$
直线与平面相交	<u>有且只有一个公共点</u>		$a \cap \alpha = A$
直线与平面平行	<u>没有公共点</u>		$a // \alpha$

2. 直线与平面的位置关系的分类

(1) 按公共点个数分类

$\begin{cases} \text{有公共点} \begin{cases} \text{直线和平面相交} \longrightarrow \text{有且只有一个公共点} \\ \text{直线在平面内} \longrightarrow \text{有无数个公共点} \end{cases} \\ \text{无公共点} \longrightarrow \text{直线和平面平行} \end{cases}$

(2)按直线是否在平面内分类

$\begin{cases} \text{直线在平面内} \text{——所有点在平面内} \\ \text{直线在平面外} \begin{cases} \text{直线与平面相交} \\ \text{直线与平面平行} \end{cases} \end{cases}$

知识点三 两个平面的位置关系

位置关系	图形表示	符号表示	公共点
平面 α 与平面 β 平行		$\alpha // \beta$	没有公共点
平面 α 与平面 β 相交		$\alpha \cap \beta = l$	有一条公共直线

【典例讲练】

题型一 空间两直线位置关系的判定

例 1(1)若 a 和 b 是异面直线, b 和 c 是异面直线, 则 a 和 c 的位置关系是()

- A. 平行 B. 异面 C. 相交 D. 平行、相交或异面

(2) 若直线 $a \perp$ 直线 b , 直线 $c // a$, 则 c 与 b 关系是()

- A. 相交或异面 B. 相交或平行 C. 平行或异面 D. 相交、平行或异面

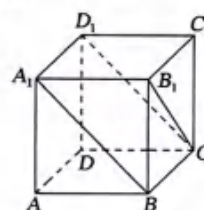
【练习 1】如图所示, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 判断下列直线的位置关系:

(1)直线 A_1B 与直线 D_1C 的位置关系是_____;

(2)直线 A_1B 与直线 B_1C 的位置关系是_____;

(3)直线 D_1D 与直线 D_1C 的位置关系是_____;

(4)直线 AB 与直线 B_1C 的位置关系是_____.



题型二 直线和平面的位置关系

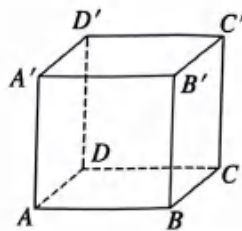
例 2(1)若直线上有一点在平面外, 则下列结论正确的是()

- A. 直线上所有的点都在平面外 B. 直线上有无数多个点都在平面外
 C. 直线上有无数多个点都在平面内 D. 直线上至少有一个点在平面内

(2)下列四个命题中正确命题的个数是()

- ①如果 a, b 是两条直线, $a \parallel b$, 那么 a 平行于经过 b 的任何一个平面;
- ②如果直线 a 和平面 α 满足 $a \parallel \alpha$, 那么 a 与平面 α 内的任何一条直线平行;
- ③如果直线 a, b 和平面 α 满足 $a \parallel b, a \parallel \alpha, b \not\subset \alpha$, 那么 $b \parallel \alpha$;
- ④如果 a 与平面 α 上的无数条直线平行, 那么直线 a 必平行于平面 α .

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3



【练习 2】(1)若直线 a 不平行于平面 α , 则下列结论成立的是()

- A. α 内的所有直线都与直线 a 异面
- B. α 内不存在与 a 平行的直线
- C. α 内的直线都与 a 相交
- D. 直线 a 与平面 α 有公共点

(2)下列说法中, 正确的有()

- ①如果一条直线与一个平面平行, 那么这条直线与平面内的任意一条直线平行;
- ②如果一条直线与一个平面相交, 那么这条直线与平面内无数条直线垂直;
- ③过平面外一点有且只有一条直线与已知平面平行;
- ④一条直线上有两点到平面的距离相等, 则这条直线平行于这个平面.

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

(3)下列命题中, 正确的命题是()

- A. 若直线 a 上有无数个点不在平面 α 内, 则 $a \parallel \alpha$
- B. 若 $a \parallel \alpha, b \subset \alpha$, 则 $a \parallel b$
- C. 若 $a \subset \alpha$, 则 a 与 α 有无数个公共点
- D. 若 $a \not\subset \alpha$, 则 a 与 α 没有公共点

题型三 平面与平面的位置关系

例 3 以下四个命题中, 正确的命题有()

- ①在平面 α 内有两条直线和平面 β 平行, 那么这两个平面平行;
- ②在平面 α 内有无数条直线和平面 β 平行, 那么这两个平面平行;
- ③平面 α 内 $\triangle ABC$ 的三个顶点在平面 β 的同一侧且到平面 β 的距离相等且不为 0, 那么这两个平面平行;
- ④平面 α 内两条相交直线和平面 β 内两条相交直线分别平行, 那么这两个平面平行.

A. ③④ B. ②③④ C. ②④ D. ①④

【练习 3】(1)如果在两个平面内分别有一条直线, 这两条直线互相平行, 那么这两个平面的位置关系一定是()

A. 平行 B. 相交 C. 平行或相交 D. 垂直

- (2)已知两平面 α, β 平行, 且 $a \subset \alpha$, 下列四个命题: ① a 与 β 内的所有直线平行; ② a 与 β 内无数条直线平行; ③直线 a 与 β 内任何一条直线都不垂直; ④ a 与 β 无公共点. 其中正确命题的个数是()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

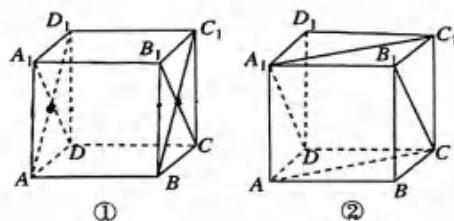
例 4 (1)画出两平行平面; (2)画出两相交平面.

【练习 4】(1)画出一个平面与两个平行平面相交; (2)画出相交于一点的三个平面.

题型四 画平面交线

例 5 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中

- (1)如图①作出平面 ABC_1D_1 与平面 A_1B_1CD 的交线;
 (2)如图②作出平面 A_1C_1CA 与平面 A_1DCB_1 的交线.



【练习 5】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 CC_1 和 AA_1 的中点, 画出平面 BED_1F 与平面 $ABCD$ 的交线并说明理由.

【课后巩固】—————完成课时作业 (148)

15.5 空间直线、平面的平行

15.5.1 直线与直线的平行

【学习目标】

- 1.能用事实 4 解决一些简单的相关问题.
- 2.会求两异面直线所成的角.

【要点整合】

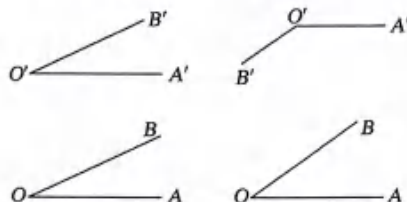
知识点一 基本事实 4

事实 4: 平行于同一条直线的两条直线互相平行

符号语言: 直线 a, b, c , $a \parallel b, b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$

知识点二 空间等角定理

1.等角定理: 空间中如果两个角的两边分别对应平行, 那么这两个角相等或互补



2.推论: 若两条相交直线与另两条相交直线分别平行, 则这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

知识点三 异面直线所成的角

1.定义: 已知两条异面直线 a, b , 经过空间任一点 O 作直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$, 我们把 a' 与 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 与 b 所成的角(或夹角).

2.异面垂直: 如果两条异面直线 a, b 所成的角是直角, 那么这两条直线互相垂直, 记作 $a \perp b$.

3.异面直线所成角的范围是 $(0^\circ, 90^\circ]$

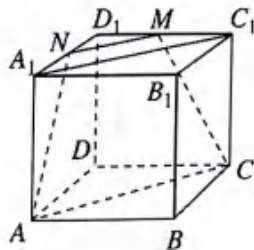
4.求异面直线所成角的步骤: ①作; ②证; ③求; ④答.

【典例讲练】

题型一 事实 4 的运用

例 1 (1)已知棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别为 C_1D_1, D_1A_1 的中点.

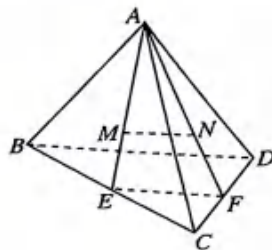
求证: 四边形 $MNAC$ 是梯形.



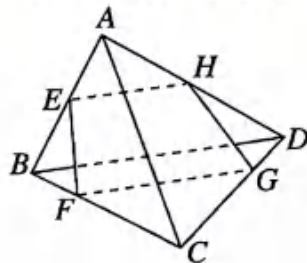
(2)如图, A 是 $\triangle BCD$ 所在平面外一点, M 、 N 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的重心, 已知 $BD=6$.

①判断 MN 与 BD 位置关系;

②求 MN 的长.

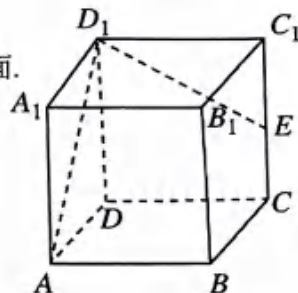


【练习 1】(1)已知四边形 $ABCD$ 是空间四边形, E 、 H 分别是线段 AB 、 AD 的中点, F 、 G 分别是线段 CB 、 CD 上的点且 $\frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3}$. 求证: EF 、 GH 、 CA 交于一点.



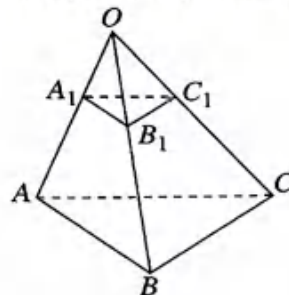
(2)在正方体 AC_1 中, E 是 CC_1 的中点, 画出平面 AED_1 与正方体各面的交线.

画法如下: ①取 BC 中点 F ; ②连接 EF 、连接 AF . 求证: A 、 D_1 、 E 、 F 四点共面.

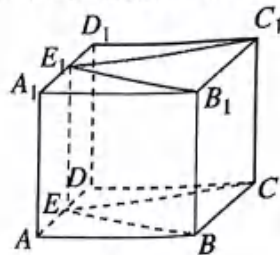


题型二 等角定理的应用

例 2 如图, 不共面的三条直线 a 、 b 、 c 交于点 O , 在点 O 的同侧分别取点 A 和 A_1 、 B 和 B_1 、 C 和 C_1 , 使得 $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB}$, $\frac{OC_1}{OC} = \frac{OA_1}{OA}$. 求证: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

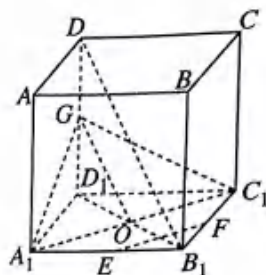


【练习 2】已知 E 、 E_1 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AD 、 A_1D_1 的中点，求证： $\angle BEC = \angle B_1E_1C_1$ 。

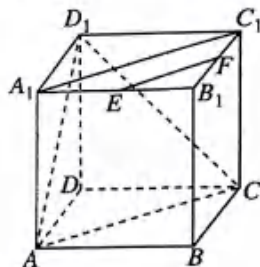


题型三 异面直线所成的角

例 3 如图，正方体 AC_1 中， E 、 F 分别是 A_1B_1 、 B_1C_1 的中点，求异面直线 DB_1 与 EF 所成角的大小。



【练习 3】如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 、 F 分别是棱 A_1B_1 、 B_1C_1 的中点，求 EF 与 AD_1 所成角的大小。



15.5.2 直线与平面平行

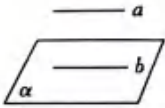
15.5.2.1 直线与平面平行的判定定理

【学习目标】

- 1、理解直线与平面平行判定定理的含义.
- 2、会用图形语言、文字语言、符号语言准确描述直线与平面平行的判定定理, 并知道其地位和作用.
- 3、能运用直线与平面平行的判定定理证明一些空间线面关系的简单问题.

【要点整合】

知识点 直线与平面平行的判定定理

语言叙述	符号表示	图形表示
平面外一条直线与此平面内的一条直线平行, 则该直线与此平面平行	$\left. \begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a // b \end{array} \right\} \Rightarrow a // \alpha$	

【典例讲练】

题型一 线面平行的理解

例 1 给出以下四个命题:

- ①如果一条直线和一个平面平行, 那么这条直线和平面内的任意一条直线平行;
- ②过平面外一点有且只有一条直线与平面平行;
- ③如果一条直线上有两点到平面内的距离相等, 那么这条直线平行于该平面;
- ④如果两条平行线中有一条平行于这个平面, 那么另外一条直线也平行于该平面.

其中真命题的个数是()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

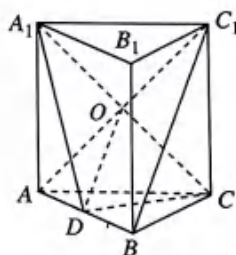
【练习 1】下列说法正确的是()

- A. 若直线 l 平行于平面 α 内的无数条直线, 则 $l // \alpha$
 B. 若直线 a 在平面 α 外, 则 $a // \alpha$
 C. 若直线 $a \cap b = \emptyset$, 直线 $b \subset \alpha$, 则 $a // \alpha$
 D. 若直线 $a // b$, $b \subset \alpha$, 那么直线 a 就平行于平面 α 内的无数条直线

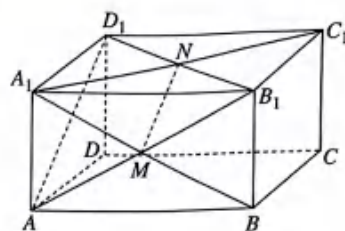
题型二 直线与平面平行的证明

角度一 中位线法证线面平行

例 2 如图所示, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 点 D 是 AB 的中点, 求证: $BC_1 //$ 平面 CA_1D .

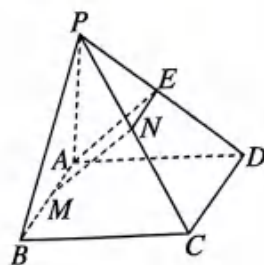


【练习 2】已知 M 、 N 分别是长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的面 ABB_1A_1 ，面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心；
求证： $MN \parallel$ 面 AA_1D_1D 。

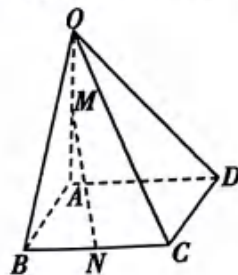


角度二 构造平行四边形证明线面平行

例 3 如图所示，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为矩形， M 、 N 分别是 AB 、 PC 的中点。求证： $MN \parallel$ 平面 PAD 。

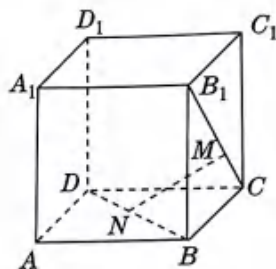


【练习 3】如图，在四棱锥 $O-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形， M 为 OA 的中点， N 为 BC 的中点。证明：直线 $MN \parallel$ 平面 OCD 。

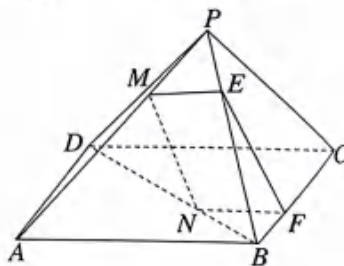


角度三 利用平行线分线段成比例证线面平行

例 4 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 N 在 BD 上，点 M 在 B_1C 上，且 $CM=DN$ ，求证： $MN \parallel$ 平面 AA_1B_1B 。



【练习 4】正四棱锥 $P-ABCD$ 的各条棱长都是 13， M 、 N 分别是 PA 和 BD 上的点，且 $PM:MA=BN:ND=5:8$ 。求证： $MN \parallel$ 平面 PBC 。



【课后巩固】_____完成课时作业（150）

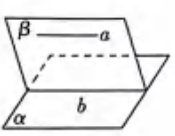
15.5.2.2 直线与平面平行的性质定理

【学习目标】

- 1、能应用文字语言、符号语言、图形语言准确描述直线与平面平行的性质定理.
- 2、能用性质定理, 证明一些空间线面平行关系的简单问题.

【要点整合】

知识点 直线与平面平行的性质定理

语言叙述	符号表示	图形表示
一条直线与一个平面平行, 则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行	$\left. \begin{array}{l} a // \alpha \\ a \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$	

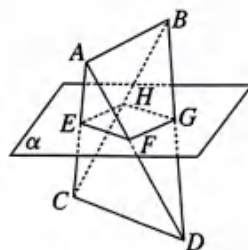
【典例讲练】

题型一 证明线线平行

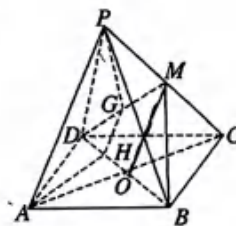
例 1 如图, 已知 AB 与 CD 是异面直线, 且 $AB // \text{平面 } \alpha$, $CD // \text{平面 } \alpha$, $AC \cap \alpha = E$, $AD \cap \alpha = F$, $BD \cap \alpha = G$, $BC \cap \alpha = H$.

(1) 求证: 四边形 $EFGH$ 是平行四边形;

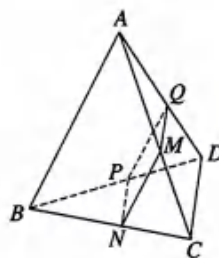
(2) 求证: $\frac{AE}{EC} = \frac{BG}{GD}$.



例 2 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, AC 与 BD 交于点 O , M 是 PC 的中点, 在 DM 上取一点 G , 过 G 和 AP 作平面交平面 BDM 于 GH , 求证: $AP // GH$.



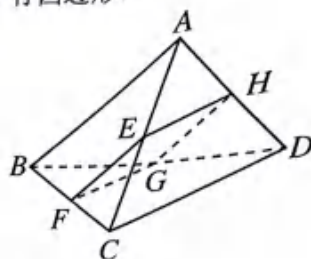
【练习 1】如图, 用平行于四面体 $ABCD$ 的一组对棱 AB, CD 的平面截此四面体; 求证: 截面 $MNPQ$ 是平行四边形.



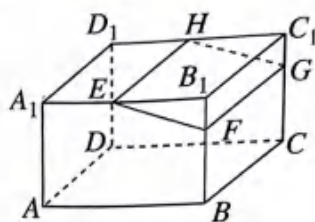
题型二 证明线面平行

例 3 如图所示, 四边形 EFGH 为空间四边形 ABCD 的一个截面, 若截面为平行四边形.

求证: $AB \parallel \text{平面 EFGH}$, $CD \parallel \text{平面 EFGH}$.



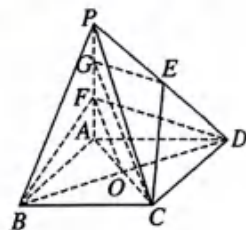
【练习 2】如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, H 分别为棱 A_1B_1 , D_1C_1 上的点, 且 $EH \parallel A_1D_1$, 过 EH 的平面与棱 BB_1 , CC_1 相交, 交点分别为 F, G, 求证: $FG \parallel \text{平面 } ADD_1A_1$.



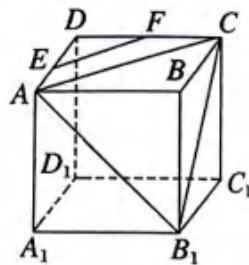
题型三 与线面平行性质定理有关的计算

例 4 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, 且 $PA=3$, 点 F 在棱 PA 上, 且 $AF=1$,

点 E 在棱 PD 上; 过点 E 作 $EG \parallel FD$ 交 AP 于点 G, 连接 CG; 若 $CG \parallel \text{平面 } BDF$, 求 $PE:ED$ 的值.



【练习 3】如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, 点 E 为 AD 的中点, 点 F 在 CD 上, 若 $EF \parallel \text{平面 } AB_1C$, 求线段 FE 的长度.



【课后巩固】_____ 完成课时作业 (151)

15.5.3 平面与平面平行

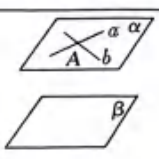
15.5.3.1 平面与平面平行的判定定理

【学习目标】

- 1、理解平面与平面平行判定定理的含义.
- 2、会用图形语言、文字语言、符号语言准确描述平面与平面平行的判定定理, 并知道其地位和作用.
- 3、能运用平面与平面平行的判定定理证明一些空间线面关系的简单问题.

【要点整合】

知识点 平面与平面平行的判定定理

语言叙述	符号表示	图形表示
一个平面内的 <u>两条相交直线</u> 与另一个平面平行, 则这两个平面平行	$\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha, b \subset \alpha \\ a \cap b = A \\ a // \beta, b // \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta$	

【典例讲练】

题型一 面面平行判定定理的理解

例 1 下列命题中正确的是()

- ①若一个平面内有两条直线都与另一个平面平行, 则这两个平面平行;
- ②若一个平面内有无数条直线都与另一个平面平行, 则这两个平面平行;
- ③若一个平面内任何一条直线都平行于另一个平面, 则这两个平面平行;
- ④若一个平面内的两条相交直线分别平行于另一个平面, 则这两个平面平行.

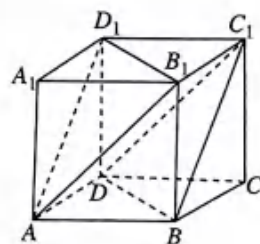
A. ①③ B. ②④ C. ②③④ D. ③④

【练习 1】已知直线 l, m , 平面 α, β , 下列命题正确的是()

- $l // \beta, l \subset \alpha \Rightarrow \alpha // \beta$
- $l // \beta, m // \beta, l \subset \alpha, m \subset \alpha \Rightarrow \alpha // \beta$
- $l // m, l \subset \alpha, m \subset \beta \Rightarrow \alpha // \beta$
- $l // \beta, m // \beta, l \subset \alpha, m \subset \alpha, l \cap m = M \Rightarrow \alpha // \beta$

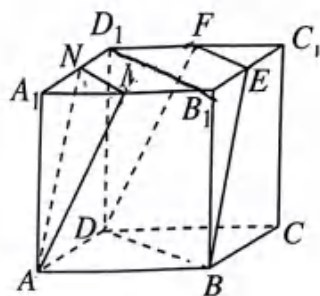
题型二 面面平行的证明

例 2. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 如图, 求证: 平面 $AB_1D_1 //$ 平面 BDC_1 .

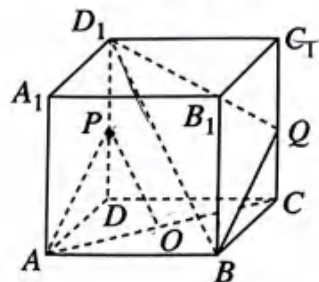


【练习 2】如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， M 、 N 、 E 、 F 分别是棱 A_1B_1 、 A_1D_1 、 B_1C_1 、 C_1D_1 的中点。

求证：平面 $AMN \parallel$ 平面 $EFDB$ 。



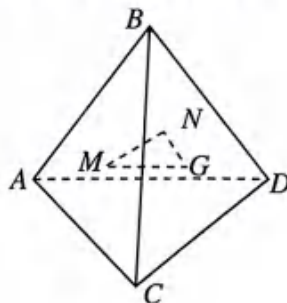
例 3 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， O 为底面 $ABCD$ 的中心， P 是 DD_1 的中点，设 Q 是 CC_1 上的点，问：当点 Q 在什么位置时，平面 $D_1BQ \parallel$ 平面 PAO 。



【练习 3】如图所示， B 为 $\triangle ACD$ 所在平面外一点， M 、 N 、 G 分别为 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle BCD$ 的重心。

(1) 求证：平面 $MNG \parallel$ 平面 ACD ；

(2) 求 $S_{\triangle MNG} : S_{\triangle ADC}$ 。



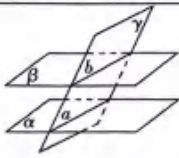
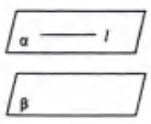
15.5.3.2 平面与平面平行的性质定理

【学习目标】

- 1、掌握平面与平面平行的性质，并会应用性质解决问题。
- 2、知道直线与直线、直线与平面、平面与平面之间的平行关系可以相互转化。

【要点整合】

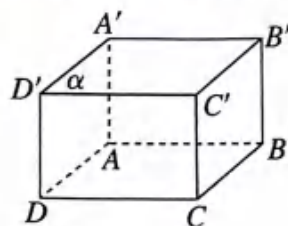
知识点 平面与平面平行的性质定理

语言叙述	符号表示	图形表示
如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线 <u>平行</u>	$\left. \begin{array}{l} \alpha // \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$	
如果两个平面平行，那么一个平面内的任意一条直线都平行于另外一个平面	$\left. \begin{array}{l} \alpha // \beta \\ l \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow l // \beta$	

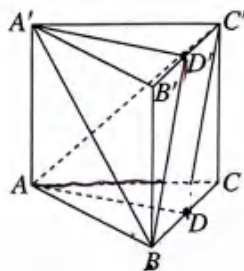
【典例讲练】

题型一 证明线线平行

例 1 如图，平面四边形 ABCD 的四个顶点 A、B、C、D 均在平行四边形 A'B'C'D' 所确定的一个平面 α 外，且 AA'、BB'、CC'、DD' 互相平行。求证：四边形 ABCD 是平行四边形。

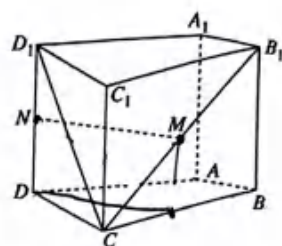


【练习 1】如图所示，已知三棱柱 ABC-A'B'C' 中，D 是 BC 的中点，D' 是 B'C' 的中点，设平面 A'D'B 与平面 ABC = a，平面 ADC' 与平面 A'B'C' = b，判断直线 a，b 的位置关系，并证明。



题型二 证明线面平行

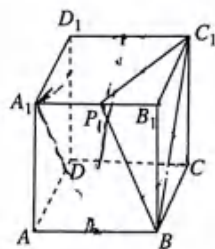
例 2 如图, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M 和 N 分别为 B_1C 和 D_1D 的中点. 求证: $MN \parallel$ 平面 $ABCD$.



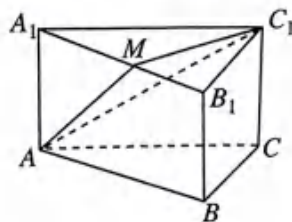
【练习 2】已知 AB , CD 为夹在两个平行平面 α , β 之间的线段, M , N 分别为 AB , CD 的中点. 求证: $MN \parallel$ 平面 α .

题型三 截面问题

例 3 如图所示, 在棱长为 2 cm 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, A_1B_1 的中点是 P , 问过点 A_1 作与截面 PBC_1 平行的截面也是三角形吗? 并求该截面的面积.



【练习 3】把一正方体沿对角面劈开, 得一如图几何体, 其中 $B_1C_1=A_1C_1=2$, M 为 A_1B_1 的中点, 试作出过 B_1 且与平面 AMC_1 平行的截面, 并计算该截面面积.



15.6 空间直线、平面的垂直

15.6.1 直线与直线垂直

15.6.2 直线与平面垂直

【学习目标】

- 1.掌握直线与平面垂直的定义.
- 2.掌握直线与平面垂直的判定定理.
- 3.理解直线与平面所成的角的概念,并能解决简单的线面角问题.

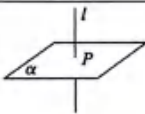
【要点整合】

知识点一 直线与直线垂直

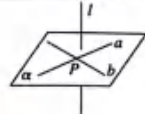
如果两条异面直线 a 、 b 所成的角是直角,那么我们就说这两条异面直线互相垂直.记作: $a \perp b$

空间两条直线所成角的范围是 $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$

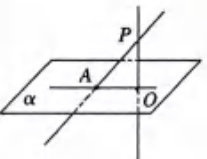
知识点二 直线与平面垂直的定义

定义	如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直,我们就说直线 l 与平面 α 互相垂直
记法	$l \perp \alpha$
有关概念	直线 l 叫做平面 α 的 <u>垂线</u> ,平面 α 叫做直线 l 的 <u>垂面</u> ,它们唯一的公共点 P 叫做 <u>垂足</u>
图示	
画法	画直线与平面垂直时,通常把直线画成与表示平面的平行四边形的一边垂直

知识点三 直线和平面垂直的判定定理

文字语言	一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直,则该直线与此平面垂直
符号语言	$l \perp a, l \perp b, a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \cap b = P \Rightarrow l \perp \alpha$
图形语言	

知识点四 直线与平面所成的角

	有关概念	对应图形
斜线	与平面 α 相交,但不和平面 α 垂直,图中直线 PA	
斜足	斜线和平面的交点,图中点 A	
射影	过斜线上斜足以外的一点向平面引垂线,过垂足和斜足的直线叫做斜线在这个平面上的射影,图中斜线 PA 在平面 α 上的射影为直线 AO	

直线与平面所成的角	定义：平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，图中 $\angle PAQ$ 规定：一条直线垂直于平面，它们所成的角是 90° ；一条直线和平面平行，或在平面内，它们所成的角是 0°
取值范围	设直线与平面所成的角为 θ ， $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

【典例讲练】

题型一 线面垂直的定义及判定定理的理解

例1 下列命题中，正确的序号是_____.

- ①若直线 l 与平面 α 内的无数条直线垂直，则 $l \perp \alpha$ ；
- ②若直线 l 与平面 α 内的一条直线垂直，则 $l \perp \alpha$ ；
- ③若直线 l 不垂直于平面 α ，则 α 内没有与 l 垂直的直线；
- ④若直线 l 不垂直于平面 α ，则 α 内也可以有无数条直线与 l 垂直；
- ⑤过一点和已知平面垂直的直线有且只有一条.

【练习1】(1)若三条直线 OA ， OB ， OC 两两垂直，则直线 OA 垂直于()

- A. 平面 OAB B. 平面 OAC C. 平面 OBC D. 平面 ABC

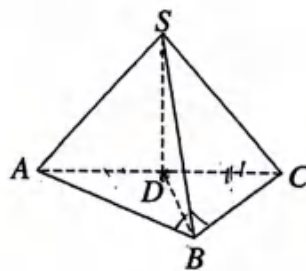
(2)如果一条直线垂直于一个平面内的：①三角形的两边；②梯形的两边；③圆的两条直径；④正五边形的两边. 能保证该直线与平面垂直的是_____. (填序号)

题型二 线面垂直的判定

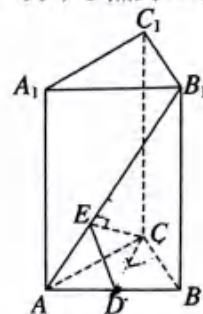
例2 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ ， D 是 AC 的中点，且 $SA=SB=SC$.

(1)求证： $SD \perp$ 平面 ABC ；

(2)若 $AB=BC$ ，求证： $BD \perp$ 平面 SAC .



【练习 2】如图所示，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面 ABC 为等腰直角三角形， $\angle ACB=90^\circ$ ， C 点到 AB_1 的距离为 CE ， D 为 AB 的中点。求证：(1) $CD \perp AA_1$ ；(2) $AB_1 \perp$ 平面 CED 。

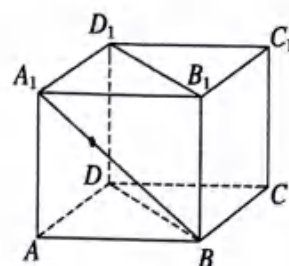


题型三 直线与平面所成的角

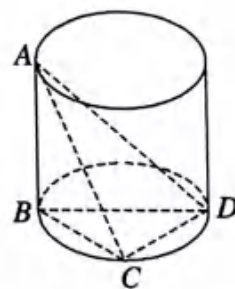
例 3 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

(1) 求 A_1B 与平面 AA_1D_1D 所成的角；

(2) 求 A_1B 与平面 BB_1D_1D 所成的角。



【练习 3】如图所示， AB 是圆柱的母线， BD 是圆柱底面圆的直径， C 是底面圆周上一点，且 $AB=BC=2$ ， $\angle CBD=45^\circ$ ，求直线 BD 与平面 ACD 所成角的大小。



【课后巩固】—————完成课时作业 (154)

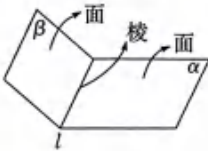
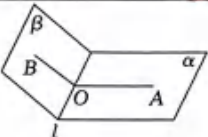
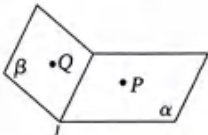
15.6.3 平面与平面垂直

【学习目标】

- 1.理解二面角的有关概念，会求简单的二面角的大小.
- 2.理解两平面垂直的定义.
- 3.掌握两平面垂直的判定定理.

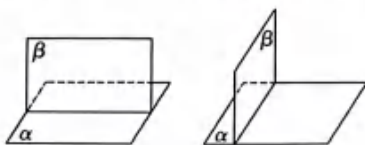
【要点整合】

知识点一 二面角

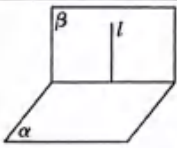
概念		平面内的一条直线把平面分成两部分，这两部分通常称为 <u>半平面</u> .从这一条直线出发的 <u>两个半平面</u> 所组成的图形叫做二面角.这条直线叫做二面角的 <u>棱</u> ，这两个半平面叫做二面角的 <u>面</u>
图示		
平面角	文字	在二面角的棱上任取一点，以该点为垂足，在两个半平面内分别作垂直于 <u>棱</u> 的射线，则这两条射线构成的 <u>角</u> 叫做这个二面角的平面角
	图示	
	符号	$OA \subset \alpha, OB \subset \beta, \alpha \cap \beta = l, O \in l, OA \perp l, OB \perp l \Rightarrow \angle AOB$ 是二面角的平面角
	范围	$0^\circ \leq \angle AOB < 180^\circ$
	规定	二面角的大小可以用它的 <u>平面角</u> 来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度.平面角是 <u>直角</u> 的二面角叫做直二面角
记法		棱为 l 、面分别为 α, β 的二面角记为 $\alpha-l-\beta$.如图所示，也可在 α, β 内（棱以外的半平面部分）分别取点 P, Q ，将这个二面角记作二面角 $P-l-Q$. 

知识点二 平面与平面垂直

- 1.定义：两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直.平面 α 与平面 β 垂直，记作 $\alpha \perp \beta$.
- 2.画法：两个互相垂直的平面通常把直立平面的竖边画成与水平平面的横边垂直.如图所示.



3.平面与平面垂直的判定定理

文字语言	一个平面过另一个平面的垂线, 则这两个平面垂直
图形语言	
符号语言	$l \perp \alpha, l \subset \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$

【典例讲练】

题型一 二面角及其平面角的概念

例 1 下列命题中:

①两个相交平面组成的图形叫做二面角; ②异面直线 a, b 分别和一个二面角的两个面垂直, 则 a, b 所成的角与这个二面角的平面角相等或互补; ③二面角的平面角是从棱上一点出发, 分别在两个面内作射线所成的角的最小角; ④二面角的大小与其平面角的顶点在棱上的位置没有关系. 其中正确的是 ()

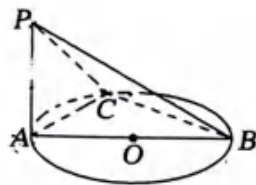
- A. ①③ B. ②④ C. ③④ D. ①②

【练习 1】若一个二面角的两个半平面分别垂直于另一个二面角的两个半平面, 那么这两个二面角 ()

- A. 相等 B. 互补
C. 相等或互补 D. 关系无法确定

题型二 求二面角大小

例 2 如图所示, AB 是 $\odot O$ 的直径, PA 垂直于 $\odot O$ 所在的平面, C 是圆周上的一点, 且 $PA=AC$, 求二面角 $P-BC-A$ 的大小.

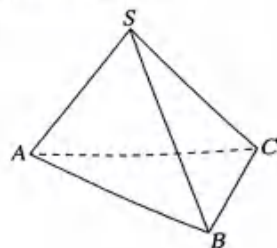


【练习 2】四边形 $ABCD$ 是正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA=AB$.

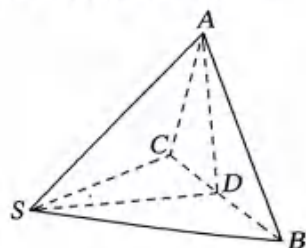
- (1) 求二面角 $A-PD-C$ 的平面角的度数;
- (2) 求二面角 $B-PA-D$ 的平面角的度数;
- (3) 求二面角 $B-PA-C$ 的平面角的度数;
- (4) 求二面角 $B-PC-D$ 的平面角的度数.

题型三 面面垂直的判定与证明

例 3 如图, 已知三棱锥 $S-ABC$ 中, 侧棱 $SA=SB=SC$, $\angle ABC=90^\circ$, 求证: 平面 $ABC \perp$ 平面 ASC .

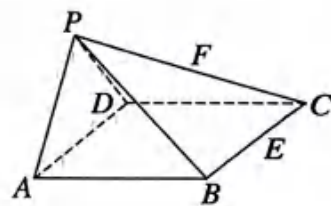


例 4 过点 S 引三条线段 SA , SB , SC , 其中 $\angle BSC=90^\circ$, $\angle ASC=\angle BSA=60^\circ$, 且 $SA=SB=SC=a$. 求证: 平面 $ABC \perp$ 平面 BSC .



【练习 3】如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD=60^\circ$, 侧面 $\triangle PAD$ 为等边三角形.

- (1) 求证: $AD \perp PB$;
- (2) 若 E 为 BC 边上的中点, 能否在棱 PC 上找到一点 F , 使平面 $DEF \perp$ 平面 $ABCD$? 并证明你的结论.



【课后巩固】_____ 完成课时作业 (155)

15.7 专题研究

15.7.1 几何体的外接球和内切球

【学习目标】

1. 了解简单空间几何体的外接球和内切球；
2. 学会运用构造法解决空间几何体的外接球和内切球问题。

【要点整合】

1. 正方体：

(1) 正方体的外接球：

设正方体边长为 a ，则正方体的体对角线长等于外接球的直径，

所以球的半径 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ；

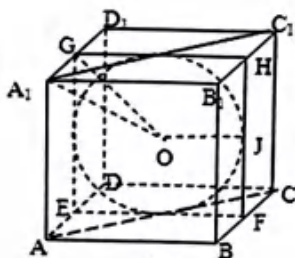


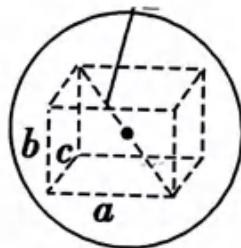
图 1

(2) 正方体的内切球：设正方体边长为 a ，则内切球半径为 $r = OJ = \frac{1}{2}a$ 。

2. 长方体的外接球：

设长方体棱长分别为 a, b, c ，则长方体的体对角线等于球的直径，

所以球的半径 $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$ 。



3. 正棱柱的外接球：

设正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h ，底面边长为 a ，如图所示，根据几何体的特点，球心必落在 DD_1 的中点 O ，

$OD = \frac{1}{2}h, AO = R, AD = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，借助直角三角形 AOD 的勾股定理，可求得：外接球半径 $R = \sqrt{(\frac{h}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}a}{3})^2}$ ；

其他正棱柱方法类似，使用构造直角三角形的方法。

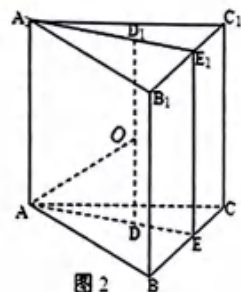


图 2

4. 正四面体：

如图 4，设正四面体 $S-ABC$ 的棱长为 a ，内切球半径为 r ，外接球的半径为 R ，

则 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a, r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ ；

这个解法是通过利用两心合一的思路，建立含有两个球的半径的等量关系进行求解。同时我们可以发现，球心 O 为正四面体高的四等分点，其中正四面体外接球的半径是正四面体高的 $\frac{3}{4}$ ，内切球的半径是正四面体高的 $\frac{1}{4}$ 。

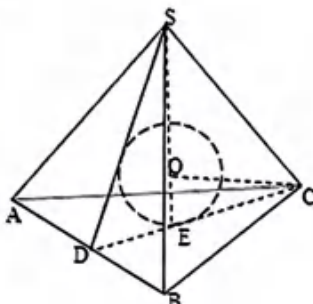


图 4

5. 三棱锥：

(1) 三棱锥的外接球：

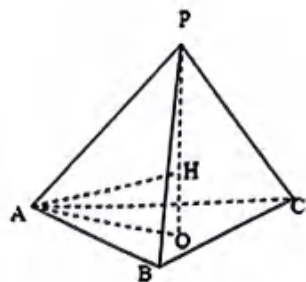
①观察题中是否有某个特殊点是外接球的球心（比如某棱的中点为球心、正棱锥的外接球球心在高线上）；

②补充成直棱柱再球外心；

③分别过两面的外心作该面的垂线，两垂线的交点必为球心.

(2) 正棱锥的内切球：

例如正三棱锥的内切球，球与正三棱锥四个面相切，球心到四个面的距离相等，都为球半径. 这样求球的半径可转化为球心到三棱锥面的距离，故可采用等体积法解决，即四个小三棱锥的体积和为正三棱锥的体积.



【典例讲练】

例 1 (1) 若棱长为 3 的正方体的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为_____.

(2) 求棱长为 1 的正四面体外接球的体积.

(3) 已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为 4，体积为 16，则这个球的表面积是 ()

A. 16π

B. 20π

C. 24π

D. 32π

例 2 (1) 正四面体的棱长为 a ，则其内切球的半径为_____.

(2) 半径为 R 的球的外切圆柱(球与圆柱的侧面、两底面都相切)的表面积为_____, 体积为_____.

(3) 一个高为 16 的圆锥内接于一个体积为 972π 的球，在圆锥里又有一个内切球. 求：圆锥的侧面积和圆锥里内切球的体积.

【练习 1】(1) 正方体的外接球与内切球的体积之比为_____, 面积之比为_____.

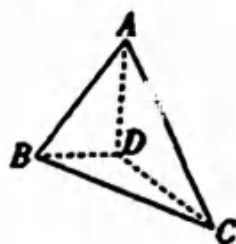
(2) (2015·高考全国卷Ⅱ) 已知 A, B 是球 O 的球面上两点, $\angle AOB=90^\circ$, C 为该球面上的动点. 若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 36, 则球 O 的表面积为 ()

- A. 36π B. 64π C. 144π D. 256π

例 3 把圆心角为 120° 的扇形铁板围成一个圆锥, 则该圆锥的侧面积与它的外接球的表面积之比为_____.

例 4 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $BD \perp$ 平面 ADC , $BD=1, AB=2, BC=3, AC=\sqrt{11}$, 则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的体积为 ()

- A. 4π B. 3π C. $2\sqrt{3}\pi$ D. $4\sqrt{3}\pi$



例 5 两球 O_1 和 O_2 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内部, 且互相外切, 若球 O_1 与过点 A 的正方体的三个面相切, 球 O_2 与过点 C_1 的正方体的三个面相切, 则球 O_1 和 O_2 的表面积之和的最小值为 ()

- A. $3(2-\sqrt{3})\pi$ B. $4(2-\sqrt{3})\pi$ C. $6(2-\sqrt{3})\pi$ D. $12(2-\sqrt{3})\pi$

【课后巩固】_____完成课时作业 (156)

15.7.2 空间中的距离问题

【学习目标】

1. 理解异面直线、点到平面、直线和平面、平面和平面距离的概念；
2. 会用求距离的常用方法.

【要点整合】

1. 两条异面直线的距离的求法：找公垂线段；转化为点到面的距离；
2. 点到平面距离的求法：作垂线；等体积法；
3. 平行于平面的直线与该平面、两个平行平面之间的距离的求法：转化为点到面的距离.

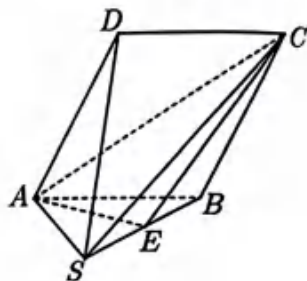
【典例讲练】

例1 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AC \perp$ 底面 BCD , 底面 BCD 是正三角形, $AC = a$, $\angle ABC = 30^\circ$, 则点 C 到平面 ABD 的距离是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{5}a$ B. $\frac{3\sqrt{13}}{13}a$ C. $\frac{\sqrt{13}}{5}a$ D. $\frac{\sqrt{13}}{13}a$

【练习1】如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, $\triangle ABS$ 是正三角形, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AB = 2$, $\angle ABC = 120^\circ$, 点 E 是 BS 的中点.

- (1) 求证: $SD \parallel$ 平面 ACE ;
- (2) 若平面 $ABS \perp$ 平面 $ABCD$, 求点 E 到平面 ASD 的距离.

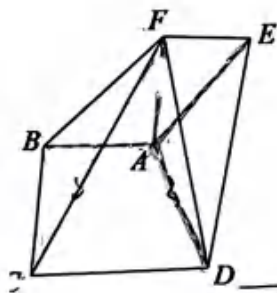


例2 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a , 异面直线 BD 与 AA_1 的距离为_____.

【练习2】四面体 $ABCD$ 中, $AB = CD = 2$, $AC = AD = BC = BD = 4$, 则异面直线 AB 与 CD 的距离为_____.

【练习3】在三棱锥 $D-ABC$ 中, $AB = DC = 4$, $BC = AD = 3$, $AD \perp DC$, $AD \perp BC$, $AB \perp BC$, 则异面直线 AD 和 BC 的距离为_____.

例3 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, $AB \parallel DC$, $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$, $CD = AD = 3$, 四边形 $ABFE$ 为平行四边形, $FA \perp$ 平面 $ABCD$, $FC = 5$, 则直线 AB 到平面 $EFCD$ 的距离为_____.



例4 用六个完全相同的正方形围成的立体图形叫正六面体. 已知正六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为4, 则平面 AB_1D_1 与平面 BC_1D 间的距离为 ()

A. $\sqrt{3}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

D. $2\sqrt{3}$

【课后巩固】_____完成课时作业 (157)

第十六章 空间向量及其应用

16.1 空间向量及运算

【学习目标】

1. 了解空间向量的概念. 了解空间向量的基本定理及其意义, 掌握空间向量的正交分解及其坐标表示.
2. 掌握空间向量的线性运算及其坐标表示.
3. 掌握空间向量的数量积及其坐标表示, 能用向量的数量积判断向量的共线与垂直.
4. 能够运用向量的坐标判断两个向量的平行或垂直.

【要点整合】

1. 空间向量的有关概念

名称	概念	表示
零向量	模为 0 的向量	$\vec{0}$
单位向量	长度(模)为 1 的向量	$\vec{a} = \vec{b}$
相等向量	方向相同且模相等的向量	
相反向量	方向相反且模相等的向量	$\vec{a}$ 的相反向量为 $-\vec{a}$
共线向量	表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合的向量	$\vec{a} // \vec{b}$
共面向量	平行于同一个平面的向量	

2. 向量共线、共面定理:

- (1) 共线向量定理: 向量 $\vec{b}$ 与非零向量 $\vec{a}$ 共线的充要条件是存在唯一实数 λ , 使 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$;
- (2) 共面向量定理: 如果两个向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不共线, 那么向量 $\vec{p}$ 与向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 共面的充要条件是: 存在实数对 (x, y) , 使 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

3. 空间向量的坐标表示方法:

- (1) 空间向量基本定理: 设 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 、 $\vec{e}_3$ 是空间内三个不共面的向量, 则对于空间内任一向量 $\vec{a}$, 有且仅有一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使 $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3$;

- (2) 空间向量的坐标表示: 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 内, 我们分别取与 x 轴、 y 轴、 z 轴方向相同的三个单位向量 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ 作为基底, 则对于这个平面内任一向量 $\vec{a}$, 有且仅有一对实数 x, y, z , 使得 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; 我们称 (x, y, z) 为向量 $\vec{a}$ 的 (空间直角) 坐标, 记为 $\vec{a} = (x, y, z)$;

[注]①特别地, $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, $\vec{0} = (0, 0, 0)$;

②若 $\vec{a} = (x, y, z)$, 则与向量 $\vec{a}$ 相等的所有向量的坐标均为 (x, y, z) ;

③若 A 、 B 两点坐标为 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$;

④空间向量与平面向量的坐标表示的区别在于：平面向量建立在 x 轴与 y 轴垂直且交于点 O （原点）的二维平面直角坐标系 xOy 上，坐标表示形式为 $\vec{a} = (x, y)$ ；空间向量建立在 x 轴、 y 轴与 z 轴两两相互垂直且三条直线交于同一点 O （原点）的三维空间直角坐标系 $O-xyz$ 上，坐标表示形式为 $\vec{a} = (x, y, z)$ ；

4. 空间向量的数量积：

（1）定义：已知两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ，它们的夹角为 θ ，则数量 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 叫做 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的数量积。

记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 。

（2）平面向量数量积的运算律：

①交换律： $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ；

②结合律： $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$ ；

③分配律： $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ 。

5. 空间向量与坐标运算方式：

设空间向量 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ， $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ，则坐标运算方式和坐标运算判定性质如下：

（1）加减法： $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$ ；

（2）数乘： $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ ；

（3）数量积： $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ ；

（4）模： $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ ；

（5）向量平行充要条件： $\vec{a} \parallel \vec{b} (\vec{a} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$ ；

（6）向量垂直充要条件： $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$ ；

（7）向量间的夹角： $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ 。

6. 两点间距离公式：

设 $A(x_1, y_1, z_1)$ ， $B(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点，则 $|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ 。

【典例讲练】

题型一 空间向量的概念与运算

例 1 判断下面结论是否正确(打“√”或“×”)

(1) 若 $A(x_1, y_1, z_1)$ ， $B(x_2, y_2, z_2)$ ，则 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ 。

(2) 设 $A(0, 1, -1)$ ， O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OA} = (0, 1, -1)$ 。

(3) 空间直角坐标系中, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标与终点 B 的坐标相同.

(4) 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$.

(5) 若 $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$.

(6) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角等于向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 的夹角.

(7) 对于非零向量 $\vec{b}$, 由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}$, 可得 $\vec{a} = \vec{c}$.

(8) 对任意向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$.

(9) 对于向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, 有 $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

(10) 若非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为共线且同向的向量, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$.

例 2 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 AC 与 BD 的交点, 若 $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1D_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A_1A} = \vec{c}$,

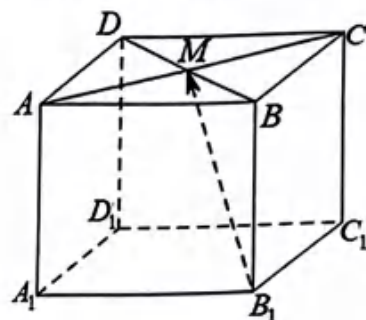
则与 $\overrightarrow{B_1M}$ 相等的向量是 ()

A. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

C. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

D. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$



【练习 1】如图, 空间四边形 $OABC$ 中, 记 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, 且 $OM = 2MA$, $BN = NC$,

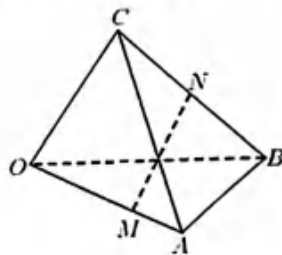
则 $\overrightarrow{MN} =$ ()

A. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

C. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

D. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$



【练习 2】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知下列各式:

① $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CC_1}$; ② $(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1}) + \overrightarrow{D_1C_1}$; ③ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}) + \overrightarrow{B_1C_1}$; ④ $(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}) + \overrightarrow{B_1C_1}$.

其中运算的结果为向量 $\overrightarrow{AC_1}$ 的有 ()

A. 1 个

B. 2 个

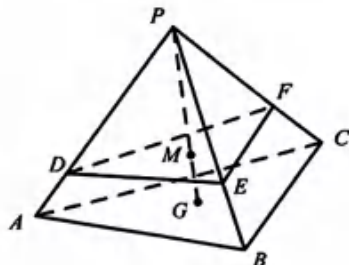
C. 3 个

D. 4 个

题型二 共线定理、共面定理的应用

例3 如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,点 M 在 PG 上,且 $PM=3MG$,过点 M 任意作一个平面分别交线段 PA , PB , PC 于点 D , E , F ,若 $\vec{PD}=m\vec{PA}$, $\vec{PE}=n\vec{PB}$, $\vec{PF}=t\vec{PC}$;

求证: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{t}$ 为定值,并求出该定值.



【练习3】已知 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 是空间的一个基底,若 $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$,则()

- A. $\vec{a}, \vec{p}, \vec{q}$ 是空间的一组基底 B. $\vec{b}, \vec{p}, \vec{q}$ 是空间的一组基底
C. $\vec{c}, \vec{p}, \vec{q}$ 是空间的一组基底 D. $\vec{p}, \vec{q}$ 与 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 中的任何一个都不能构成空间的一组基底

题型三 空间向量数量积的应用

例4 已知空间三点 $A(-2,0,2)$, $B(-1,1,2)$, $C(-3,0,4)$,设 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

- (1) $|\vec{c}|=3$,且 $\vec{c} \parallel \overrightarrow{BC}$,求 $\vec{c}$;
(2) 求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角的余弦值;
(3) 若 $k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $k\vec{a}-2\vec{b}$ 互相垂直,求 k 的值;
(4) 若 $\lambda(\vec{a}+\vec{b})+\mu(\vec{a}-\vec{b})$ 与 z 轴垂直,求 λ, μ 应该满足的关系

【练习4】(1) 若 $\vec{a}=(1, \lambda, 2)$, $\vec{b}=(2, -1, 2)$,且 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{8}{9}$,则 λ 等于()

- A. 2 B. -2 C. -2或 $\frac{2}{55}$ D. 2或 $-\frac{2}{55}$

(2) 已知空间向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |\vec{c}|=4$,则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为()

- A. 30° B. 45°
C. 60° D. 以上都不对

【课后巩固】—————完成课时作业(158)

16.2 空间向量的应用（一）——平行与垂直

【学习目标】

1. 能够运用向量的坐标判断两个向量的平行或垂直.
2. 理解直线的方向向量与平面的法向量.
3. 能用向量方法解决线面、面面的垂直与平行问题, 体会向量方法在立体几何中的作用.

【要点整合】

1. 直线的方向向量与平面的法向量的确定:

(1) 直线的方向向量: l 是空间一直线, A, B 是直线 l 上任意两点, 则称 $\overrightarrow{AB}$ 为直线 l 的方向向量, 与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的任意非零向量也是直线 l 的方向向量.

(2) 平面的法向量: 如果表示向量 n 的有向线段所在直线垂直于平面 α , 则称向量 n 为平面 α 的法向量, 记作 $\vec{n} \perp \alpha$;

[注] 平面的法向量可利用方程组求出: 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是平面 α 内两不共线向量, n 为平面 α 的法向量, 则求法

向量的方程组为
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}.$$

2. 运用空间向量证明平行和垂直关系的方法:

设两条不重合的直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\vec{k}_1 = (a_1, b_1, c_1), \vec{k}_2 = (a_2, b_2, c_2)$

两个不重合的平面 α_1, α_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1 = (m_1, n_1, p_1), \vec{n}_2 = (m_2, n_2, p_2)$;

则证明平行和垂直关系的方法如下:

(1) 线线平行: $l_1 // l_2 \Leftrightarrow \vec{k}_1 // \vec{k}_2 \Leftrightarrow \vec{k}_1 = \lambda \vec{k}_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$;

(2) 线线垂直: $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{k}_1 \perp \vec{k}_2 \Leftrightarrow \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$;

(3) 线面平行: $l_1 // \alpha_1 \Leftrightarrow \vec{k}_1 \perp \vec{n}_1 \Leftrightarrow \vec{k}_1 \cdot \vec{n}_1 = a_1 m_1 + b_1 n_1 + c_1 p_1 = 0$;

(4) 线面垂直: $l_1 \perp \alpha_1 \Leftrightarrow \vec{k}_1 // \vec{n}_1 \Leftrightarrow \vec{k}_1 = \lambda \vec{n}_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{m_1} = \frac{b_1}{n_1} = \frac{c_1}{p_1}$;

(5) 面面平行: $\alpha_1 // \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$;

(6) 面面垂直: $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

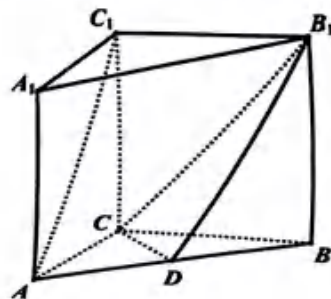
【典例讲练】

题型一 证明平行与垂直关系

例 1 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=3$, $BC=4$, $AB=5$, $AA_1=4$, 点 D 是 AB 的中点.

求证: (1) $AC \perp BC_1$;

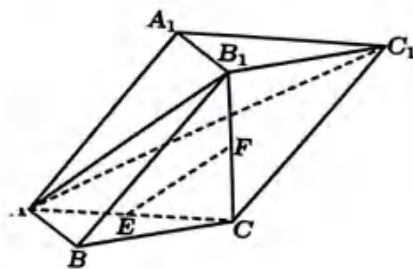
(2) $AC_1 \parallel$ 平面 CDB_1 .



例 2 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC$, $B_1C \perp$ 平面 ABC , E, F 分别是 AC, B_1C 的中点.

求证: (1) $EF \parallel$ 平面 AB_1C_1 ;

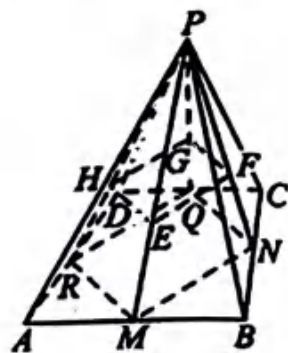
(2) 求证: 平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABB_1 .



例3 如图, 已知 P 是平面四边形 $ABCD$ 所在平面外一点, 连接 PA 、 PB 、 PD ; 点 E 、 F 、 G 、 H 分别为 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCD$, $\triangle PDA$ 的重心.

求证: (1) E 、 F 、 G 、 H 四点共面;

(2) 平面 $EFGH \parallel$ 平面 $ABCD$.

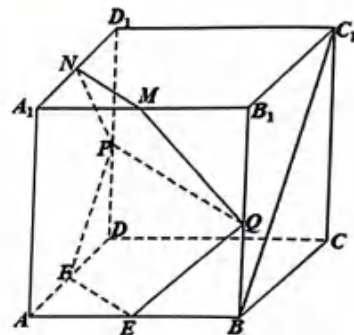


题型二 探究性问题

例4 如图, 在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 、 F 、 M 、 N 分别是棱 AB 、 AD 、 A_1B_1 、 A_1D_1 的中点, 点 P 、 Q 分别在棱 DD_1 、 BB_1 上移动, 且 $DP=BQ=\lambda$ ($0 < \lambda < 2$).

(1) 当 $\lambda=1$ 时, 证明: 直线 $BC_1 \parallel$ 平面 $EFPQ$;

(2) 是否存在 λ , 使平面 $EFPQ \perp$ 平面 $PQMN$? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.



16.3 空间向量的应用（二）——空间角（1）

【学习目标】

能够利用空间向量，解决异面直线的夹角、线面角问题，体会向量法在立体几何中的应用.

【要点整合】

运用空间向量计算异面直线所成角、线面角的方法：

1. 异面直线所成角的计算：

设两条异面直线 l_1 、 l_2 的方向向量分别为 $\vec{k}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ 、 $\vec{k}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ，

记异面直线 l_1 、 l_2 的夹角为 φ ， $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ，

$$\text{则 } \cos \varphi = |\cos \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle| = \frac{|\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2|}{|\vec{k}_1| |\vec{k}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}};$$

2. 直线和平面所成角（线面角）的计算：

设直线 l 的方向向量为 $\vec{k} = (a, b, c)$ ，平面 α 的法向量分别为 $\vec{n} = (m, n, p)$ ；

记直线 l 与平面 α 所成角为 φ ， $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，

$$\text{则 } \sin \varphi = |\cos \langle \vec{k}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{n}|}{|\vec{k}| |\vec{n}|} = \frac{|am + bn + cp|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};$$

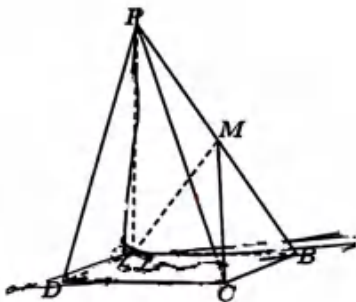
【典例讲练】

题型一 异面直线间的夹角

例 1 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形， $\angle ADC = 60^\circ$ ， $PA = \sqrt{2}$.

(1) 若 M 是 PB 的中点，求证： $PD \parallel$ 平面 ACM ；

(2) 求异面直线 AB 与 PD 所成角的余弦值.



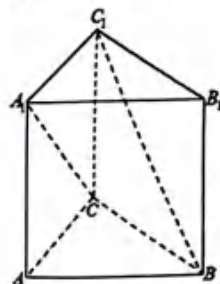
【练习 1】如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AC = 3, BC = 4, CC_1 = 3, \angle ACB = 90^\circ$ ，则 BC_1 与 A_1C 所成的角的余弦值为 ()

A. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

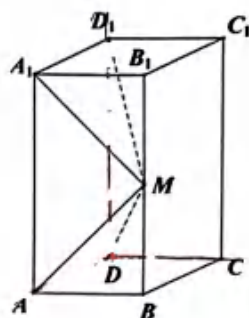


题型二 直线和平面的夹角

例 2 如图，在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 在棱 BB_1 上， $AM \perp A_1M$ 。

(1) 证明： $AM \perp D_1M$ ；

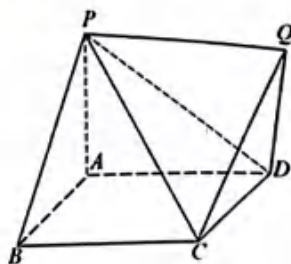
(2) 若 M 是 BB_1 的中点，求直线 D_1M 与平面 ADM 所成角的正弦值。



例 3 如图，多面体 $PQABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是菱形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB = 2PA = 2$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $QC = QD = \sqrt{13}$ ， $PQ = a (a > 0)$ 。

(1) 设点 F 为棱 CD 的中点，求证：对任意的正数 a ，四边形 $PQFA$ 为平面四边形；

(2) 当 $a = 4$ 时，求直线 PQ 与平面 PBC 所成角的正弦值。

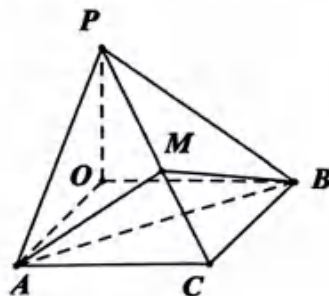


题型三 探究性问题

例4 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC = 2$, $\angle ACB = 120^\circ$. O 为 $\triangle ABC$ 的外心, $PO \perp$ 平面 ABC , 且 $PO = \sqrt{6}$.

(1) 求证: $BO \parallel$ 平面 PAC ;

(2) 设平面 $PAO \cap$ 平面 $PBC = l$; 若点 M 在线段 PC 上运动, 且 $\overline{PM} = \lambda \overline{PC}$, 当直线 l 与平面 ABM 所成角取最大值时, 求 λ 的值

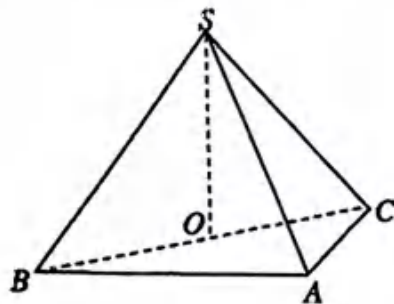


例5 如图,在三棱锥 $S-ABC$ 中, 平面 $SBC \perp$ 平面 ABC , $SB = SC = AB = AC = \sqrt{2}$, $BC = 2$, 若 O 为 BC 的中点.

(1) 证明: $SO \perp$ 平面 ABC ;

(2) 求异面直线 AB 和 SC 所成角;

(3) 设线段 SO 上有一点 M , 当 AM 与平面 SAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{15}$ 时, 求 OM 的长.



16.4 空间向量的应用（三）——空间角（2）

【学习目标】

能够利用空间向量，解决二面角问题，体会向量法在立体几何中的应用。

【要点整合】

运用空间向量计算二面角的方法：

设两个不重合的平面 α_1 、 α_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ 、 $\vec{n}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ ；

记平面 α_1 、 α_2 所成二面角为 φ ， $\varphi \in [0, \pi]$ ，

$$\text{则 } |\cos \varphi| = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}};$$

$$\sin \varphi = \sin \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle} = \sqrt{1 - \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|^2}{|\vec{n}_1|^2 |\vec{n}_2|^2}} = \sqrt{1 - \frac{(m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2)^2}{(m_1^2 + n_1^2 + p_1^2)(m_2^2 + n_2^2 + p_2^2)}};$$

[注]求二面角时，两法向量的夹角有可能是二面角或二面角的补角；

若题目要求二面角 φ 的余弦 $\cos \varphi$ ，则要注意从图中观察两个平面交线与两个构成二面角的半平面的

$$\text{成角方向和夹角的锐钝情况来确定最终结果：} \cos \varphi = \begin{cases} |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| & (0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}) \\ -|\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| & (\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi) \end{cases}$$

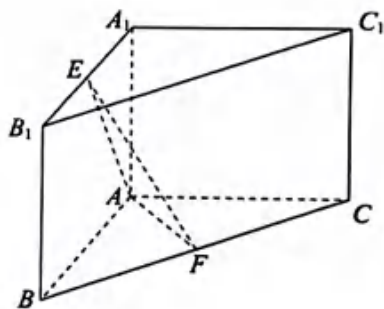
【典例讲练】

题型一 二面角

例 1 如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中 $AA_1 \perp$ 平面 ABC ，底面 ABC 是等腰直角三角形，且 $AB = AC = AA_1 = 2$ ，点 E 、 F 分别是边 A_1B_1 、 BC 的中点。

(1) 求证： $EF \parallel$ 平面 AA_1C_1C ；

(2) 求二面角 $E-AF-B$ 的余弦值。

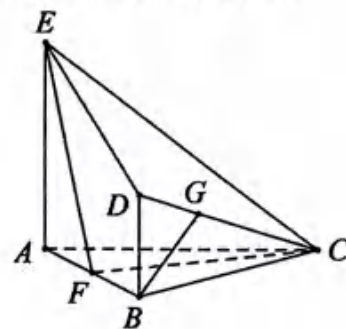


例2 如图, 四棱锥 $C-ABDE$ 中, $AE \parallel BD$, $AE = 2BD = 2$, 点 F 是 AB 的中点, 点 G 在线段 DC 上, 且 $2DG = GC$.

(1) 求证: $BG \parallel$ 平面 CEF ;

(2) 若 $AE \perp$ 平面 ABC , $AE = AB$, $AC = CB = \sqrt{2}$,

求锐二面角 $F-EC-D$ 的余弦值.



例3 如图1, 在平行四边形 $ABCM$ 中, $AB = 2BC = 4\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60^\circ$, D 为 CM 的中点, 沿 AD 将 $\triangle MAD$ 翻折到 $\triangle PAD$ 的位置, 如图2, 点 P 在平面 $ABCD$ 内的正投影点 F 在 AC 上, H 在 AD 上, $HF \parallel$ 平面 PBD .

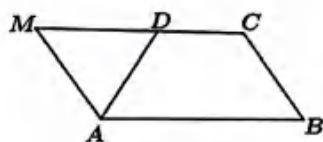


图1

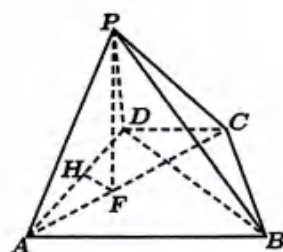
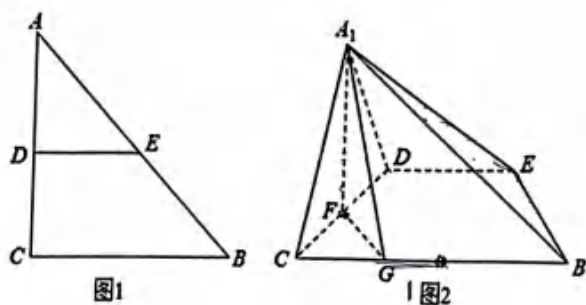


图2

(1) 证明: H 为 AD 的中点.

(2) 求平面 PAD 与平面 PBC 所成二面角的大小.

例 4 如图 1, 在等腰 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, D, E 分别为 AC, AB 的中点, F 为 CD 的中点, G 在线段 BC 上, 且 $BG = 3CG$. $BC = 4$, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 使点 A 到 A_1 的位置 (如图 2 所示), 且 $A_1F \perp CD$.

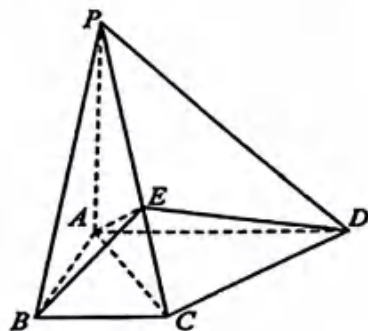


- (1) 证明: $BE \parallel$ 平面 A_1FG ;
- (2) 求平面 A_1FG 与平面 A_1BE 所成锐二面角的余弦值.

题型二 探究性问题

例 5 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp AB$, $PA = AD = 4$, $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $AB = BC = 2$, $\overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{PC}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$).

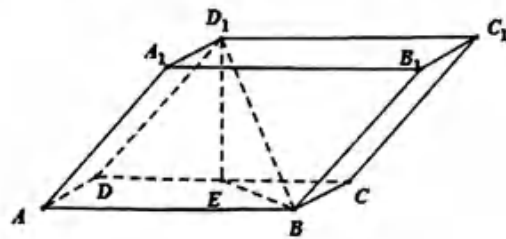
- (1) 若 $\lambda = \frac{1}{2}$, 求直线 DE 与平面 ABE 所成角的正弦值;
- (2) 设二面角 $B-AE-C$ 的大小为 θ , 若 $|\cos \theta| = \frac{2\sqrt{34}}{17}$, 求 λ 的值.



例 6 如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 和侧面 BCC_1B_1 都是矩形， E 是 CD 的中点， $D_1E \perp CD$ ， $AB=2BC=2$ 。

(1) 求证：平面 $CC_1D_1D \perp$ 底面 $ABCD$ ；

(2) 若平面 BCC_1B_1 与平面 BED_1 所成的锐二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$ ，求线段 ED_1 的长度。



16.5 空间向量的应用（四）——空间距离

【学习目标】

能够利用空间向量，解决空间距离问题，体会向量法在立体几何中的应用。

【要点整合】

运用空间向量计算空间距离的方法：

1. 点、直线、平面到平面的距离的计算：

设 P 点坐标为 $P(x, y, z)$ ，平面 α 的法向量 $n = (m, n, p)$ ， $M(x_0, y_0, z_0)$ 为平面 α 内任意一点；

直线 $l // \alpha$ 且经过 P 点，平面 $\beta // \alpha$ 且经过 P 点；则空间距离的计算方法如下：

$$\text{①点 } P \text{ 到平面 } \alpha \text{ 的距离的计算： } d_{P \rightarrow \alpha} = \frac{|\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|m(x_0 - x) + n(y_0 - y) + p(z_0 - z)|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};$$

$$\text{②直线 } l \text{ 到平面 } \alpha \text{ 的距离的计算： } d_{l \rightarrow \alpha} = d_{P \rightarrow \alpha};$$

$$\text{③平面 } \beta \text{ 到平面 } \alpha \text{ 的距离的计算： } d_{\beta \rightarrow \alpha} = d_{P \rightarrow \alpha};$$

[注]与平面 α 平行的直线 l 到平面的距离计算和两平行平面 α 、 β 间的距离计算均可转化为直线 l 或平面 β 上的点 P 到平面 α 的距离 $d_{P \rightarrow \alpha}$ 的计算；

2. 异面直线 l_1 、 l_2 之间的距离：

先求两条异面直线 l_1 、 l_2 的公共法向量 $\vec{n} = (m, n, p)$ ，再求两异面直线上两点连结线段在公共法向量上的射影长，即点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 在直线 l_1 上，点 $B(x_2, y_2, z_2)$ 在直线 l_2 上，

$$\text{则两条异面直线 } l_1、l_2 \text{ 的距离公式为： } d_{l_1 \rightarrow l_2} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|m(x_1 - x_2) + n(y_1 - y_2) + p(z_1 - z_2)|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

【典例讲练】

题型一 点、直线、平面到平面的距离

例1 已知 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是底面边长为 1 的正四棱柱， O_1 是 A_1C_1 和 B_1D_1 的交点。

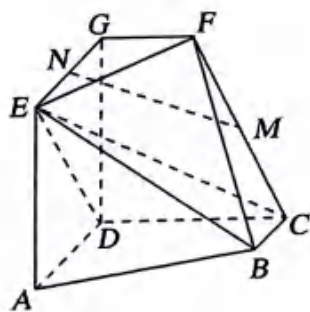
(1) 设 AB_1 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角的大小为 α ，二面角 $A - B_1D_1 - A_1$ 的大小为 β 。

求证： $\tan \beta = \sqrt{2} \tan \alpha$ ；

(2) 若点 C 到平面 AB_1D_1 的距离为 $\frac{4}{3}$ ，求正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的高。

例 2 如图, $AD \parallel BC$ 且 $AD = 2BC$, $AD \perp CD$, $EG \parallel AD$ 且 $EG = AD$, $CD \parallel FG$ 且 $CD = 2FG$, $DG \perp$ 平面 $ABCD$, $DA = DC = DG = 2$.

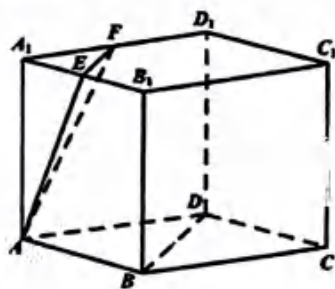
- (1) 若 M 为 CF 的中点, N 为 EG 的中点, 求证: $MN \parallel$ 平面 CDE ;
- (2) 求二面角 $E-BC-F$ 的正弦值;
- (3) 求直线 AD 到平面 EBC 的距离.



例 3 底面为菱形的直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 、 F 分别为棱 A_1B_1 、 A_1D_1 的中点.

- (1) 在图中作一个平面 α , 使得 $BD \subset \alpha$, 且平面 $AEF \parallel \alpha$. (不必给出证明过程, 只要求作出 α 与直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面).

- (2) 若 $AB = AA_1 = 2$, $\angle BAD = 60^\circ$, 求平面 AEF 与平面 α 的距离 d

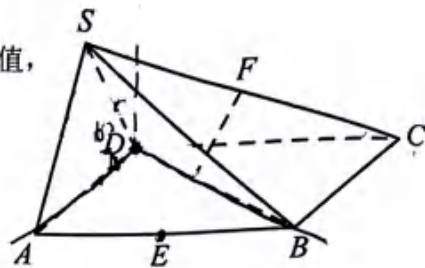


题型二 异面直线间的距离

例 4 如图四棱锥 $S-ABCD$ ， $ABCD$ 是平行四边形， $AD=BD=2$ ， $AD \perp BD$ ， $\triangle SAD$ 为等边三角形，且平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， E 是 AB 边的中点， F 是侧棱 SC 上的一点。

(1) 是否存在这样的点 F ，使得 $EF \parallel$ 平面 SAD ？若存在，请求出 $\frac{SF}{SC}$ 的值，若不存在，请说明理由；

(2) 在 (1) 的条件下，求异面直线 AD 与 EF 的距离。

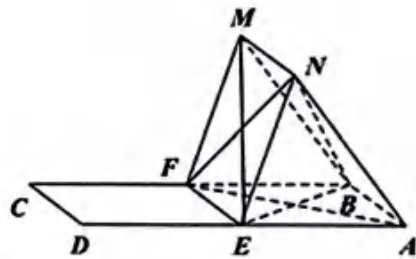


题型三 探究性问题

例 5 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， $AD=2AB=6$ ， E, F 分别为 AD, BC 的中点。以 EF 为折痕把四边形 $EFCD$ 折起，使点 C 到达点 M 的位置，点 D 到达点 N 的位置，且 $NF=NA$ 。

(1) 求证：平面 $AFN \perp$ 平面 NEB ；

(2) 若 $BE=2\sqrt{3}$ ，求点 F 到平面 BEM 的距离。



例 6 在直三棱柱(侧棱垂直于底面的三棱柱) $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 以 AB, BC 为邻边作平行四边形 $ABCD$, 记线段 CD, A_1B_1 的中点分别为 P, E , 连接 AE, BP , 得到如图乙所示的几何体. 又 $AB \perp BC, AB = BC = AA_1$.

(1) 若 $AA_1 = a$, 图甲给出了计算异面直线之间距离的一种算法框图(其中两异面直线的公垂线是指: 与两异面直线都垂直且相交的直线), 请利用这种方法求异面直线 AE 和 BP 间的距离;

(2) 若 $AA_1 = a$, 在线段 A_1C 上有一动点 M , 过点 M 作垂直于平面 A_1ACC_1 的直线 l , 与直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的其他侧面相交于点 N , 设 $CM = x, MN = y$, 求函数 $y = f(x)$ 的解析式, 并据此求出线段 MN 的长度的最大值.

