

立体几何拔高

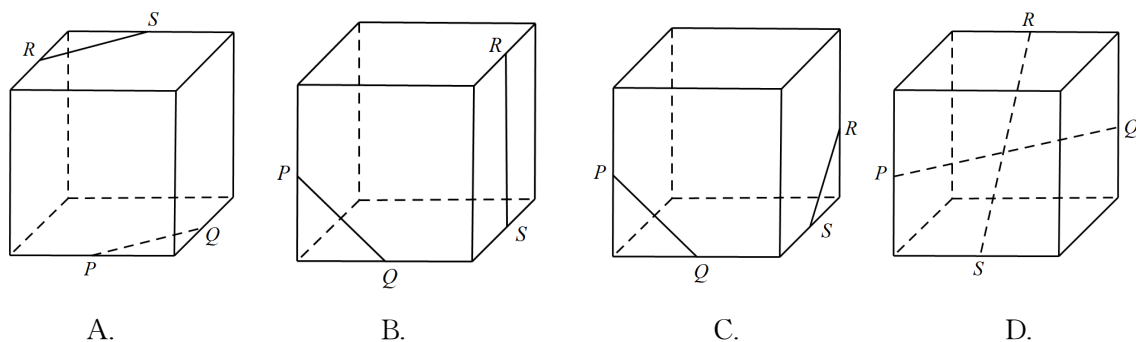
题目 1 过 $\triangle ABC$ 所在平面 α 外的一点 P , 作 $PO \perp \alpha$, 垂足为 O , 若点 P 到直线 AB , AC 和 BC 的距离都相等, 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 内心 B. 外心 C. 重心 D. 垂心

题目 2 体积相等的正方体、球、等边圆柱 (轴截面为正方形的圆柱) 全面积分别为 S_1 , S_2 , S_3 , 那么它们的大小关系为 ()

- A. $S_1 < S_2 < S_3$ B. $S_1 < S_3 < S_2$ C. $S_2 < S_1 < S_3$ D. $S_2 < S_3 < S_1$

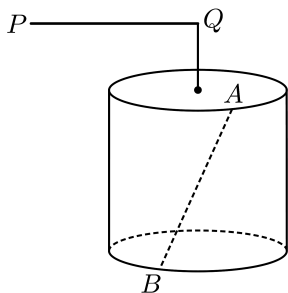
题目 3 (2022·上海·高二单元测试) 正方体上点 P , Q , R , S 是其所在棱的中点, 则直线 PQ 与 RS 异面的图形是 ()



题目 4 若圆锥的侧面展开图是半径为 4, 中心角为 $\frac{5\pi}{3}$ 的扇形, 则由它的两条母线所确定的截面面积的最大值为 ()

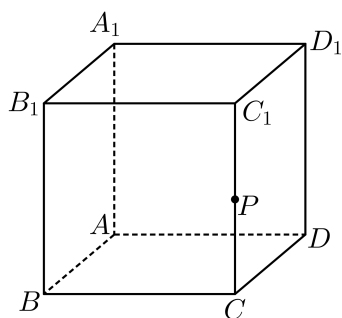
- A. $\frac{5\sqrt{11}}{9}$ B. 4 C. 8 D. $\frac{20\sqrt{11}}{9}$

题目 5 如图所示, 一个灯笼由一根提竿 PQ 和一个圆柱组成, 提竿平行于圆柱的底面, 在圆柱上下底面圆周上分别有两点 A , B , AB 与圆柱的底面不垂直, 则在圆柱绕着其旋转轴旋转一周的过程中, 直线 PQ 与直线 AB 垂直的次数为 ()



- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

题目 6 如图, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 点 P 是棱 CC_1 的中点, 设直线 AB 为 a , 直线 A_1D_1 为 b . 对于下列两个命题: ①过点 P 有且只有一条直线 l 与 a , b 都相交; ②过点 P 有且只有两条直线 l 与 a , b 都成 75° 角. 以下判断正确的是 ()

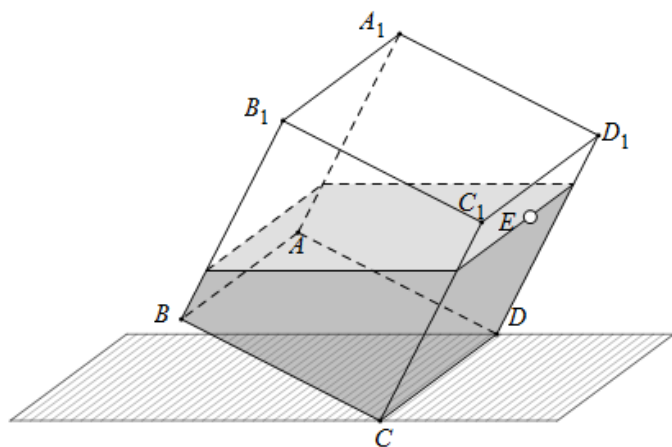
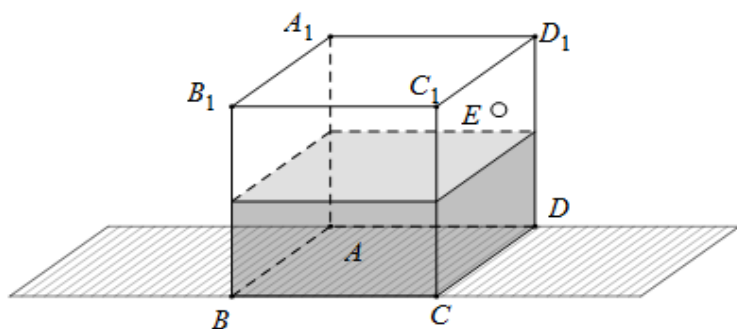


- A. ①为真命题,②为真命题
B. ①为真命题,②为假命题
C. ①为假命题,②为真命题
D. ①为假命题,②为假命题

题目 7 从正方体八个顶点的两两连线中任取两条直线 a, b , 且 a, b 是异面直线, 则 a, b 所成角的余弦值的所有可能取值构成的集合是 ()

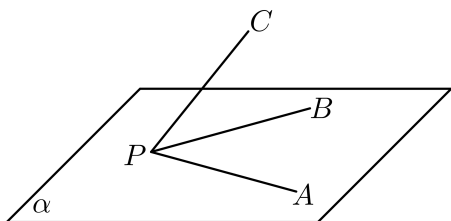
- A. $\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\}$;
B. $\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\}$
C. $\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\}$;
D. $\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

题目 8 如图, 水平桌面上放置一个棱长为 4 的正方体水槽, 水面高度恰为正方体棱长的一半, 在该正方体侧面 CDD_1C_1 上有一个小孔 E , E 点到 CD 的距离为 3, 若该正方体水槽绕 CD 倾斜 (CD 始终在桌面上), 则当水恰好流出时, 侧面 CDD_1C_1 与桌面所成角的正切值为 ()

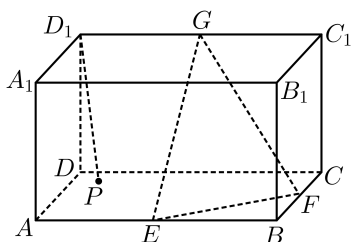


- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. 2

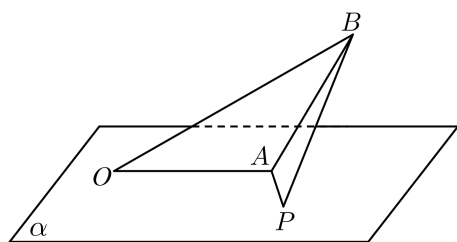
题目 9 如图, PA, PB, PC 是从点 P 引出的三条射线, 他们之间每两条的夹角都是 60° , 则直线 PC 与平面 PAB 所成角的大小为 _____.



题目 10 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD=DD_1=1, AB=\sqrt{3}$, E, F, G 分别为 AB, BC, C_1D_1 的中点, 点 P 在平面 $ABCD$ 内, 若直线 $D_1P \parallel$ 平面 EFG , 则线段 D_1P 长度的最小值是 _____.

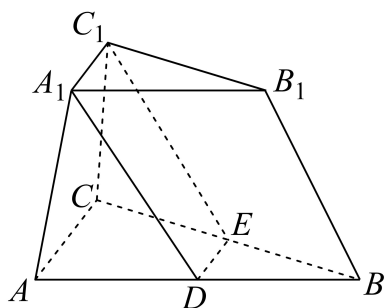


题目 11 如图, 平面 $OAB \perp$ 平面 α , $OA \subset \alpha$, $OA=AB$, $\angle OAB=120^\circ$. 平面 α 内一点 P 满足 $PA \perp PB$, 记直线 OP 与平面 OAB 所成角为 θ , 则 $\tan \theta$ 的最大值是 _____.



题目 12 设地球半径为 R , 地球上北纬 30° 圈上有 A, B 两点, 点 A 在西经 10° , 点 B 在东经 110° , 则点 A 和 B 两点东西方向的距离是 _____.

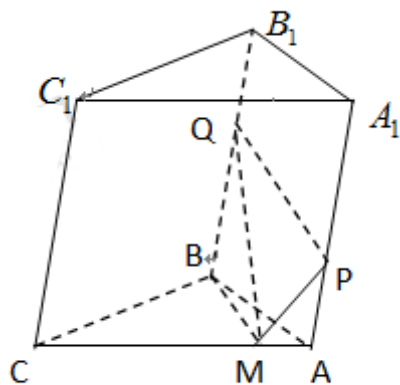
题目 13 如图所示, 过三棱台上底面的一边 A_1C_1 , 作一个平行于棱 BB_1 的截面, 与下底面的交线为 DE . 若 D, E 分别是 AB, BC 的中点, 则 $\frac{V_{A_1B_1C_1-DBE}}{V_{A_1B_1C_1-ABC}} =$ _____.



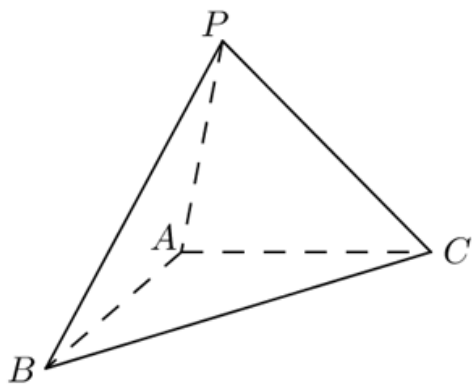
题目 14 两个相同的正四棱锥底面重合组成一个八面体, 可放入棱长为 2 的正方体中, 重合的底面与正方体的某一个面平行, 且八面体的各顶点均在正方体的表面上, 将满足上述条件的八面体称

为正方体的“正子体”. 则此正子体的表面积 S 的取值范围是 _____

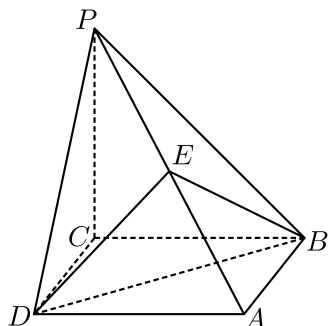
题目 15 如图, 在棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱 A_1A 和 B_1B 上各有一个动点 P, Q , 且满足 $A_1P=BQ$, M 是棱 CA 上的动点, 则 $\frac{V_{M-ABQP}}{V_{ABC-A_1B_1C_1}-V_{M-ABQP}}$ 的最大值是 _____.



题目 16 三棱锥 $P-ABC$ 满足: $AB \perp AC$, $AB \perp AP$, $AB=2$, $AP+AC=4$, 则该三棱锥的体积 V 的取值范围是 _____.



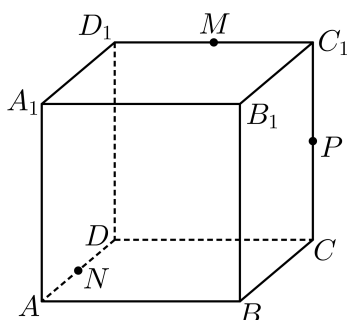
题目 17 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, $\angle ABC=60^\circ$, $PC \perp$ 平面 $ABCD$, $PC=1$, E 为 PA 的中点.



- (1) 求证: 平面 $EDB \perp$ 平面 $ABCD$;
- (2) 求二面角 $A-EB-D$ 的正切值;

(3) 求点 E 到平面 PBC 的距离.

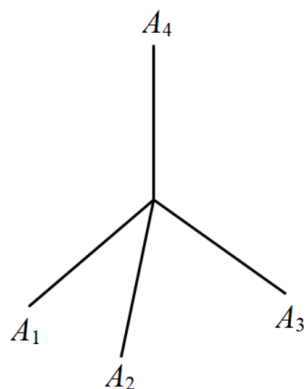
题目 18 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N, P 分别为 C_1D_1, AD, CC_1 的中点, 棱长为 1.



(1) 求证: $MP \parallel$ 平面 BC_1A_1 ;

(2) 过 M, N, P 三点作正方体的截面, 画出截面 (保留作图痕迹), 并计算截面的周长.

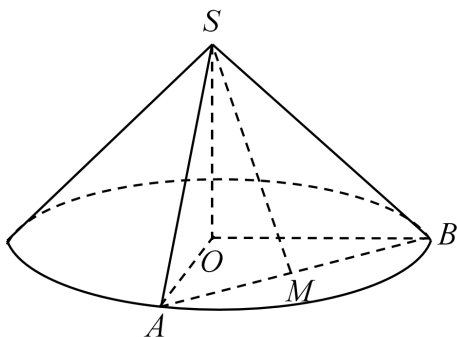
题目 19 如图, 某钢性“钉”由四条线段组成, 其结构能使它任意抛至水平面后, 总有一端所在的直线竖直向上, 并记组成该“钉”的四条等长的线段公共点为 O , 钉尖为 $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$.



(1) 当 A_1, A_2, A_3 在同一水平面内时, 求 OA_1 与平面 $A_1A_2A_3$ 所成角的大小 (结果用反三角函数值表示);

(2) 若该“钉”的三个端尖所确定的三角形的面积为 $2\sqrt{3}\text{cm}^2$, 要用某种线性材料复制 100 枚这种“钉” (损耗忽略不计), 共需要该种材料多少厘米?

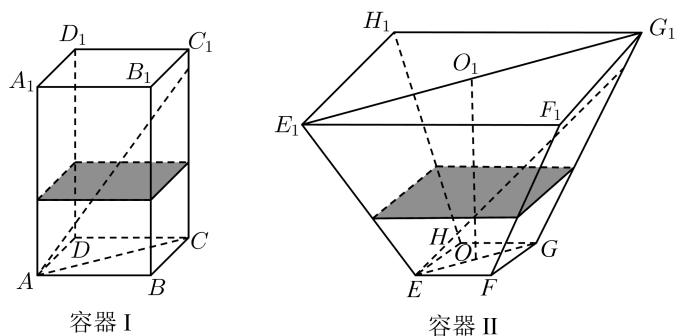
题目 20 已知圆锥的顶点为 S , 底面圆心为 O , 母线 SA 的长为 $2\sqrt{2}$.



(1) 若圆锥的侧面积为 $2\sqrt{2}\pi$, 求圆锥的体积

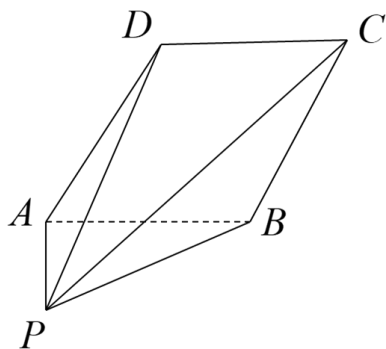
(2) A, B 是底面圆周上的两个点, $\angle AOB = 90^\circ$, M 为线段 AB 的中点, 若圆锥的底面半径为 2, 求直线 SM 与平面 SOA 所成角的大小.

题目 21 如图,水平放置的正四棱柱形玻璃容器 I 和正四棱台形(正四棱锥被平行于底面的平面截去一个小正四棱锥后剩下的多面体)玻璃容器 II 的高均为 32cm,容器 I 的底面对角线 AC 的长为 $10\sqrt{7}$ cm,容器 II 的两底面对角线 EG 、 E_1G_1 的长分别为 14cm 和 62cm. 分别在容器 I 和容器 II 中注入水,水深均为 12cm. 现有一根玻璃棒 l ,其长度为 40cm. (容器厚度,玻璃棒粗细均忽略不计)



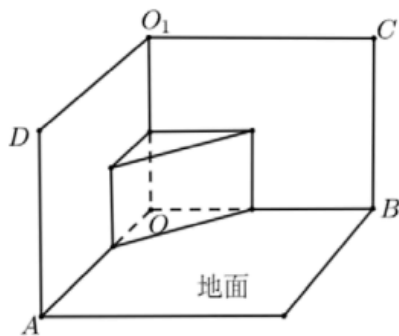
- (1) 求容器 I、容器 II 的容积;
- (2) ①将 l 放在容器 I 中, l 的一端置于点 A 处,另一端置于侧棱 CC_1 上,求 l 没入水中部分(水面以下)的长度;
- ②将 l 放在容器 II 中, l 的一端置于点 E 处,另一端置于侧棱 GG_1 上,求 l 没入水中部分(水面以下)的长度.

题目 22 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\triangle PAB$ 是边长为 2 的等边三角形, $PD \perp AB$, $PD = \sqrt{6}$.



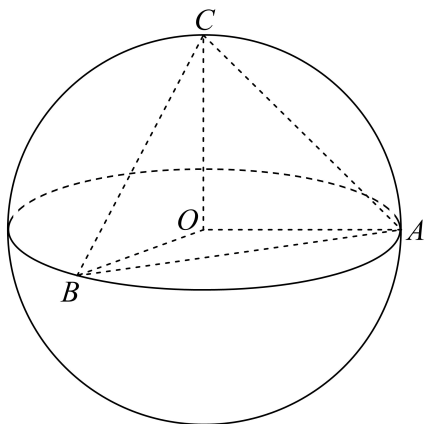
- (1) 设 AB 中点 M , 求证: $DM \perp$ 平面 PAB ;
- (2) 求平面 PAB 和平面 PCD 所成锐二面角的大小.

题目 23 如图所示,某农户拟在院子的墙角处搭建一个谷仓,墙角可以看作如图所示的图形,其中 OA 、 OB 、 OO_1 两两垂直(OA 、 OB 、 OO_1 均大于 2 米). 该农户找了一块长、宽分别为 2 米和 1 米的矩形木板. 将木板的一边紧贴地面,另外一组对边紧贴墙面,围出一个三棱柱(无盖)形的谷仓.

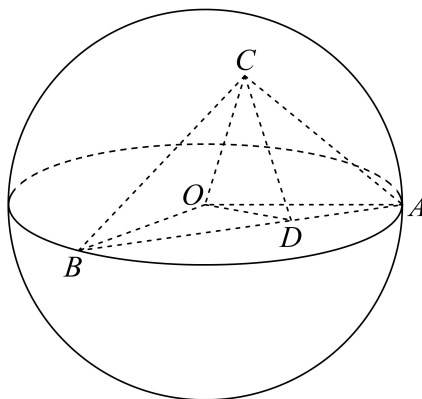


- (1) 若木板较长的一边紧贴地面,且围成的谷仓体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 立方米,问:此时木板与两个墙面所成的锐二面角大小分别为多少?
- (2) 应怎样摆放木板,才能使得围成的谷仓容积最大? 并求出该最大值.

题目 24 如图所示,已知球 O 的半径为 2,在球 O 的表面上有三点 A, B, C ,且 O, A, B, C 四点不共面, $\angle AOB = 120^\circ$.



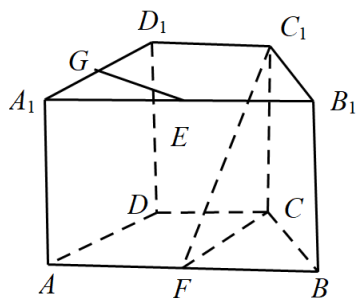
第(1)(2)小题图



第(3)小题图

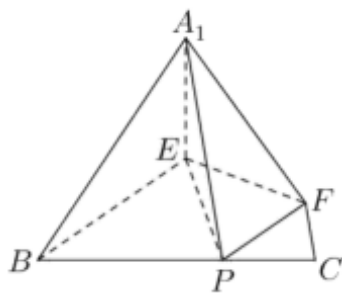
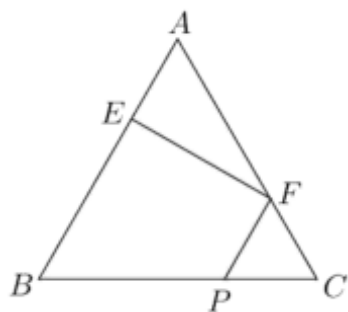
- (1) 若 $CO \perp$ 平面 AOB ,求球心 O 到平面 ABC 的距离;
- (2) 若 $CO \perp$ 平面 AOB ,一个经过点 A, B, C 的球 O' 也经过点 O ,求球 O' 的表面积;
- (3) 若线段 AB 上存在一点 D ,使得 $AD = CD$,求三棱锥 $O - BCD$ 体积的最大值.

题目 25 如图,在直四棱柱中,底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $BC = CD = 2$, $AA_1 = 2$, E, F, G 分别是棱 A_1B_1, AB, A_1D_1 的中点.



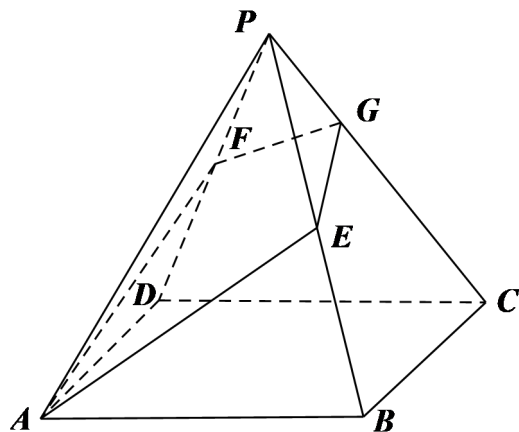
- (1) 证明:直线 $GE \perp$ 平面 FCC_1 ;
- (2) 求二面角 $B - FC_1 - C$ 的大小.

题目 26 在正三角形 ABC 中, E 、 F 、 P 分别是 AB 、 AC 、 BC 边上的点, 满足 $AE:EB = CF:FA = CP:PB = 1:2$ (如下左图). 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 折起到 $\triangle A_1EF$ 的位置, 使二面角 A_1-EF-B 成直二面角, 连结 A_1B 、 A_1P (如下右图).



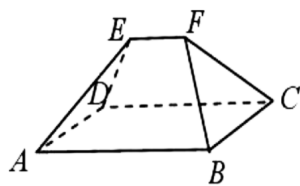
- (1) 求证: $A_1E \perp$ 平面 BEP ;
- (2) 求二面角 $B-A_1P-F$ 的大小 (用反三角函数表示).

题目 27 如图, 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA = AB = 2\sqrt{2}$, E 、 F 分别为 PB 、 PD 的中点, 平面 AEF 与棱 PC 的交点为 G .



- (1) 求异面直线 AE 与 PF 所成角的大小;
- (2) 求平面 $AEFG$ 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的大小;
- (3) 求点 G 的位置.

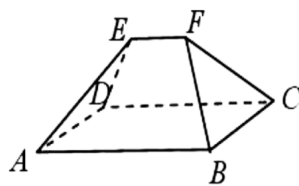
题目 28 《九章算术》是古代中国乃至东方的第一部自成体系的数学专著, 书本记载了一种名为“刍甍”的五面体 (如图 1). 其中四边形 $ABCD$ 为矩形, $EF \parallel AB$, $\triangle EAD$ 和 $\triangle FBC$ 是三角形, “刍甍”字面意思为茅草屋顶. 图 2 是一栋农村别墅, 为全新的混凝土结构. 它由上部屋顶和下部主体两部分组成. 如图 3, 屋顶五面体为“刍甍”, 其中前后两坡屋面 $ABEF$ 和 $CDEF$ 是全等的等腰梯形, 左右两坡屋面 EAD 和 FBC 是全等的三角形, 点 F 在平面 $ABCD$ 和 BC 上射影分别为 H , M , 已知 $HM = 5$ 米, $BC = 10$ 米, 梯形 $ABEF$ 的面积是 $\triangle FBC$ 面积的 2.2 倍. 设 $\angle FMH = \theta (0 < \theta < \frac{\pi}{4})$.



(1)



(2)

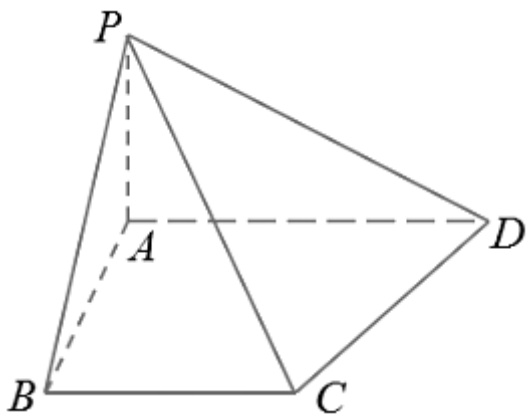


(3)

(1) 求屋顶面积 S 关于 θ 的函数关系式；

(2) 已知上部屋顶造价由屋顶面积确定，造价为 600 元/平方米，下部主体造价由高度确定，造价为 9600 元/米。现欲造一栋上、下总高度为 6 米的别墅，试问：当 θ 为何值时，总造价最低？

题目 29 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ ， $AB = BC = a$ ， $\angle ADC = \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ 且 $PA = a$ 。



(1) 求直线 AD 到平面 PBC 的距离；

(2) 求出点 A 到直线 PC 的距离；

(3) 在线段 AD 上是否存在一点 F ，使点 A 到平面 PCF 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ 。

题目 30 如图，将正四面体每条棱三等分，截去顶角所在的小正四面体，余下的多面体就成为一个半正多面体，亦称“阿基米德体”。点 A, B, M 是该多面体的三个顶点，点 N 是该多面体外接球表面上的动点，且总满足 $MN \perp AB$ ，若 $AB = 4$ ，则该多面体的表面积为 _____；点 N 轨迹的长度为 _____。

