

《数学归纳法及其应用举例》教案

云南省曲靖市第一中学 李德安

教学目标：

1. 认知目标：了解数学归纳法的原理，掌握用数学归纳法证题的方法。
2. 能力目标：培养学生理解分析、归纳推理和独立实践的能力。
3. 情感目标：激发学生的求知欲，增强学生的学习热情，培养学生辩证唯物主义的世界观和勇于探索的科学精神。

教学重点：

了解数学归纳法的原理及掌握用数学归纳法证题的方法。

教学难点：

数学归纳法原理的了解及递推思想在解题中的体现。

教学过程：

一. 创设情境，回顾引入

师：本节课我们学习《数学归纳法及其应用举例》（板书）。首先给大家讲一个故事：从前有一个员外的儿子学写字，当老师教他写数字的时候，告诉他一、二、三的写法时，员外儿子很高兴，告诉老师他会写数字了。过了不久，员外要写请帖宴请亲朋好友到家里做客，员外儿子自告奋勇地要写请帖。结果早晨开始写，一直到了晚间也没有写完，请问同学们，这是为什么呢？

生：因为有姓“万”的。

师：对！有姓“万”的。员外儿子万万也没有想到“万”不是一万横，而是这么写的“万”。通过这个故事，你对员外儿子有何评价呢？

生：（学生的评价主要会有两种，一是员外儿子愚蠢，二是员外儿子还是聪明的。）

师：其实员外儿子观察、归纳、猜想的能力还是很不错的，但遗憾的是他猜错了！在数学上，我们很多时候是通过观察→归纳→猜想，这种思维过程去发现某些结论，它是一种创造性的思维过程。那么，我们在以前的学习过程中，有没有也像员外儿子那样猜想过某些结论呢？

生：有。例如等差数列通项公式的推导。

师：很好。我们是由等差数列前几项满足的规律： $a_1 = a_1 + 0d$ ， $a_2 = a_1 + d$ ， $a_3 = a_1 + 2d$ ，

$a_4 = a_1 + 3d$ ，……归纳出了它的通项公式的。其实我们推导等差数列通项公式的方法和员外儿

子猜想数字写法的方法都是归纳法。那么你能说说什么是归纳法，归纳法有什么特点吗？

生：由特殊事例得出一般结论的归纳推理方法，通常叫做归纳法。特点：特殊→一般。

师：对。（投影展示有关定义）

像这种由特殊事例得出一般结论的归纳推理方法，通常叫做归纳法。根据推理过程中考察的对象是涉及事物的一部分还是全部，分为不完全归纳法和完全归纳法。

完全归纳法是一种在研究了事物的所有（有限种）特殊情况后得出一般结论的推理方法，又叫做枚举法。那么，用完全归纳法得出的结论可靠吗？

生：（齐答）可靠。

师：用不完全归纳法得出的结论是不是也是可靠的呢？为什么？

生：不可靠。这是因为只考察了部分情况，结论不一定具有普遍性。

师：是不可靠的。不妨再举一例 $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-1000)$ 容易验证 $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, \dots, a_{1000} = 0$ ，如果由此作出结论——对于任何 $n \in N^*$ ， $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-1000) = 0$ 都成立，那就是错误的。事实上， $a_{1001} = 1000! \neq 0$ 。

二. 设置问题，引导探究

师：请问同学们你们玩过多米诺骨牌吗？

生：（没）玩过。（课堂气氛由刚才的沉思变得开始活跃）

师：无论玩没玩过，下面我们一起来玩一下。（投影仪上进行生动、形象的骨牌演示）在观看骨牌玩法时，请思考：满足什么条件，骨牌可以全部倒下？

生：假设第 $k (k \in N^*)$ 张骨牌倒下，保证第 $k+1$ 张骨牌倒下。

师：这样就保证了可以递推下去，骨牌就可以全部倒下了，是吗？

生：不是。我们不知道第 k 张骨牌是否倒下了，从而我们是假设第 k 张骨牌倒下。若第 k 张骨牌倒下，需要第 $k-1$ 张骨牌倒下；若第 $k-1$ 张骨牌倒下，需要第 $k-2$ 张骨牌倒下，……，最后递归到需要第 1 张骨牌倒下，所以，还要有一个条件：第一张骨牌倒下。

师：大家说有了这两个条件，骨牌是不是可以顺次的倒下呢？

生：是。

师：上面同学说得很好，要使骨牌全部倒下应满足两个条件（投影显示）第一个条件是：第一张骨牌倒下；第二个条件是：假设第 k 张骨牌倒下，第 $k+1$ 张骨牌一定倒下。

现在你能不能利用这种思想（递推思想）来证明等差数列通项公式呢？是不是应该建立一种递推顺序呢？

生： $n=1$ 时结论正确 $\Rightarrow n=2$ 时结论正确 $\Rightarrow n=3$ 时，结论正确， $\Rightarrow \cdots \Rightarrow n=k$ 时结论正确 $\Rightarrow n=k+1$ 时结论正确 $\Rightarrow \cdots$

师：由于这个过程推理方法是一样的，能否把这个过程一般化呢？

生：假设 $n=k$ 时结论正确 $\Rightarrow n=k+1$ 时结论也正确。

师：这样就保证了递推。下面你能证明等差数列通项公式了吗？

三. 解决问题，引出概念

（学生共答，教师板书）

证明：（1）当 $n=1$ 时，左边 $= a$ ，右边 $= a_1 + 0 \cdot d = a_1$ ，等式是成立的。

（2）假设当 $n=k$ 时等式成立，就是 $a_k = a_1 + (k-1)d$ ，下面看看是否能推出 $n=k+1$ 时等式也成立，那么 a_{k+1} 等于什么？

生： $a_{k+1} = a_1 + [(k+1)-1]d$ 。

师：哦！看来 $n=k+1$ 时等式也成立，这样做对吗？

生：（齐答）不对。

师：注意在证 $n=k+1$ 时，一定要用到归纳假设， $n=k$ 时等式成立这一步，因为这样才能保证递推，那么 a_{k+1} 与 a_k 有什么关系呢？（学生齐答，教师继续板书）

$a_{k+1} = a_k + d = [a_1 + (k-1)d] + d = a_1 + [(k+1)-1]d$ 。这就是说，当 $n=k+1$ 时，等式也成立，

大家说有了这两步，是不是就证明了等差数列通项公式的正确性了呢？

生： $n=1$ 时等式成立 $\Rightarrow n=2$ 时等式成立 $\Rightarrow n=3$ 时等式成立 $\Rightarrow \cdots$ 所以 n 取任何正整数等式都成立。

师：这种证明方法叫做数学归纳法，那么你能谈谈什么是数学归纳法，及其用数学归纳法证题的步骤是怎样的呢？

生：（在学生交流，教师引导完善下）数学归纳法（证明一个与正整数有关的命题的步骤）是：（投影跟踪给出）。

（1）证明当 n 取第一个值 n_0 （例如 $n_0=1$ 或 2 等）时结论正确；

（2）假设当 $n=k$ （ $k \in N^*$ ，且 $k \geq n_0$ ）时结论正确，证明当 $n=k+1$ 时结论也正确。

根据（1）和（2），可知命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都正确。所以数学归纳法是证明一个与正整数有关的命题的一种方法。概括起来就是“两个步骤，一个结论。”

师：用数学归纳法证题，实质是一种什么思想？

生：递推思想。

师：在递推中，两个步骤各起到了怎样的作用呢？

生：第一步是奠基，是递推的基础，第二步是保证能够递推，是递推的依据。（此时投影上注明）

师：这两步可以缺少哪一步吗？

生：（学生举例说明，教师点评，投影上也举出实例，从而明确）两步缺一不可。

师：我们已经知道，由不完全归纳法得到的结论不可靠，因而必须作证明。若命题是与正整数有关的，证明可考虑用数学归纳法。下面请同学们看一道例题。

例 1：用数学归纳法证明： $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ （师生共同证题，总结出用数学归纳法证题的技巧是“一凑假设，二凑结论”。）

练习：用数学归纳法证明：

1. $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ 。

2. $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ 。

3. 首项是 a_1 ，公比是 q 的等比数列的通项公式是 $a_n=a_1q^{n-1}$ 。

四. 归纳小结，深化主题

师：本节的中心内容是什么？为什么要学习数学归纳法？什么是数学归纳法？体现什么思想？

生：（学生积极回答，从而自主地构建本节课的知识网络。）

（投影展示）小结：

1. 归纳法 $\begin{cases} \text{不完全归纳法} \\ \text{完全归纳法} \end{cases}$

特点：特殊 $\rightarrow$ 一般

2. 数学归纳法概念及证题步骤。

3. 数学归纳法实质是递推思想。

五. 布置作业:
P₇₆ 1, 2

《数学归纳法及其应用举例》教案说明

云南省曲靖市第一中学 李德安

一、数学归纳法的地位与作用

1. 数学归纳法在教材中的地位与作用

数学归纳法是证明与正整数有关命题的一种重要的证明方法，它起源于正整数的归纳公理或最小数原理，而演变成各种形式。《数学归纳法及其应用举例》是人教版高中数学新教材第三册第二章“极限”中第一部分的知识。通过对数学归纳法的学习，可对中学数学中的许多重要结论，如等差、等比数列的通项公式及前 n 项和公式、二项式定理以及中小学很多思维上开拓创新的题目可以进行很好地证明，使很多数学结论更加严密，也为后继学习打下了良好的基础。

2. 数学归纳法对思维发展的地位与作用

人类对问题的研究，结论的发现认同，思维流程通常是观察→归纳→猜想→证明。猜想的结论对不对，证明是尤为关键的。运用数学归纳法解题时，有助于学生对等式的恒等变形，不等式的放缩，数、式、形的构造与转化等知识加强训练与掌握。对数学归纳法原理的理解，蕴含着递归与递推，归纳与推理，特殊到一般，有限到无限等数学思想和方法，对思维的发展起到了完善与推动的作用。

二、数学归纳法的本质与教学目标定位

数学归纳法体现了递推的思想，数学归纳法的本质就是利用递推思想去证题的一种方法。一堂精彩的课不仅仅是传授给学生知识，更重要的是对学生能力的培养和情感的熏陶。根据本节课的特点及布鲁纳的教学目标，特设置一条明线：如何验证等差数列通项公式的正确性；一条暗线：如何验证由不完全归纳法得到的与正整数有关命题的真假。将本节课的教学目标定为三重目标：①认知目标：了解数学归纳法的原理，掌握用数学归纳法证题的方法与技巧；②能力目标：培养学生理解分析、归纳推理和独立实践的能力；③情感目标：激发学生的求知欲，增强学生的学习热情，培养学生辩证唯物主义的世界观和勇于探索的科学精神。

三、学法、教法特点及预期效果

1. 学法指导

高中学生具有一定的逻辑思维和推理演算能力，并且对事物的认识逐步的由感性上升到理性，个体的发展由外显转化为内隐，这些都是我们学好本节的有利因素。但不足的是，学生考虑问题的全面性及课堂气氛的活跃性还不够好。为此，根据教育学家奥苏伯尔关于学科和认知结构组织的假设及其“先行组织者”技术与美国心理学家布鲁纳倡导的发现法教育理论，在学法方面我采用“导—思—点拨—练”的学习过程，让学生自主参与知识的发生、发展、形成过程。在这个过程中对学生进行以下学法指导。

(1) 温故知新法

引导学生回顾等差数列通项公式的推导过程，从而引出归纳法的概念，其又分为完全归纳法和不完全归纳法，如何验证等差数列通项公式的正确性呢？进而引出数学归纳法。

(2) 体验感悟法

让学生认真观看多米诺骨牌实验，从而感悟数学归纳法原理。

(3) 质疑法

引导学生主动质疑，解决问题，得到方法。

(4) 练习法

通过类比，练习用数学归纳法证题，进一步体会数学归纳法原理。

2. 教学特点

本节课在教法上贯彻如下两个原则：

一是建构主义原则。学生是教学的主体，学生学习数学是一种再创造过程，他们通过吸收与融合原知识的过程来建立理解的层次结构。皮亚杰的认知结构学说：“所有的认知结构，结构再构建，构成复杂的结构，不断发展。”数学知识不能从一个人迁移到另一个人，一个人的数学知识必须基于个人对经验的归纳、交流，通过反思来主动建构，这就是建构主义的数学学习观。为此教学设计是通过等差数列通项公式的证明及多米诺骨牌实验引导学生积极主动的进行建构。

二是寓教于乐原则。实践证明，学生在积极愉快的情形下，学习效率会大幅提高；在宽松的情形下，能够最大限度地激发其聪明才智和创造性。结合本节课特点，将知识性与趣味性相结合，以吸引学生喜欢数学，自觉地学习数学，以调动学生的“心理场”。比如，通过讲员外儿子学写数字，引进了归纳法的概念，同时学生也体会到通过观察、归纳、猜想一些结论，是很好的一个思维流程，但其结果不可靠。通过多米诺骨牌玩法的演示，诠释了递推思想。

3. 预期效果

通过学法指导，教法特点实现三重目标。

四、教学诊断与评价

1. 教学诊断

证明数学归纳法的第一步是容易实现的，第二步是重点也是难点，在验证 $n = k + 1$ 命题的正确性时，极易脱离归纳假设，为此应重申递推思想，总结出证题技巧“一凑假设，二凑结论”。

2. 教学评价

整个教学设计重点突出，层次分明，环环紧扣，温故知新。抓住知识的内在联系，教师处处启发学生自己主动去获取知识，使教师的主导作用和学生的主体作用得以充分发挥，体现了素质教育的指导思想。生活事例贯穿整个教学过程，使数学知识人文化，使抽象的问题具体化，调动了学生学习的积极性、主动性。使学生学有所得，学有所用，进一步激发了学生学习的兴趣，培养了学生科学的思维态度。