

第03讲 抛物线 (重点题型方法与技巧)

题型一：抛物线的定义及辨析

题目 1 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 A, B 是抛物线 C 上不同两点, 且 A, B 中点的横坐标为 2, 则 $|AF| + |BF| = ()$

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 8

题目 2 抛物线 $C: y^2 = 16x$ 的焦点为 F , 点 M 在 C 上, $|MF| = 12$, 则 M 到 y 轴的距离是 $()$

- A. 4 B. 8 C. 10 D. 12

题目 3 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 M (位于第一象限) 到焦点 F 的距离等于 $2p$, 则直线 MF 的斜率为 _____.

题目 4 过抛物线 $y^2 = px, (p > 0)$ 的焦点 F 作直线 l , 交抛物线于 A, B 两点, 若 $|FA| = 3|FB|$, 则直线 l 的倾斜角等于 _____.

题目 5 已知抛物线 $C: x^2 = 6y$ 的焦点为 F , 直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 若 AB 的中点的纵坐标为 5, 则 $|AF| + |BF| =$ _____.

题型二：抛物线的标准方程

题目 1 分别根据下列条件, 求抛物线的标准方程.

- (1) 准线方程是 $4y + 1 = 0$;
- (2) 抛物线的焦点是双曲线 $16x^2 - 9y^2 = 144$ 的左顶点;
- (3) 抛物线的焦点 F 在 x 轴上, 直线 $y = -3$ 与抛物线交于点 A , $|AF| = 5$.

题目 2 根据下列条件, 求抛物线的标准方程、顶点坐标和准线方程.

- (1) 焦点为 $F(0, 1)$;
- (2) 焦点为 $F(-1, 0)$;
- (3) 焦点为 $F(0, -3)$.

题目 3 写出下列抛物线的焦点坐标和准线方程:

- (1) $y = 2x^2$;
- (2) $y = ax^2 (a \neq 0)$.

题目 4 焦点在 y 轴上的抛物线上一点 $Q(-3, m)$ 到焦点的距离为 5, 求此抛物线的标准方程.

题型三：抛物线上的点到定点的距离及最值

题目 1 已知抛物线 $y^2 = 16x$ 的焦点为 F , P 点在抛物线上, Q 点在圆 $C: (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 4$ 上, 则 $|PQ| + |PF|$ 的最小值为 $()$

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

题目 2 动点 P, Q 分别在抛物线 $x^2 = 4y$ 和圆 $x^2 + y^2 - 8y + 13 = 0$ 上, 则 $|PQ|$ 的最小值为 $()$

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ D. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

题目 3 点 $M(8, 0)$ 到抛物线 $y^2 = 10x$ 上的点的距离的最小值为 _____.

题目 4 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的准线为 $x = -1$, 若 M 为 C 上的一个动点, 设点 N 的坐标为 $(3, 0)$, 则 $|MN|$ 的最小值为 _____.

题目 5 已知点 P 在抛物线 $y^2 = -4x$ 上, 求点 P 到椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$ 左顶点的距离最小值.

题型四: 抛物线上的点到定点和焦点距离的和、差最值

题目 1 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 到 y 轴的距离与到点 $Q(0, 4)$ 的距离之和的最小值为 2, 则实数 p 的值为 ()

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 8

题目 2 点 F 是抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点, 点 $A(4, 2)$, P 为抛物线上一点, P 不在直线 AF 上, 则 $\triangle PAF$ 的周长的最小值是 ()

- A. 4 B. 6 C. $6 + 2\sqrt{2}$ D. $6 + \sqrt{2}$

题目 3 已知抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点是 F , 点 P 是抛物线上的动点, 若 $A(3, 2)$, 则 $|PA| + |PF|$ 的最小值为 _____, 此时点 P 的坐标为 _____.

题目 4 已知点 P 是抛物线 $y^2 = 2x$ 上的动点, 点 P 在 y 轴上的射影是 M , 点 $A(\frac{7}{2}, 4)$, 则 $|PA| + |PM|$ 的最小值是 ()

- A. 5 B. $\frac{9}{2}$ C. 4 D. $\frac{3}{2}$

题目 5 已知 P 为抛物线 $y^2 = 4x$ 上的一个动点, Q 为圆 $x^2 + (y - 4)^2 = 1$ 上的一个动点, 那么点 P 到点 Q 的距离与点 P 到抛物线准线的距离之和的最小值是 _____.

题目 6 已知 P 为抛物线 $y^2 = 4x$ 上一动点, F 为抛物线的焦点, 过点 P 作 $x = -2$ 的垂线, 垂足为 M . 点 Q 为圆 $C: (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$ 上一动点, 则 $|PM| + |PQ|$ 的最小值是 _____.

题型五: 与抛物线有关的轨迹问题

题目 1 若动点 $M(x, y)$ 满足 $5\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} = |3x - 4y + 12|$, 则点 M 的轨迹是 ()

- A. 圆 B. 椭圆 C. 双曲线 D. 抛物线

题目 2 在平面直角坐标系 xOy 中, 动点 $P(x, y)$ 到直线 $x = 1$ 的距离比它到定点 $(-2, 0)$ 的距离小 1, 则 P 的轨迹方程为 ()

- A. $y^2 = 2x$ B. $y^2 = 4x$ C. $y^2 = -4x$ D. $y^2 = -8x$

题目 3 已知动点 M 到点 $F(0, 2)$ 的距离, 与点 M 到直线 $l: y = -2$ 的距离相等.

- (1) 求动点 M 的轨迹方程;
(2) 若过点 F 且斜率为 1 的直线与动点 M 的轨迹交于 A, B 两点, 求线段 AB 的长度.

题目 4 已知点 M 与点 $F(4, 0)$ 的距离比它到直线 $l: x + 6 = 0$ 的距离小 2, 求点 M 的轨迹方程.

题目 5 若点 $P(x, y)$ 满足方程 $5\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} = |3x + 4y + 12|$, 则点 P 的轨迹是 _____.

题目 6 若动圆 M 经过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点且与直线 $x = 2$ 相切, 则圆心 M 的坐标满足的方程是 _____.

题目 7 已知动圆 M 与直线 $y = -2$ 相切, 且与定圆 $C: x^2 + (y - 3)^2 = 1$ 外切, 那么动圆圆心 M 的轨迹方程

为_____.

题型六: 抛物线中的弦长(含焦点弦)问题**★ 角度: 求抛物线中的弦长**

题目 1 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F . 若直线 $x = 4$ 与 C 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 8$, 则 $|AF| = ()$

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

题目 2 已知抛物线 $C_1: y^2 = 12x$ 的焦点为 F , 圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x = 0$, 过 F 的直线 l 与 C_1 交于 A, B 两点, 与 C_2 交于 M, N 两点, 且 A, M 在同一象限, 则 $|AM| + 4|BN|$ 的最小值为_____.

题目 3 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , A, B 是该抛物线上不重合的两个动点, O 为坐标原点, 当 A 点的横坐标为 4 时, $\cos \angle OFA = \frac{3}{5}$.

- (1) 求抛物线 C 的方程;
(2) 以 AB 为直径的圆经过点 $P(1, 2)$, 点 A, B 都不与点 P 重合, 求 $|AF| + |BF|$ 的最小值.

题目 4 设抛物线 C 的方程为 $y = \frac{1}{8}x^2$, 直线 l 过其焦点 F 与抛物线 C 交于点 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$, 则线段 $|AB|$ 的长为_____.

题目 5 过抛物线 $y^2 = 8x$ 焦点的直线与抛物线交于 M, N 两点, 设抛物线的准线与 x 轴的交点为 A , 当 $MA \perp NA$ 时, $|MN| =$ _____.

题目 6 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 到其准线的距离为 4.

- (1) 求 p 的值;
(2) 过焦点 F 且斜率为 1 的直线与抛物线交于 A, B 两点, 求 $|AB|$.

题目 7 已知动圆 C 过定点 $F(0, 1)$, 且与直线 $l_1: y = -1$ 相切, 圆心 C 的轨迹为 E .

- (1) 求动点 C 的轨迹方程;
(2) 已知直线 l_2 交轨迹 E 于两点 P, Q , 且 PQ 中点的纵坐标为 2, 则 $|PQ|$ 的最大值为多少?

题目 8 设 O 为坐标原点, 已知 $\triangle ABC$ 的重心恰为抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F , 若 A, B, C 三点均在 E 上, 且 $|AF| + |BF| + |CF| = 6$.

- (1) 求抛物线 E 的方程;
(2) 若 $|OC| = \sqrt{5}$, 求 $|AB|$.

★ 角度: 根据弦长求参数

题目 1 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的弦 AB 经过它的焦点 F , 弦 AB 的长为 20, 求直线 AB 的方程.

题目 2 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 其通径为 4.

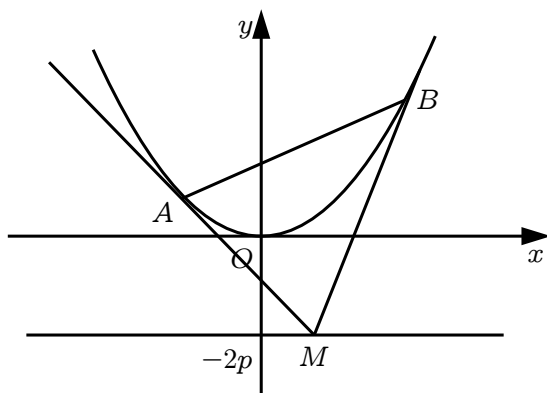
- (1) 求抛物线的标准方程;
(2) 过抛物线焦点 F 作直线 l , 使得直线 l 与抛物线交于 P, Q 两点, 且满足弦长 $|PQ| = 8$, 求直线 l 的斜率.

题目 3 求顶点在原点, 焦点在 x 轴上且截直线 $2x - y + 1 = 0$ 所得弦长为 $\sqrt{15}$ 的抛物线的方程.

题目 4 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 $F(2, 0)$, 直线 $l: y = k(x - 2)$ 与抛物线 C 相交于不同的两点 A, B .

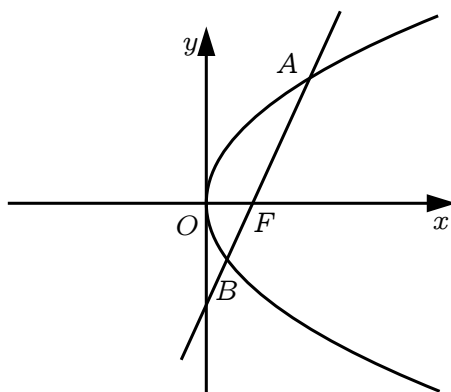
- (1) 求抛物线 C 的方程;
 (2) 若 $|AB| = 9$, 求 k 的值.

题目 5 如图, 设抛物线方程为 $x^2 = 2py (p > 0)$, M 为直线 $y = -2p$ 上任意一点, 过 M 引抛物线的切线, 切点分别为 A, B .



- (1) 求证: A, M, B 三点的横坐标成等差数列;
 (2) 已知当 M 点的坐标为 $(2, 2p)$ 时, $|AB| = 4\sqrt{10}$, 求此时抛物线的方程.

题目 6 已知直线 l 经过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F , 且与抛物线相交于 A, B 两点.



- (1) 若直线 l 的斜率为 1, 求 $|AB|$;
 (2) 若 $|AF| = 3|BF|$, 求直线 l 的方程.

题型七: 抛物线中的中点弦问题

题目 1 已知抛物线的方程是 $y^2 = 4x$, 直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 若弦 AB 的中点为 $(3, 3)$, 则直线 l 的方程为 _____.

题目 2 过点 $Q(4, 1)$ 作抛物线 $y^2 = 8x$ 的弦 AB , 若弦 AB 恰好被点 Q 平分, 则弦 AB 所在直线的方程为 _____.

题目 3 若抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的弦 PQ 的中点为 $M(x_0, y_0) (y \neq 0)$, 则直线 PQ 的斜率为 _____.

题目 4 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , $A(2, x_0)$ 是抛物线 C 上在第一象限内的点, 且 $|AF| = 6$.

- (1) 求抛物线 C 的方程;
 (2) 已知直线 l 交抛物线 C 于 M, N 两点, 若 MN 的中点坐标为 $(3, -2)$, $P(-1, -3)$, 求 $\triangle PMN$ 的面积.

题目 5 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $P(1, 2)$ 在抛物线 C 上.

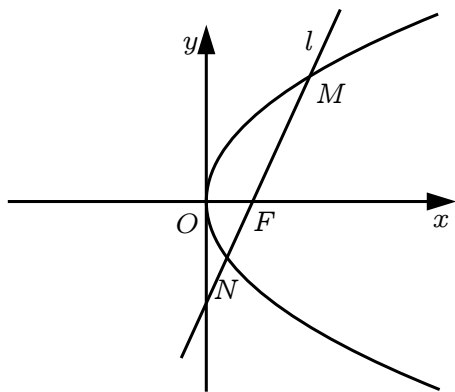
- (1) 求点 F 的坐标和抛物线 C 的准线方程;

(2) 过点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点, 且线段 AB 的中点为 $M(3, -2)$, 求直线 l 的方程及 $|AB|$.

题目 6 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 F 且斜率为 1 的直线与抛物线 C 交于 A, B 两点, 且 AB 的中点的纵坐标为 2. 求 C 的方程.

题目 7 斜率为 1 的直线交抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 于 A, B 两点, 且弦 AB 中点的纵坐标为 2. 求抛物线 C 的标准方程;

题目 8 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 直线 l 交抛物线于 M, N 两点.



(1) 若直线 l 过点 F 且 $\angle xFM = 60^\circ$, 求 $|FM|$;

(2) 若 $P(2, 1)$ 平分线段 MN , 求直线 l 的方程.

题型八: 类型八: 抛物线中参数范围及最值

题目 1 已知 F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 过 F 的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点, 若在 x 轴负半轴上存在一点 $M(m, 0)$, 使得 $\angle AMB$ 为锐角, 则 m 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, -1)$

B. $(-\infty, -1]$

C. $(-\infty, -3)$

D. $(-\infty, -3]$

题目 2 已知抛物线 $C: y^2 = ax (a > 0)$ 的焦点为 F , 若过点 F 且倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线交抛物线 C 于 M, N 两点, 满足 $|MN| = 8$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 过点 $D(m, 0)$ 且斜率为 1 的直线被抛物线 C 截得的弦为 AB , 若 F 在以 AB 为直径的圆内, 求 m 的取值范围.

题目 3 已知动圆 C 过定点 $A(2, 0)$, 且在 y 轴上截得的弦长为 4, 圆心 C 的轨迹为曲线 Γ .

(1) 求 Γ 的方程;

(2) 过点 $P(1, 0)$ 的直线 l 与 Γ 相交于 M, N 两点. 设 $\overrightarrow{PN} = \lambda \overrightarrow{MP}$, 若 $\lambda \in [2, 3]$, 求 l 在 y 轴上截距的取值范围.

题目 4 平面直角坐标系中, 过点 $(1, 0)$ 的圆 C 与直线 $x = -1$ 相切. 圆心 C 的轨迹记为曲线 Γ .

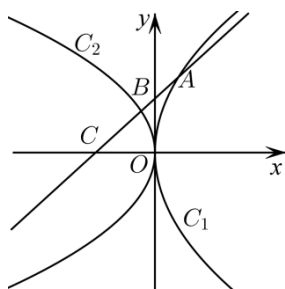
(1) 求曲线 Γ 的方程;

(2) 设 A, B 为曲线 Γ 上的两点, 记 AB 中点为 M , 过 M 作 AB 的垂线交 x 轴于 N .

① 求 $x_N - x_M$;

② 当 $|AB| = 10$ 时, 求 x_N 的最大值.

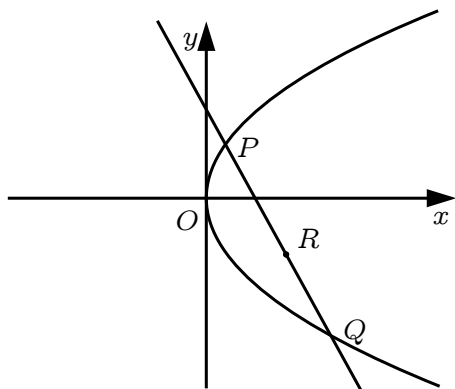
题目 5 如图所示, 曲线 $C_1: y^2 = 2p_1x (p_1 > 0)$, 曲线 $C_2: y^2 = -2px (p > 0)$, 过点 $C(-1, 0)$ 作直线交曲线 C_1 于点 A , 交曲线 C_2 于点 B , 若点 C 在曲线 C_1 的准线上.



(1) 求 p_1 ;

(2) 若存在直线使点 B 为 AC 中点, 求 A 点横坐标 (用 p 表示) 及 AC 斜率的范围.

题目 6 如图, F 为抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 直线 $l: y = kx + m (m > 0)$ 与抛物线交于 P, Q 两点, PQ 中点为 R , 当 $k = -1, m = 2$ 时, R 到 y 轴的距离与到 F 点距离相等.



(1) 求 p 的值;

(2) 若存在正实数 k , 使得以 PQ 为直径的圆经过 F 点, 求 m 的取值范围.

题型九: 抛物线中定点问题

题目 1 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, O 是坐标原点, F 是 C 的焦点, M 是 C 上一点, $|FM| = 4, \angle OFM = 120^\circ$.

(1) 求抛物线 C 的标准方程;

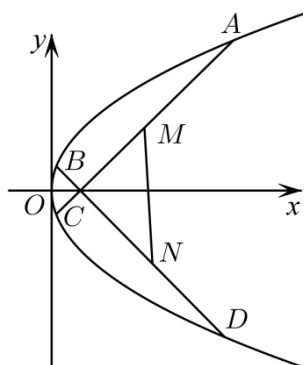
(2) 设点 $Q(x_0, 2)$ 在 C 上, 过 Q 作两条互相垂直的直线 QA, QB , 分别交 C 于 A, B 两点 (异于 Q 点). 证明: 直线 AB 恒过定点.

题目 2 抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点 F 是椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的一个焦点.

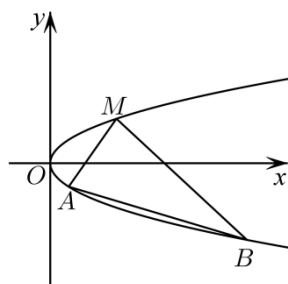
(1) 求 C 的准线方程;

(2) 若 P 是直线 $x - 2y - 4 = 0$ 上的一动点, 过 P 向 C 作两条切线, 切点为 M, N , 试探究直线 MN 是否过定点? 若是, 请求出定点, 若否, 请说明理由.

题目 3 抛物线 $y^2 = 4x$, 过点 $(2, 0)$ 的直线 AC 和 BD 相互垂直 (斜率均存在), M, N 分别是 AC 和 BD 的中点. 求证: 直线 MN 过定点.



题目 4 已知定点 $M(x_0, y_0)$ 在抛物线 $m: y^2 = 2px (p > 0)$ 上, 动点 $A, B \in m$ 且 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, 求证: 弦 AB 必过一定点.



题型十: 抛物线中定值问题

题目 1 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 经过点 F 的动直线 l 交抛物线 C 于 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 两点, 且 $y_1 y_2 = -4$.

- (1) 求抛物线 C 的方程;
- (2) 若直线 $2x + 3y = 0$ 平分线段 AB , 求直线 l 的倾斜角;
- (3) 若点 M 是抛物线 C 的准线上的一点, 直线 MF 、 MA 、 MB 的斜率分别为 k_0 、 k_1 、 k_2 . 求证: 当 $k_0 = 1$ 时, $k_1 + k_2$ 为定值.

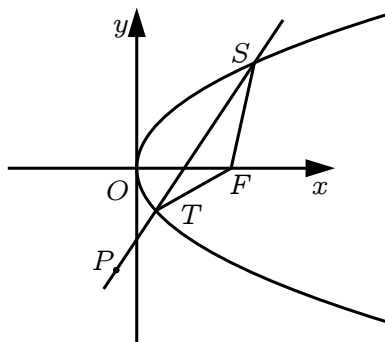
题目 2 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 斜率不为 0 的直线 l 与抛物线 C 相切, 切点为 A , 当 l 的斜率为 2 时, $|AF| = 10$.

- (1) 求 p 的值;
- (2) 平行于 l 的直线交抛物线 C 于 B, D 两点, 且 $\angle BAD = 90^\circ$, 点 F 到直线 BD 与到直线 l 的距离之比是否为定值? 若是, 求出此定值; 否则, 请说明理由.

题目 3 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 F 的直线交 C 于 M, N 两点, $|MN|_{\min} = 4$.

- (1) 求 C 的方程;
- (2) 设点 $D(2p, 0)$, 直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B , 当直线 MN, AB 的斜率存在时, 分别记为 k_1, k_2 . 则 $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为常数, 请说明理由.

题目 4 已知抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 且过 F 的弦长的最小值为 4.



- (1) 求 p 的值;
 (2) 如图, 经过点 P (三象限) 且不过原点的直线 l 与抛物线 Γ 相交于 S, T 两点, 且直线 FS, FT 的斜率分别为 k_1, k_2 . 问: 是否存在定点 P , 使得 $k_1 \cdot k_2$ 为定值 2 若存在, 请求出点 P 的坐标.

题型十一: 抛物线中定直线问题

题目 1 已知抛物线 $C: y^2 = 2x$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是 C 上两个不同的点.

- (1) 求证: 直线 $y_1 y = x_1 + x$ 与 C 相切;
 (2) 若 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -1$, C 在 A, B 处的切线交于点 P , 证明: 点 P 在定直线上.

题目 2 已知圆 M 经过点 $(0, 1)$ 与直线 $y = -1$ 相切, 圆心 M 的轨迹为曲线 C , 过点 $N(0, 2)$ 做直线与曲线 C 交于不同两点 A, B , 三角形 OAB 的垂心为点 H .

- (1) 求曲线 C 的方程;
 (2) 求证: 点 H 在一条定直线上, 并求出这条直线的方程.

题目 3 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且经过点 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

- (1) 求椭圆 C_1 的标准方程;
 (2) 已知抛物线 C_2 的焦点与椭圆 C_1 的右焦点重合, 过点 $P(0, -2)$ 的动直线与抛物线 C_2 相交于 A, B 两个不同的点, 在线段 AB 上取点 Q , 满足 $|AP| \cdot |QB| = |AQ| \cdot |PB|$, 证明: 点 Q 总在定直线上.

题型十二: 抛物线中向量问题

题目 1 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $P(x_0, \sqrt{2}p)$ 在抛物线 C 上, 且 $|PF| = 3$.

- (1) 求抛物线 C 的方程;
 (2) 过焦点 F 的直线 l 与抛物线分别交于 A, B 两点, 点 A, B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -(x_1 + x_2)$, 求直线 l 的方程.

题目 2 已知抛物线 $C: y = 2x^2$, 直线 $y = kx + 2$ 交 C 于 A, B 两点, M 是线段 AB 的中点, 过 M 作 x 轴的垂线交 C 于点 N .

- (1) 证明: 抛物线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行;
 (2) 是否存在实数 k 使 $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 0$, 若存在, 求 k 的值; 若不存在, 说明理由.

题目 3 在平面直角坐标系 xOy 中, F 是抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点, M 是抛物线 C 上位于第一象限内的任意一点, 过 M, F, O 三点的圆的圆心为 N , 点 N 到抛物线 C 的准线的距离为 $\frac{3}{4}$.

- (1) 求抛物线 C 的方程;
 (2) 当过点 $P(4, 1)$ 的动直线 l 与抛物线 C 相交于不同点 A, B 时, 在线段 AB 上取点 Q , 满足 $|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{AQ}| \cdot |\overrightarrow{PB}|$, 证明: 点 Q 总在某定直线上.