

圆的方程参考答案

第 I 卷 (选择题)

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求.

1. 【答案】C

【解析】 $(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}-m$ 表示一个圆, 所以 $\frac{1}{2}-m>0$, 解得 $m<\frac{1}{2}$. 故选 C.

2. 【答案】A

【解析】联立 $\begin{cases} y=x+2a, \\ y=2x+a, \end{cases}$ 解得 $P(a, 3a)$, 所以 $(a-1)^2+(3a-1)^2<4$, 所以 $-\frac{1}{5}<a<1$. 故选 A.

3. 【答案】D

【解析】由直线 $x+y-3=0$ 的方程可知该直线的斜率为 -1 , 直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=\frac{4-2}{b+a}=\frac{2}{b+a}$, 线段 AB 的中点坐标为 $(\frac{-a+b}{2}, \frac{2+4}{2})$, 因为两圆相交于两点 $A(-a, 2)$, $B(b, 4)$, 且两圆圆心都在直线 $x+y-3=0$ 上,

所以有 $\begin{cases} -1 \cdot \frac{2}{b+a} = -1 \\ \frac{-a+b}{2} + \frac{2+4}{2} - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1 \Rightarrow ab=1$,

故选: D

4. 【答案】D

【解析】过点 $N(3, -\sqrt{3})$ 且倾斜角为 $\frac{5\pi}{6}$ 的直线方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)-\sqrt{3}$, 即 $x+\sqrt{3}y=0$,

设圆 C 的圆心为 (m, n) , 半径为 R , 由题意直线 NC 垂直于直线 $x+\sqrt{3}y=0$,

故 $k_{NC}=\frac{n+\sqrt{3}}{m-3}=\sqrt{3}$, 可得 $n=\sqrt{3}m-4\sqrt{3}$, $R=|NC|=\sqrt{(m-3)^2+(n+\sqrt{3})^2}=2|m-3|$,

两圆相切, 有 $\sqrt{(m-3)^2+(n+\sqrt{3})^2}=1+R=2|m-3|$,

(1) $m \geq 3$ 时, 解得 $m=4, n=0, R=2$,

圆 C 的方程为 $(x-4)^2+y^2=4$;

(2) $m < 3$ 时, 解得 $m=0, n=-4\sqrt{3}, R=6$,

圆 C 的方程为 $x^2+(y+4\sqrt{3})^2=36$; 故选 D

5. 【答案】C

【解析】圆 $M: x^2+y^2-4x-6y+9=0$ 可化为 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$, 圆心为 $M(2, 3)$, 半径为 $r=2$.

点 $A(-2, 1)$ 关于 x 轴对称的点为 $A'(-2, -1)$, 所以设反射光线所在直线的方程为 $y+1=k(x+2)$,

即 $kx - y + 2k - 1 = 0$. 由反射光线正好与圆 M 相切, 得 $\frac{|2k - 3 + 2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$, 即 $3k^2 - 8k + 3 = 0$,

解得 $k_1 = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}, k_2 = \frac{4 + \sqrt{7}}{3}$, 于是 $k_1 + k_2 = \frac{4 - \sqrt{7}}{3} + \frac{4 + \sqrt{7}}{3} = \frac{8}{3}$. 故选 C.

6. 【答案】C

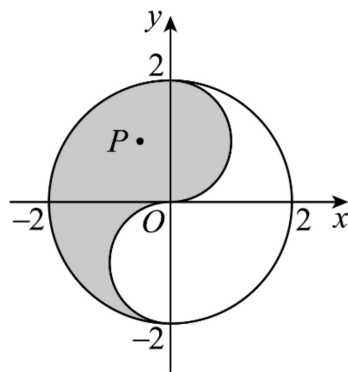
【解析】记 $A(2, 0)$, 则 $k = \frac{y}{x-2}$ 为直线 AP 的斜率,

故当直线 AP 与半圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1 (x > 0)$ 相切时, 得 k 最小,

此时设 $AP: y = k(x-2)$, 故 $\frac{|-1-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, 解得 $k = -\frac{4}{3}$ 或 $k = 0$ (舍去),

即 $k_{\min} = -\frac{4}{3}$.

故选: C



7. 【答案】A

【解析】由题意, 点 $P(2, t), Q(2, -t) (t > 0)$, 可得 PQ 为直径的圆的方程为 $(x-2)^2 + y^2 = t^2$, 则圆心 $C_1(2, 0)$, 半径 $R = t$, 又由圆 $C: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$, 可得圆心 $C(-2, 3)$, 半径 $r = 1$, 两圆的圆心距为

$|CC_1| = \sqrt{(2+2)^2 + (0-3)^2} = 5$, 要使得圆 $C: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 上存在点 M , 使得 $\angle PMQ = 90^\circ$,

即两圆存在公共点, 则满足 $\begin{cases} R+r \geq 5 \\ R-r \leq 5 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} t+1 \geq 5 \\ t-1 \leq 5 \end{cases}$, 解得 $4 \leq t \leq 6$, 所以实数 t 的取值范围是 $[4, 6]$. 故选 A.

8. 【答案】C

【解析】 $\because (x-2)^2 + y^2 = 1$, $\therefore$ 圆 M 的圆心坐标 $M(2, 0)$, 半径 $R = 1$, 设圆心到直线 l 的距离为 d ,

由圆的弦长公式, 可得 $|AB| = 2\sqrt{1-d^2}$, 即 $2\sqrt{1-d^2} = \sqrt{2}$, 解得 $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

设 AB 的中点为 N , $|MN| = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore$ 点 N 的轨迹表示以 $M(2, 0)$ 为圆心, 以 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆,

$\therefore N$ 的轨迹方程为 $(x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$,

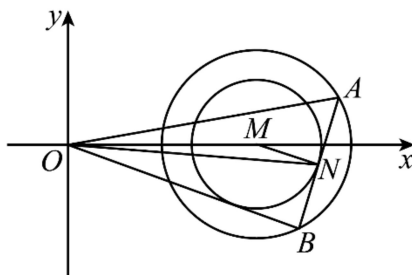
因为 $|\vec{OA} + \vec{OB}| = |2\vec{ON}| = 2|\vec{ON}|$,

又 $\because |\vec{OM}| = 2$, $\therefore |\vec{OM}| - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq |\vec{ON}| \leq |\vec{OM}| + \frac{\sqrt{2}}{2}$,

即 $2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq |\vec{ON}| \leq 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$,

即 $|\vec{OA} + \vec{OB}|$ 的取值范围为 $[4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}]$.

故选: C



二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错或不选得 0 分.

9. 【答案】ACD

【解析】因为圆 $(x-2)^2 + y^2 = 2$ 的圆心为 $(2, 0)$, 半径为 $\sqrt{2}$;

对于 A, 圆心到直线的距离 $d = \frac{|2+0|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 正确; 对于 B, 圆心到直线的距离 $d = \frac{|2+0-2|}{\sqrt{2}} = 0$, 错误;

对于 C, 圆心到直线的距离 $d = \frac{|2-0|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 正确; 对于 D, 圆心到直线的距离 $d = \frac{|2+0-4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 正确;

故选: ACD.

10. 【答案】BD

【解析】A 选项, $(m-1)x + (2m-1)y = m-3 (m \in R)$ 变形得到 $m(x+2y-1) - x - y + 3 = 0$,
故 $\begin{cases} x+2y-1=0 \\ -x-y+3=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$, 所以恒过定点 $(5, -2)$, A 表述正确;

B 选项, 圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的圆心 $(0,0)$ 到直线 $l: x - y + 1 = 0$ 的距离 $d = \frac{|0-0+1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的半径为 $\sqrt{2}$,

故圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上有且仅有 3 个点到直线 $l: x - y + 1 = 0$ 的距离都等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, B 表述错误;

C 选项, 曲线 C_1 与 C_2 恰有四条公切线, 故圆 C_1 与圆 C_2 相离,

其中 $x^2 + y^2 + 2x = 0$ 变形为 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, 圆心为 $(-1, 0)$, 半径为 1,

$x^2 + y^2 - 4x - 8y + m = 0$ 变形为 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 20 - m$, 圆心为 $(2, 4)$, 半径为 $\sqrt{20 - m}$,
故 $20 - m > 0$, 解得 $m < 20$,

故圆心距为 $\sqrt{(2+1)^2 + 4^2} = 5$, 所以 $5 > \sqrt{20 - m} + 1$,

解得 $m > 4$,

则实数 m 的取值范围为 $4 < m < 20$, C 表述正确;

D 选项, 圆 $C: x^2 + y^2 = 2$ 的圆心为 $O(0,0)$, 半径为 $\sqrt{2}$,

圆心到直线 $x + y + 2\sqrt{3} = 0$ 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{6} > \sqrt{2}$,

故过点 P 向圆 C 引条切线 PA , 有 $PA^2 + (\sqrt{2})^2 = OP^2$,

所以当 OP 取得最小值时, PA 取得最小值,

OP 的最小值为 $\sqrt{6}$, 故 PA 最小值为 $\sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2$, D 表述错误.

故选: BD

11. 【答案】BCD

【解析】A: $y = \sqrt{4 - x^2} \geq 0$, 故曲线 C 为 $x^2 + y^2 = 4$ 且 $y \geq 0$, 即曲线 C 表示以原点为圆心, 以 2 为半径的半圆, 错;

由 A 分析知: 曲线 C 与直线 $l: x - y + b = 0$ 如下图示,

由图知: 当直线在与半圆左侧相切和过 $(0,2), (-2,0)$ 两点 (虚线表示的直线) 之间时, 曲线 C 与直线 l 有 2 个公共点,

当直线在与半圆左侧相切, 则 $\frac{|b|}{\sqrt{2}} = 2$, 即 $b = \pm 2\sqrt{2}$, 故 $b = 2\sqrt{2}$,

当直线过 $(0,2), (-2,0)$ 两点时, $b = 2$,

所以, 曲线 C 与直线 l 有 2 个公共点时 $2 \leq b < 2\sqrt{2}$, C 对;

当直线与半圆左侧相切, 或在过 $(0,2), (-2,0)$ 两点和过 $(2,0)$ 之间的情况时, 曲线 C 与直线 l 有 1 个公共点,

当直线过 $(2,0)$ 时, $b = -2$, 结合上述分析知: 曲线 C 与直线 l 有 1 个公共点时 $b \in \{2\sqrt{2}\} \cup [-2, 2)$, ,

所以曲线 C 与直线 l 有 1 个公共点的充分不必要条件是 $b = -2$, B 对;

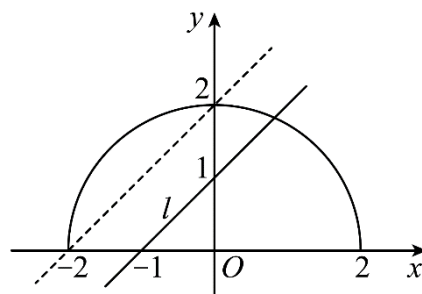
当 $b = 1$, 则 $l: x - y + 1 = 0$, 如上图实线位置上的直线,

显然直线左上部分半圆有 $(0,2), (-2,0)$ 到直线距离都为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

圆对称性, 直线右下部分半圆存在一点到直线距离也为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $b = 1$ 时, 曲线 C 上有 3 个点到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, D 对.

故选: BCD



12. 【答案】ABD

【解析】对于曲线 $C: x^2 + y^2 = |x| + |y|$ 上任一点 $P(m, n)$, 则 $m^2 + n^2 = |m| + |n|$,
 点 $P(m, n)$ 关于 y 轴对称的点为 $P_1(-m, n)$, 则 $(-m)^2 + n^2 = m^2 + n^2 = |m| + |n| = |-m| + |n|$,
 即点 $P_1(-m, n)$ 在曲线 C 上, 故曲线 C 关于 y 轴对称;
 点 $P(m, n)$ 关于 x 轴对称的点为 $P_2(m, -n)$, 则 $m^2 + (-n)^2 = m^2 + n^2 = |m| + |n| = |m| + |-n|$,
 即点 $P_2(m, -n)$ 在曲线 C 上, 故曲线 C 关于 x 轴对称;
 点 $P(m, n)$ 关于原点对称的点为 $P_3(-m, -n)$, 则 $(-m)^2 + (-n)^2 = m^2 + n^2 = |m| + |n| = |-m| + |-n|$,
 即点 $P_3(-m, -n)$ 在曲线 C 上, 故曲线 C 关于原点对称;
 综上所述: 曲线 C 关于坐标轴和原点对称.

对于方程 $x^2 + y^2 = |x| + |y| = x + y$,

令 $y = 0$, 则 $x^2 = |x|$, 解得 $x = 0$ 或 $x = \pm 1$, 即曲线 C 与 x 轴的交点坐标为 $A(1, 0), O(0, 0), C(-1, 0)$,

同理可得: 曲线 C 与 y 轴的交点坐标为 $B(0, 1), O(0, 0), D(0, -1)$,

当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时, 则 $x^2 + y^2 = |x| + |y| = x + y$, 整理得 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, 且 $\angle AOB = 90^\circ$,

故曲线 C 在第一象限内为以 $O_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 为圆心, 半径 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的半圆,

由对称性可得曲线 C 为四个半圆外加坐标原点,

对 A: 曲线 C 围成的图形的面积 $S = 4 \left[\frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \right] = 2 + \pi$, A 正确;

对 B: 曲线 C 围成的图形的周长是 $L = 4 \times \frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\pi$, B 正确;

对 C: 联立方程 $\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ y = x \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$,

即曲线 C 与直线 $y = x$ 在第一象限内的交点坐标为 $M(1, 1)$, 由对称可知曲线 C 与直线 $y = x$ 在第三象限内的交点坐标为 $N(-1, -1)$,

则 $|MN| = \sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2} > 2$, C 错误;

对 D: 由图结合对称性可知: 当 $P(m, n)$ 在第一象限时, 点 $P(m, n)$ 到直线 $l: 3x + 4y - 12 = 0$ 的

距离 $d = \frac{|3m + 4n - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3m + 4n - 12|}{5}$ 相对较小,

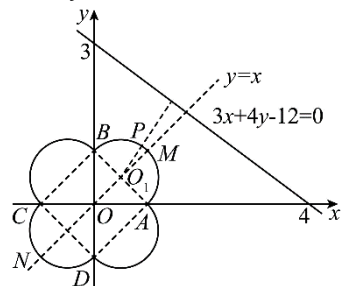
$\therefore O_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 到直线 $l: 3x + 4y - 12 = 0$ 的距离 $d_1 = \frac{|3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} - 12|}{5} = \frac{17}{10}$,

则点 $P(m, n)$ 到直线 $l: 3x + 4y - 12 = 0$ 的距离 $d \geq d_1 - r = \frac{17}{10} - \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore |3m + 4n - 12| = 5d \geq \frac{17 - 5\sqrt{2}}{2}$

故 $|3m + 4n - 12|$ 的最小值是 $\frac{17 - 5\sqrt{2}}{2}$, D 正确.

故选: ABD.



第 II 卷 (非选择题)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13. 【答案】 $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$

【解析】设 $\triangle OAB$ 的外接圆方程是 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 由点 $O(0, 0), A(2, 4), B(6, 2)$ 在圆上可

得 $\begin{cases} F=0, \\ 4+16+2D+4E=0, \\ 36+4+6D+2E=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} F=0, \\ D=-6, \\ E=-2, \end{cases}$ 故 $\triangle OAB$ 的外接圆方程为 $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$.

故填 $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$.

14. 【答案】 $2\sqrt{7}$

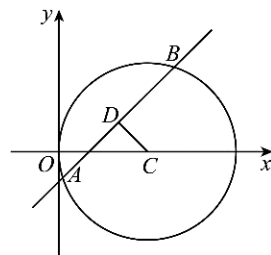
【解析】将圆的一般方程化为 $(x-3)^2 + y^2 = 9$

设圆心为 C , 直线过点 $D(2, 1)$, 与圆交于 A, B 两点, 则 $C(3, 0)$, 半径 $r = 3$,

设圆心到直线的距离为 d ，则弦长 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ ，
当直线与 CD 所在的直线垂直时 d 最大，此时 $|AB|$ 最小，
这时 $d = |CD| = \sqrt{(3-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$ ，

所以最小的弦长 $|AB| = 2\sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7}$ ，

故答案为： $2\sqrt{7}$ 。



15. 【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】解法一：设经过点 A, B 的直线为 x 轴， $\overline{AB}$ 的方向为 x 轴正方向，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，线段 AB 的中点 O 为原点，建立平面直角坐标系. 则 $A(-1, 0)$ ， $B(1, 0)$ 。

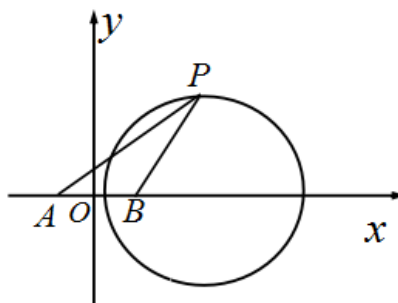
设 $P(x, y)$ ， $\because \frac{|PA|}{|PB|} = \sqrt{2}$ ， $\therefore \frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \sqrt{2}$ ，

两边平方并整理得阿氏圆方程为 $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ ，

即 $(x-3)^2 + y^2 = 8$ 。

要使 $\triangle PAB$ 的面积最大，只需点 P 到 AB （ x 轴）的距离最大时，

此时面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ 。



解法二： $AB = 2$ ， $AC = \sqrt{2}BC$ 即 $c = 2$ ， $b = \sqrt{2}a$ ，

由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 + 4}{4\sqrt{2}a}$ ，所以 $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + 4}{4\sqrt{2}a}\right)^2}$ ，

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{2}a \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + 4}{4\sqrt{2}a}\right)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{-a^4 + 24a^2 - 16} = \frac{1}{4} \sqrt{-(a^2 - 12)^2 + 128}$

$\leq \frac{1}{4} \sqrt{128} = 2\sqrt{2}$ 。所以 $\triangle ABC$ 的面积的最大值是 $2\sqrt{2}$ 。

16. 【答案】10

【解析】由 $x_1^2 + y_1^2 = 4$ ， $x_2^2 + y_2^2 = 4$ ， $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ ，

可知，点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 在圆上，

由 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Rightarrow OA \perp OB$ ，即 $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形，

结合点到直线距离公式 $d = \frac{|x+y-3|}{\sqrt{2}}$ 可理解为圆心到直线 $x + y - 3 = 0$ 的距离，变形得 $|x + y - 3| = \sqrt{2}d$ ，

即所求问题可转化为 A, B 两点到直线 $x + y - 3 = 0$ 的距离和的 $\sqrt{2}$ 倍，

作 $AM \perp l$ 于 M ， $AN \perp l$ 于 N ， AB 中点为 E ， MN 中点为 F ，

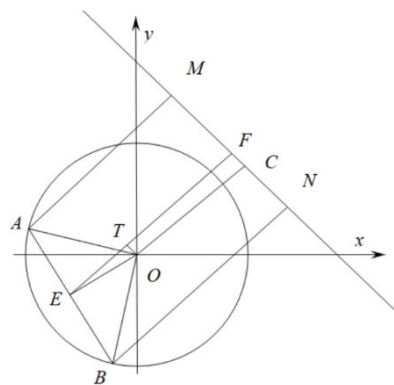
由梯形中位线性质可得， $|AM| + |BN| = 2|EF|$ ，

作 $OT \perp EF$ 于 T ， $OC \perp l$ 于 C ，连接 OE ，

则 $|EF| = |ET| + |TF| = |ET| + |OC| \leq |EO| + |OC|$ ，

当且仅当 T 与 O 重合， $E, O(T), C$ 三点共线时，

$|EF|$ 有最大值，由点到直线距离公式可得 $|OC| = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，



由几何性质可得 $|OE| = \sqrt{2}$, $|EF|_{\max} = |OC| + |OE| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$,

此时 $|AM| + |BN| = 2|EF| = 5\sqrt{2}$, 故 $|x_1 + y_1 - 3| + |x_2 + y_2 - 3|$ 的最大值为 $\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 10$.

故答案为: 10.

四. 解答题: 本小题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解: (1) 由 $A_1A_2 + B_1B_2 = a \cdot 1 + (-1) \cdot a = 0$, 得 $l_1 \perp l_2$, 故两直线垂直;

(2) 由直线 l_1, l_2 的方程易知其分别过定点 $A(0,1)$ 和 $B(-1,0)$, 又 $l_1 \perp l_2$, 垂足为 C , 即 $CA \perp CB$,

则 C 的轨迹是以 AB 的中点为圆心, AB 为直径且半径 $r = \frac{|AB|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆(不包含原点).

所以点 C 的轨迹方程为 $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} (x \neq 0)$.

18. 解: (1) AB 的中点为 $M(5,1)$, 斜率 $k = -1$, 则直线 AB 的中垂线为 $y = x - 4$

联立 $\begin{cases} y = x - 4 \\ y = 4 - x \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$, 即 $C(4,0)$, $|BC| = 2$,

故圆 C 的方程为 $(x - 4)^2 + y^2 = 4$;

(2) 由于 $|PQ| = 2\sqrt{3}$, 点 $C(4,0)$ 到直线 $y = k(x + 2)$ 的距离 $d = \frac{6|k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$,

即 $35k^2 = 1$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{35}}{35}$;

19. 解: (1) 由题可知: 公共弦 AB 的垂直平分线为直线 C_1C_2 ,

$\because C_1(1,0), C_2(3,2), \therefore$ 所求直线 C_1C_2 的方程为: $y = x - 1$;

(2) 两圆方程相减可得 $4x + 4y - 4 = 0$, 即 $x + y - 1 = 0$, 此即为直线 AB 的方程;

(3) $\because C_2$ 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|3 + 2 - 1|}{1^2 + 1^2} = 2\sqrt{2}$, 即 $d = 2\sqrt{2}$,

又圆 C_2 的半径 $r = 3, \therefore |AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2$,

$\therefore S_{\triangle ABC_2} = \frac{1}{2} AB \cdot d = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

即 $S_{\triangle ABC_2} = 2\sqrt{2}$.

20. 解: (1) 若选择①: 联立 $\begin{cases} x - 5y - 5 = 0 \\ x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 10 \\ y = 1 \end{cases}$, 所以 $C(10,1)$,

设圆 E 的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 (D^2 + E^2 - 4F > 0)$,

因为 A, B, C 三点均在圆上,

所以 $\begin{cases} 1 + E + F = 0 \\ 17 + D + 4E + F = 0 \\ 101 + 10D + E + F = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} D = -10 \\ E = -2 \\ F = 1 \end{cases}$,

所以圆 E 的方程为 $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 1 = 0$, 即 $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$;

若选择②：直线 l 的方程可化为 $m(x+y-6)+(x-3y-2)=0$,

因为 $m \in R$ 上式恒成立, 所以 $\begin{cases} x+y-6=0 \\ x-3y-2=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$,

所以直线 l 恒过定点 $(5,1)$, 且 $(5,1)$ 为圆心 E ,

所以 $r = |EA| = \sqrt{(5-0)^2 + (1-1)^2} = 5$,

所以圆 E 的方程为 $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 25$;

若选择③：设圆 E 的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 (r > 0)$,

由题可得 $\begin{cases} a^2 + (1-b)^2 = r^2 \\ (1-a)^2 + (4-b)^2 = r^2 \\ r = |a| \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \\ r=5 \end{cases}$,

故圆 E 的方程为 $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 25$;

(2) 因为 $(10-5)^2 + (11-1)^2 = 125 > 25$, 所以点 P 在圆 E 外,

①若直线斜率不存在, 直线方程为 $x=10$, 圆心 $E(5,1)$ 到直线 $x=10$ 的距离为5, 满足题意;

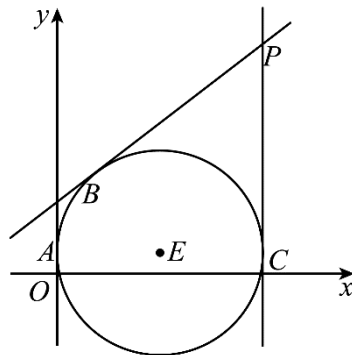
②当直线斜率存在时, 设切线的斜率为 k , 则切线方程为 $y-11=k(x-10)$,

即 $kx - y - 10k + 11 = 0$,

因为直线与圆 E 相切, 所以圆心 E 到直线的距离 $d = \frac{|5k-1-10k+11|}{\sqrt{k^2+1}} = 5$,

所以 $k = \frac{3}{4}$, 所以直线的方程为 $3x - 4y + 14 = 0$,

综上所述可得: 过点 $P(10,11)$ 的圆 E 的切线方程为 $x=10$ 或 $3x - 4y + 14 = 0$.



21. 解: (1) 由 $|PA|=2|PB|$ 得, $\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

平方并化简, 得圆 $C_1: x^2 + y^2 - 4x = 0$ (或写作 $(x-2)^2 + y^2 = 4$), 即为所求轨迹 C 的方程.

(2) 由(1)知 $P(x,y)$ 在圆 $C_1: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 上,

可设 $x = 2 + 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$, 其中 $\theta \in [0, 2\pi)$, θ 为参数,

则 $x + y = 2 + 2\cos\theta + 2\sin\theta = 2 + 2\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \in [2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}]$,

所以 $x + y$ 的取值范围是 $[2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}]$;

(3) 设(1)中圆 C_1 的圆心 $C_1(2,0)$, 动点 $S(-2,a)$,

由四边形 SMC_1N 对角互补, 知 S, M, C_1, N 四点共圆, 且该圆以线段 SC_1 为直径,

其方程可由圆的直径式得 $(x-2)(x+2) + y(y-a) = 0$, 即圆 $C_2: x^2 + y^2 - ay - 4 = 0$.

于是将圆 C_1 与圆 C_2 的方程作差, 得两圆公共弦 MN 所在直线的方程为 $4x - ay - 4 = 0$,

所以直线 MN 经过定点 $B(1,0)$,

故当点 S 在直线 l 上运动时, 始终都有 M, B, N 三点共线.

22. 解: (1) 设 $M(x,y)$, 由圆的性质知 $MO \perp AB$, 则 $|MO|^2 + |MF|^2 = 4^2$,

即 $x^2 + y^2 + x^2 + (y-4)^2 = 16$, 化简可得曲线 C 的方程为 $x^2 + (y-2)^2 = 4$;

(2) 显然直线 l_1 的斜率存在, 设直线 l_1 方程为 $y = kx + 1$, 即 $kx - y + 1 = 0$,

则圆心 $(0,2)$ 到直线 l_1 的距离 $d_1 = \frac{|-2+1|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$,

$$\text{所以 } |PQ| = 2\sqrt{4 - \frac{1}{k^2+1}} = 2\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}},$$

若 $k=0$, 则直线 l_2 斜率不存在, 则 $|PQ| = 2\sqrt{3}$, $|EF| = 4$, 则 $S = \frac{1}{2}|EF| \cdot |PQ| = 4\sqrt{3}$,

若 $k \neq 0$, 则直线 l_2 得方程为 $y = -\frac{1}{k}x + 1$, 即 $x + ky - k = 0$,

则圆心 $(0,2)$ 到直线 l_2 的距离 $d_2 = \frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}$,

$$\text{所以 } |EF| = 2\sqrt{4 - \frac{k^2}{k^2+1}} = 2\sqrt{\frac{3k^2+4}{k^2+1}},$$

$$\text{则 } S = \frac{1}{2}|EF| \cdot |PQ| = 2\sqrt{\frac{(4k^2+3)(3k^2+4)}{(k^2+1)^2}} = 2\sqrt{\frac{12(k^2+1)^2 + k^2}{(k^2+1)^2}}$$

$$= 2\sqrt{12 + \frac{k^2}{(k^2+1)^2}} = 2\sqrt{12 + \frac{1}{k^2 + \frac{1}{k^2} + 2}} \leq 2\sqrt{12 + \frac{1}{2\sqrt{k^2 \cdot \frac{1}{k^2}} + 2}} = 7,$$

当且仅当 $k^2 = \frac{1}{k^2}$, 即 $k = \pm 1$ 时, 取等号,

综上所述, 因为 $7 = \sqrt{49} > 4\sqrt{3}$, 所以 S 的最大值为 7 .