

第一部分

知识笔记

奔驰定理与三角形的四心

1 定义

奔驰定理: 设 O 是 $\triangle ABC$ 内一点, $\triangle BOC, \triangle AOC, \triangle AOB$ 的面积分别记作 S_A, S_B, S_C , 则 $S_A \cdot \overrightarrow{OA} + S_B \cdot \overrightarrow{OB} + S_C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.



2 说明

1. 本定理图形酷似奔驰的车标而得名.
2. 奔驰定理在三角形四心中的具体形式:
 - (1) O 是 $\triangle ABC$ 的重心 $\Leftrightarrow S_A:S_B:S_C = 1:1:1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.
 - (2) O 是 $\triangle ABC$ 的内心 $\Leftrightarrow S_A:S_B:S_C = a:b:c \Leftrightarrow a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.
 - (3) O 是 $\triangle ABC$ 的外心 $\Leftrightarrow S_A:S_B:S_C = \sin 2A:\sin 2B:\sin 2C \Leftrightarrow \sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.
 - (4) O 是 $\triangle ABC$ 的垂心 $\Leftrightarrow S_A:S_B:S_C = \tan A:\tan B:\tan C \Leftrightarrow \tan A \cdot \overrightarrow{OA} + \tan B \cdot \overrightarrow{OB} + \tan C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.
3. 奔驰定理是三角形四心向量式的完美统一.
4. 奔驰定理对于利用平面向量解决平面几何问题, 尤其是解决跟三角形的面积和“四心”相关的问题, 有着决定性的基石作用.



学习笔记

第二部分

题型方法

★3【典型例题】

例 1 O 为三角形内部一点, a, b, c 均为大于 1 的正实数, 且满足 $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB}$, 若 $S_{\triangle OAB}, S_{\triangle OAC}, S_{\triangle OBC}$ 分别表示 $\triangle OAB, \triangle OAC, \triangle OBC$ 的面积, 则 $S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OAC}:S_{\triangle OBC}$ 为 ()

A. $(c+1):(b-1):a$ B. $c:b:a$ C. $\frac{1}{a}:\frac{1}{b-1}:\frac{1}{c+1}$ D. $c^2:b^2:a^2$

例 2 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边为 $a, b, c, a=b=4, c=6, I$ 是 $\triangle ABC$ 中内切圆的圆心, 若 $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}, y = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 3 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 若 $3\overrightarrow{HA} + 4\overrightarrow{HB} + 5\overrightarrow{HC} = \vec{0}$, 则 $\cos \angle BHC$ 的值为 ()

A. $-\frac{\sqrt{30}}{10}$ B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ D. $-\frac{\sqrt{70}}{14}$

例 4 已知点 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且 $\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则下列选项正确的是 ()

A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
 B. 直线 AO 必过 BC 边的中点
 C. $S_{\triangle AOB}:S_{\triangle AOC} = 3:2$
 D. 若 $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$, 且 $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$, 则 $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{13}$

例 5 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, b=2a-2c\cos B$, 若 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O , 且满足 $\frac{\cos B}{\sin A}\overrightarrow{CB} + \frac{\cos A}{\sin B}\overrightarrow{CA} = 2m\overrightarrow{CO}$, 则 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

★4【巩固练习】

题目 1 已知 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 若 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$, 则 P 是 $\triangle ABC$ 的 ()

A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心

题目 2 已知 O 是平面上一定点, A, B, C 是平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} + \lambda \overrightarrow{AP}, \lambda \in \mathbf{R}$, 则 P 点的轨迹一定经过 $\triangle ABC$ 的 ()

A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心

题目 3 点 P 在 $\triangle ABC$ 内部, 满足 $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, 则 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle APC}$ 为 ()

A. $2:1$ B. $3:2$ C. $3:1$ D. $5:3$

题目 4 点 O 为 $\triangle ABC$ 内一点, 若 $S_{\triangle AOB}:S_{\triangle BOC}:S_{\triangle AOC} = 4:3:2$, 设 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则实数 λ 和 μ 的值分别为 ()

A. $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}$ B. $\frac{4}{9}, \frac{2}{9}$ C. $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}$ D. $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}$

题目 5 设 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, $AB=c, AC=b, BC=a$, 若 $\overrightarrow{AO} = \lambda_2 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}$ 则 ()

A. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{b}{c}$

B. $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = \frac{b}{c}$

C. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c^2}{b^2}$

D. $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = \frac{c}{b}$

题目 6 已知 O 为正 $\triangle ABC$ 内的一点, 且满足 $\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} + (1 + \lambda) \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 若 $\triangle OAB$ 的面积与 $\triangle OBC$ 的面积比值为 3, 则 λ 的值为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

C. 2

D. 3

题目 7 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边为 a, b, c , $a = 5, b = 12, c = 13$, I 是 $\triangle ABC$ 内切圆的圆心, 若 $\overrightarrow{AI} = t \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$, 则 $t =$ _____.

题目 8 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3, BC = 4, AC = 5$, I 是 $\triangle ABC$ 内切圆的圆心, 若 $\overrightarrow{AI} = \lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{BC}$, 则 $\lambda_1 + \lambda_2 =$ _____.

题目 9 已知 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心, $\angle A = 60^\circ$, $\frac{\cos B}{\sin C} \overrightarrow{AB} + \frac{\cos C}{\sin B} \overrightarrow{AC} = 2m \overrightarrow{AO}$, 则实数 m 的值为 _____.

题目 10 已知 D 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且满足 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ACD}} =$ _____.