

成都七中2026 届高三上学期《空间向量与立体几何》单元测试

参考答案及提示

一、选择题:

1.A 2.B 3.D 4.C 5.A 6.D

7.C 取 AB 的中点为 O' , 连接 PO, OO', AE , 以点 O 为原点, , 由题意得 $PO = 3$, 所以

$A(3, -3, 0), B(3, 3, 0), P(0, 0, 3)$, 则 $\overrightarrow{AO} = (-3, 3, 0)$, 设 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BP} (0 \leq \lambda \leq 1)$,

$E(3-3\lambda, 3-3\lambda, 3\lambda), \overrightarrow{AE} = (-3\lambda, 6-3\lambda, 3\lambda), |\overrightarrow{AE}| = \sqrt{27\lambda^2 - 36\lambda + 36}, \left| \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AO}|} \right| = 3\sqrt{2}$, 因此点 E 到

直线 AO 的距离 $d = \sqrt{|\overrightarrow{AE}|^2 - \left| \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AO}|} \right|^2} = \sqrt{27\lambda^2 - 36\lambda + 18} = \sqrt{27\left(\lambda - \frac{2}{3}\right)^2 + 6}$, 当 $\lambda = \frac{2}{3}$ 时, d 取

最小值 $\sqrt{6}$, 即线段 PB 上的动点 E 到直线 AO 的距离的最小值为 $\sqrt{6}$. 故选 C.

8.B 平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的法向量可取 $\vec{m} = (A, B, C)$.

证明如下: 设 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 为平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的任意两个点,

则 $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$, 两式相减得

$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0$ 即 $\vec{m} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$, 即 $\vec{m} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$, 所以平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的法向量可

取 $\vec{m} = (A, B, C)$.

因为 A, B, C 不同时为 0, 所以不妨令 $C \neq 0$, 平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 上可取点 $G\left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$,

所以 $\overrightarrow{GH} = \left(x_0, y_0, z_0 + \frac{D}{C}\right)$, 则点 H 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{GH} \cdot \vec{m}|}{|\vec{m}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

D.教材 44 页习题 17, 答案错误, 故选 B;

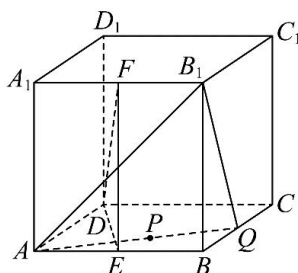
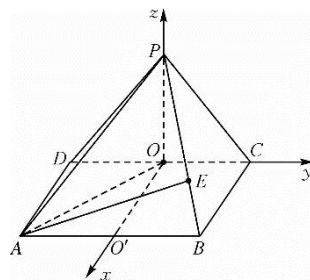
二、多选题

9.ACD 10.ABD. 11.ACD

11.A 项, 如图, 取线段 BC 的中点 Q , 连接 AQ, DE .

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}, \lambda, \mu \in (0, 1], \text{ 若 } \lambda = 2\mu, \text{ 则 } \overrightarrow{AP} = 2\mu \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \right) = 2\mu \overrightarrow{AQ}$$

则 A, P, Q 三点共线, 即点 P 在线段 AQ (不包含点 A) 上运动;



由 Q, E 分别是线段 BC, AB 的中点, 则 $\triangle ABQ$ 与 $\triangle DAE$ 全等, 则 $\angle QAB = \angle ADE$,

$$\angle QAB + \angle DEA = \angle ADE + \angle DEA = \frac{\pi}{2},$$

所以 $AQ \perp DE$. 由 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $EF \parallel AA_1$, 得 $EF \perp$ 平面 $ABCD$, $AQ \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $EF \perp AQ$,

又 $EF \subset$ 平面 DEF , $DE \subset$ 平面 DEF , $EF \cap DE = E$, 所以 $AQ \perp$ 平面 DEF , 又 $AQ \subset$ 平面 AB_1P ,

所以平面 $AB_1P \perp$ 平面 DEF , 故 A 正确;

B 项, $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$, $\lambda, \mu \in (0, 1]$ 若 $\lambda = \mu$, 则 $\overrightarrow{AP} = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \lambda \overrightarrow{AC}$, 则 A, P, C 三点共线, 即点 P 在线段 AC (不包含点 A) 上运动; 如图, 以 D 为坐标原点, 分别以 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 所在直线为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系, 由 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AC} = (-2\lambda, 2\lambda, 0)$,

则 $\overrightarrow{D_1P} = \overrightarrow{D_1A} + \overrightarrow{AP} = (2, 0, -2) + (-2\lambda, 2\lambda, 0) = (2 - 2\lambda, 2\lambda, -2)$, 又 $\overrightarrow{A_1C_1} = (-2, 2, 0)$,

$$\text{所以 } \cos \overrightarrow{D_1P}, \overrightarrow{A_1C_1} = \frac{\overrightarrow{D_1P} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{D_1P}| |\overrightarrow{A_1C_1}|} = \frac{-1 + 2\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 - \lambda + 1}},$$

$$\left(\frac{-1 + 2\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 - \lambda + 1}} \right)^2 = \frac{4\lambda^2 - 4\lambda + 1}{4(\lambda^2 - \lambda + 1)} = 1 - \frac{3}{4(\lambda^2 - \lambda + 1)}, \text{ 因为 } \lambda \in (0, 1], \text{ 则 } \lambda^2 - \lambda + 1 = \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \in \left[\frac{3}{4}, 1 \right],$$

$1 - \frac{3}{4(\lambda^2 - \lambda + 1)} \in \left[0, \frac{1}{4} \right]$, $|\cos \overrightarrow{D_1P}, \overrightarrow{A_1C_1}| \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$, 因为 D_1P 与 A_1C_1 所成角锐角或直角, 故 D_1P 与 A_1C_1 所成角的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$, 故 B 错误; C 项, 如图, 连

接 NG . 若 $\lambda + \mu = \frac{3}{2}$, 由 $0 < \lambda \leq 1$, $0 < \mu \leq 1$ 可得 $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$,

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{3}{2} - \lambda \right) \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BD}, \quad \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1,$$

与 C 项同理可得, 点 P 在线段 NG 上运动 NG , NG 平行 BD , 故三棱锥 $P - BDF$ 的体积为定值;

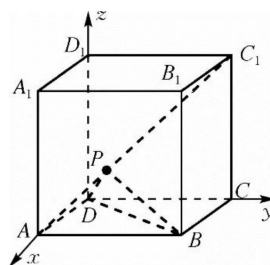
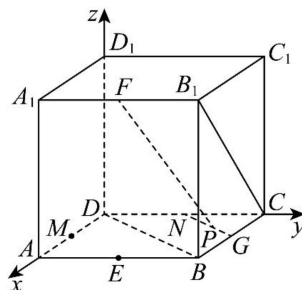
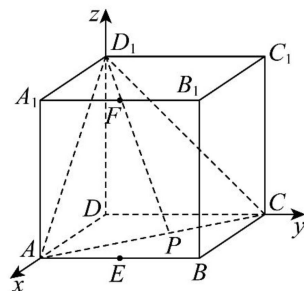
D. 因为 P 在线段 AC_1 上, 所以可设 $P(t, 2-t, 2-t)$, 其中 $t \in (0, 2)$. 于是

$$\overrightarrow{BP} = (t-2, -t, 2-t), \quad \overrightarrow{DP} = (t, 2-t, 2-t). \text{ 由于 } \angle BPD \text{ 是锐角, 所以 } \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DP} > 0,$$

$$\text{即 } (t-2) \cdot t + (-t) \cdot (2-t) + (2-t) \cdot (2-t) > 0, \text{ 即 } (t-2)(3t-2) > 0. \text{ 又由于 } t \in (0, 2)$$

$$\text{所以不等式的解集为 } 0 < t < \frac{2}{3}. \text{ 因此 } |C_1P| = \sqrt{t^2 + (-t)^2 + (-t)^2} = \sqrt{3}t \in \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right).$$

三、填空题



12. $(-1, 2, 3)$ 13. $2\sqrt{5}$ 14. $\sqrt{2}$

14. $\sqrt{2}$ 四边形 $OPQR$ 是平行四边形, 以 O 为坐标原点, OA, OC, OO_1 为坐标轴建立如图所示的空间直角坐标系,

所以 $P(1, 0, \tan \alpha), R(0, 1, \tan \beta), O(0, 0, 0)$, 所以 $\overrightarrow{OP} = (1, 0, \tan \alpha), \overrightarrow{OR} = (0, 1, \tan \beta)$,

又 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, 所以 $\tan \alpha = \tan(\frac{\pi}{4} - \beta) = \frac{1 - \tan \beta}{1 + \tan \beta}$, 所以 $\tan \alpha + \tan \beta = 1 - \tan \alpha \tan \beta$, 又 $\tan \alpha \geq 0, \tan \beta \geq 0$,

所以 $2\sqrt{\tan \alpha \tan \beta} \leq 1 - \tan \alpha \tan \beta$, 解得 $0 \leq \tan \alpha \tan \beta \leq \sqrt{2} - 1$,

所以 $S_{OPRQ} = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OR}| \sin \angle POR = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OR}| \sqrt{1 - \cos^2 \angle POR}$

$$= \sqrt{(|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OR}|)^2 - (|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OR}|)^2 \cos^2 \angle POR} = \sqrt{(|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OR}|)^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} \cos \angle POR)^2}$$

$$= \sqrt{(1 + \tan^2 \alpha)(1 + \tan^2 \beta) - \tan^2 \alpha \tan^2 \beta} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta}$$

$$= \sqrt{1 + (\tan \alpha + \tan \beta)^2 - 2 \tan \alpha \tan \beta} = \sqrt{1 + (1 - \tan \alpha \tan \beta)^2 - 2 \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \sqrt{2 + (\tan \alpha \tan \beta)^2 - 4 \tan \alpha \tan \beta} = \sqrt{(\tan \alpha \tan \beta - 2)^2 - 2} \leq \sqrt{2},$$

所以四边形 $OPQR$ 面积的最大值为 $\sqrt{2}$.

四、解答题:

15. 解: (1) 因为点 M, N 分别在棱 AB, BC 上, 所以 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$,

所以 $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

(2) 因为 $AB = 3, AC = AD = 2, \angle BAD = \angle CAD = \frac{2\pi}{3}, \angle BAC = \frac{\pi}{2}$,

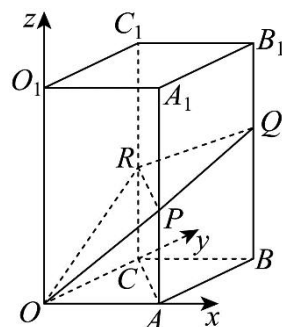
所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{2} = 0, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \times 2 \times \cos \frac{2\pi}{3} = -3, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 \times 2 \times \cos \frac{2\pi}{3} = -2$.

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AN}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} |\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{4}{9} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{9} |\overrightarrow{AC}|^2} = \frac{2\sqrt{10}}{3},$$

$$|\overrightarrow{DM}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} |\overrightarrow{AB}|^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + |\overrightarrow{AD}|^2} = \frac{\sqrt{37}}{2},$$

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{DM} = \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{3} |\overrightarrow{AB}|^2 - \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{17}{3},$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{DM} \rangle = \frac{\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{AN}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = \frac{\frac{17}{3}}{\frac{2\sqrt{10}}{3} \times \frac{\sqrt{37}}{2}} = \frac{17\sqrt{370}}{370},$$



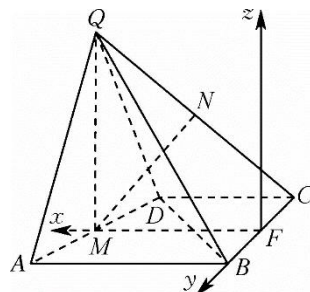
即异面直线 AN, DM 所成角的余弦值为 $\frac{17\sqrt{370}}{370}$.

16. (1) 证明: $\because M$ 是 AD 中点, $QA = QD, \therefore QM \perp AD$,

$\because$ 平面 $QAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $QAD \cap$ 平面 $ABCD = AD, QM \subset$ 平面 $QAD, \therefore QM \perp$ 平面 $ABCD$,
又 $BD \subset$ 平面 $ABCD, \therefore QM \perp BD$.

(2) 解: 取 BC 中点 F , 连接 $MF, \because M, F$ 分别为 AD, BC 中点,
 $AB \parallel CD, \therefore MF \parallel AB$, 又 $BC \perp AB, \therefore MF \perp BC$.

以 F 为坐标原点, $\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FB}$ 为 x, y 轴正方向, 过 F 作 z 轴 $\parallel QM$, 可建立如图



所示的空间直角坐标系, 设 $QM = a (a > 0), \therefore MF = \frac{3}{2}, BC = \sqrt{3}$,

$$\therefore M\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right), Q\left(\frac{3}{2}, 0, a\right), B\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), C\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), N\left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{a}{2}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{a}{2}\right), \overrightarrow{BC} = (0, -\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{CQ} = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, a\right).$$

设平面 QBC 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = -\sqrt{3}y = 0, \\ \overrightarrow{CQ} \cdot \vec{n} = \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + az = 0, \end{cases}$ 令 $x = 2a$, 解得

$$y = 0, z = -3, \therefore \vec{n} = (2a, 0, -3), \therefore \left| \cos \langle \overrightarrow{MN}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-3a|}{\sqrt{\frac{3+a^2}{4}} \cdot \sqrt{4a^2+9}} = \frac{\sqrt{42}}{7},$$

解得 $a = \sqrt{3}$ 或 $a = \frac{3}{2}$, 即 QM 的长度为 $\sqrt{3}$ 或 $\frac{3}{2}$.

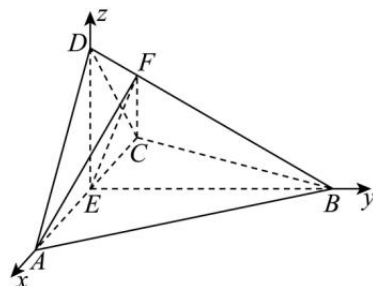
17. 解: (1) 因为 $AD = CD$, E 为 AC 的中点, 所以 $AC \perp DE$; 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中, 因为

$AD = CD, \angle ADB = \angle CDB, DB = DB$, 所以 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$, 所以 $AB = CB$, 又因为 E 为 AC 的中点, 所以
 $AC \perp BE$; 又因为 $DE, BE \subset$ 平面 BED , $DE \cap BE = E$, 所以 $AC \perp$ 平面 BED ,
因为 $AC \subset$ 平面 ACD , 所以平面 $BED \perp$ 平面 ACD .

(2) 连接 EF , 由 (1) 知, $AC \perp$ 平面 BED , 因为 $EF \subset$ 平面 BED , 所以 $AC \perp EF$,

所以 $S_{\triangle AFC} = \frac{1}{2} AC \cdot EF$, 当 $EF \perp BD$ 时, EF 最小, 即 $\triangle AFC$ 的面积最小. 因为

$\triangle ABD \cong \triangle CBD$, 所以 $CB = AB = 2$, 又因为 $\angle ACB = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是等边三



角形, 因为 E 为 AC 的中点, 所以 $AE = EC = 1$, $BE = \sqrt{3}$, 因为 $AD \perp CD$, 所以 $DE = \frac{1}{2} AC = 1$, 在 $\triangle DEB$

中, $DE^2 + BE^2 = BD^2$, 所以 $BE \perp DE$. 以 E 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$,

则 $A(1, 0, 0), B(0, \sqrt{3}, 0), D(0, 0, 1)$, 所以 $\overrightarrow{AD} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{AB} = (-1, \sqrt{3}, 0)$, 设平面 ABD 的一个法向量为

$\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = -x + z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$, 取 $y = \sqrt{3}$, 则 $\vec{n} = (3, \sqrt{3}, 3)$, 又因为 $C(-1, 0, 0), F\left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$, 所以

$$\overrightarrow{CF} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right), \text{ 所以 } \cos \angle \vec{n}, \overrightarrow{CF} = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{CF}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{CF}|} = \frac{6}{\sqrt{21} \times \sqrt{\frac{7}{4}}} = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

设 CF 与平面 ABD 所成的角为 $\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\sin \theta = |\cos \angle \vec{n}, \overrightarrow{CF}| = \frac{4\sqrt{3}}{7}$,

所以 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

18. (1) 证明: 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 点 D 是棱 AB 的中点, 所以 $CD \perp AB$,

又 $CC_1 \perp$ 平面 $ABC, AB \subset$ 平面 ABC , 所以 $CC_1 \perp AB$,

又 $CC_1 \cap CD = C, CC_1, CD \subset$ 平面 DCC_1 , 所以 $AB \perp$ 平面 DCC_1 ,

又 $AB \subset$ 平面 AA_1B_1B , 所以平面 $AA_1B_1B \perp$ 平面 DCC_1 .

(2) 解: 在平面 ABC 中, 过点 C 作 $CF \parallel AB$, 所以 $CC_1 \perp CF, CD \perp CF$, 又 $CC_1 \perp$ 平面 $ABC, CD \subset$ 平面 ABC , 所以 $CC_1 \perp CD$, 以 C 为坐标原点, CD, CF, CC_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系如图所示.

因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AB = 2A_1B_1 = 4, CC_1 = 2$, 所以 $A(2\sqrt{3}, -2, 0)$,

$B(2\sqrt{3}, 2, 0), C_1(0, 0, 2)$, 因为 $\overrightarrow{C_1B_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, 所以 $B_1(\sqrt{3}, 1, 2)$.

设 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BB_1} (\lambda \in (0, 1])$, 所以 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BB_1} = (-\sqrt{3}\lambda, -\lambda, 2\lambda)$, 所以 $E(2\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda, 2 - \lambda, 2\lambda)$.

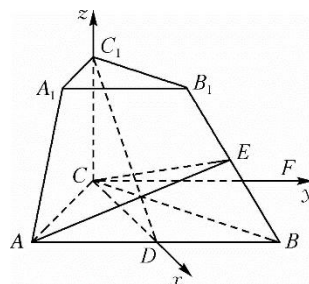
设平面 ABE 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{AB} = (0, 4, 0), \overrightarrow{AE} = (-\sqrt{3}\lambda, 4 - \lambda, 2\lambda)$,

因为 $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_1 = 0, \\ \overrightarrow{AE} \cdot \vec{n}_1 = 0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} 4y_1 = 0, \\ -\sqrt{3}\lambda x_1 + (4 - \lambda)y_1 + 2\lambda z_1 = 0, \end{cases}$ 令 $x_1 = 2$, 得 $y_1 = 0, z_1 = \sqrt{3}$, 所以平面 ABE 的

一个法向量为 $\vec{n}_1 = (2, 0, \sqrt{3})$,

设平面 ACE 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2\sqrt{3}, 2, 0)$,

因为 $\begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}_2 = 0, \\ \overrightarrow{AE} \cdot \vec{n}_2 = 0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} -2\sqrt{3}x_2 + 2y_2 = 0, \\ -\sqrt{3}\lambda x_2 + (4 - \lambda)y_2 + 2\lambda z_2 = 0, \end{cases}$ 令 $x_2 = 1$, 得 $y_2 = \sqrt{3}, z_2 = \frac{\sqrt{3}(\lambda - 2)}{\lambda}$,



所以平面 ACE 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = \left(1, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}(\lambda-2)}{\lambda}\right)$.

设平面 ABE 与平面 ACE 所成角为 θ , 所以 $\cos \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{\left|2 + \frac{3(\lambda-2)}{\lambda}\right|}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{4 + 3\left(\frac{\lambda-2}{\lambda}\right)^2}}$

($\lambda \in (0, 1]$), 设 $t = 2 + \frac{3(\lambda-2)}{\lambda}$, 则 $t \in (-\infty, -1]$, 所以 $\frac{1}{t} \in [-1, 0)$,

所以 $\cos \theta = \frac{|t|}{\sqrt{\frac{7}{3} \cdot \sqrt{t^2 - 4t + 16}}} = \sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{t^2} - \frac{4}{t} + 1}} = \sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{16\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{3}{4}}}$,

所以当 $\frac{1}{t} = -1$, 即 $\lambda = 1$ 时, $\cos \theta$ 取到最小值 $\frac{1}{7}$.

19.解: (1) 证明: 连接 BO 并延长交 AC 于点 D , 连接 OA 、 PD , 因为 PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高, 所以 $PO \perp$ 平面 ABC , $AO, BO \subset$ 平面 ABC , 所以 $PO \perp AO$ 、 $PO \perp BO$, 又 $PA = PB$, 所以 $\triangle POA \cong \triangle POB$, 即 $OA = OB$, 所以 $\angle OAB = \angle OBA$, 又 $AB \perp AC$, 即 $\angle BAC = 90^\circ$, 所以 $\angle OAB + \angle OAD = 90^\circ$, $\angle OBA + \angle ODA = 90^\circ$, 所以 $\angle ODA = \angle OAD$, 所以 $AO = DO$, 即 $AO = DO = OB$, 所以 O 为 BD 的中点, 又 E 为 PB 的中点, 所以 $OE \parallel PD$, 又 $OE \not\subset$ 平面 PAC , $PD \subset$ 平面 PAC , 所以 $OE \parallel$ 平面 PAC .

(2) 过点 A 作 $Az \parallel OP$, 如图建立空间直角坐标系, 因为 $PO = 3$, $AP = 5$, 所以 $OA = \sqrt{AP^2 - PO^2} = 4$,

又 $\angle OBA = \angle OBC = 30^\circ$, 所以 $BD = 2OA = 8$, 则 $AD = 4$, $AB = 4\sqrt{3}$

所以 $AC = 12$, 所以 $O(2\sqrt{3}, 2, 0)$, $B(4\sqrt{3}, 0, 0)$, $P(2\sqrt{3}, 2, 3)$,

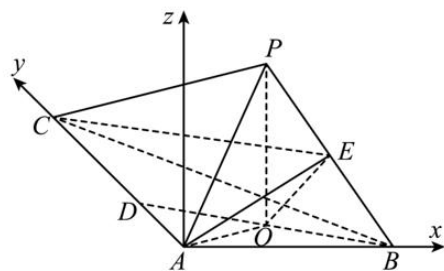
$C(0, 12, 0)$, 所以 $E\left(3\sqrt{3}, 1, \frac{3}{2}\right)$,

则 $\vec{AE} = \left(3\sqrt{3}, 1, \frac{3}{2}\right)$, $\vec{AB} = (4\sqrt{3}, 0, 0)$, $\vec{AC} = (0, 12, 0)$, 设平面 AEB

的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AE} = 3\sqrt{3}x + y + \frac{3}{2}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AB} = 4\sqrt{3}x = 0 \end{cases}$, 令 $z = 2$, 则 $y = -3$, $x = 0$, 所以 $\vec{n} = (0, -3, 2)$; 设

平面 AEC 的法向量为 $\vec{m} = (a, b, c)$, 则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AE} = 3\sqrt{3}a + b + \frac{3}{2}c = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AC} = 12b = 0 \end{cases}$, 令 $a = \sqrt{3}$, 则 $c = -6$, $b = 0$, 所以

$\vec{m} = (\sqrt{3}, 0, -6)$; 所以 $\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{-12}{\sqrt{13} \times \sqrt{39}} = -\frac{4\sqrt{3}}{13}$. 设二面角 $C-AE-B$ 的大小为 θ , 则



$$|\cos \theta| = \left| \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{4\sqrt{3}}{13}, \text{ 所以 } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{11}{13}, \text{ 即二面角 } C-AE-B \text{ 的正弦值为 } \frac{11}{13}.$$

$$(3) \text{ 连接 } BM, \text{ 由题意知: } \overrightarrow{PN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{PF} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{PM} + \frac{2}{3} \overrightarrow{PB} \right) = \frac{1}{12} \overrightarrow{PA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{PB} + \frac{1}{12} \overrightarrow{PC};$$

$$\text{令 } \frac{PG}{PC} = x, \frac{PH}{PA} = y, \frac{PQ}{PB} = z, \therefore \overrightarrow{PN} = \frac{1}{12x} \overrightarrow{PG} + \frac{1}{12y} \overrightarrow{PH} + \frac{1}{3z} \overrightarrow{PQ},$$

$$\because N, G, H, Q \text{ 四点共面}, \therefore \frac{1}{12x} + \frac{1}{12y} + \frac{1}{3z} = 1 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{432xyz}} \quad (\text{当且仅当 } x = y = \frac{1}{4}z \text{ 时取等号}), \therefore xyz \geq \frac{1}{16};$$

设点 G 到平面 PBC 的距离为 d_1 , 则点 A 到平面 PBC 的距离为 d_2 ,

$$\therefore \frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{3} S_{\triangle GPH} \cdot d_1}{\frac{1}{3} S_{\triangle CPB} \cdot d_2} = \frac{PG \cdot PQ \cdot PH}{PC \cdot PB \cdot PA} = xyz \geq \frac{1}{16}, \text{ 即 } \frac{V'}{V} \text{ 的最小值为 } \frac{1}{16}.$$

仅供会东县中学使用