

11月13日作业答案

1. B 2. A 3. B 4. C 5. B 6. B 7. C 8. C

8 【解】 设 $|MF_1|=m, |MF_2|=n, |F_1F_2|=2c$, 则 $m+n=2a$,

由 $\frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta + \cos \alpha \sin \beta} = \frac{1}{3}$ 得 $3 \sin \alpha - 3 \sin \alpha \cos \beta = \sin \beta + \cos \alpha \sin \beta$,

即 $3 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)$,

在 $\triangle MF_1F_2$ 中, 由正弦定理得 $\frac{n}{\sin \alpha} = \frac{m}{\sin \beta} = \frac{2c}{\sin \angle F_1MF_2} = \frac{2c}{\sin(\alpha + \beta)}$,

故 $3n - 2m \cos \beta = m + 2c$, 又 $\cos \beta = \frac{4c^2 + n^2 - m^2}{4cm}$, 故 $3n - 2m \cdot \frac{4c^2 + n^2 - m^2}{4cm} = m + 2c$,

即 $8c^2 + 2c(m - 3n) + (m + n)(n - m) = 0$, 即 $[4c - (m + n)][2c - (n - m)] = 0$, 即 $4c = m + n$ 或 $2c = n - m$,

结合椭圆定义可知 $m + n > 2c$ 且 $|m - n| < 2c$, 故 $4c = m + n$, 即 $4c = 2a, \therefore e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$,

9. BC 10. BCD 11. AB 12. AC

12 【解】 如图所示: 根据题意, 因为焦点在 y 轴上, 所以 $m^2 - 2 = 4$, 则 $m^2 = 6$, 故选项 A 正确;

椭圆 C 的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 故选项 B 不正确;

不妨设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $\frac{x_1^2}{2} + \frac{y_1^2}{6} = 1, \frac{x_2^2}{2} + \frac{y_2^2}{6} = 1$,

两式相减得 $\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{2} = -\frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{6}$, 变形得 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -3 \times \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$,

又注意到点 $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 为线段 MN 的中点, 所以 $\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{\frac{x_1 + x_2}{2}}{\frac{y_1 + y_2}{2}} = \frac{x_P}{y_P} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$,

所以直线 l 的斜率为 $k_l = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -3 \times \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = -3 \times 1 = -3$, 所以直线 l 的方程为 $y - \frac{1}{2} = -3(x - \frac{1}{2})$, 即 $3x + y - 2 = 0$,

故选项 C 正确; 因为直线 l 过 F_1 , 所以 $\triangle F_2MN$ 的周长为

$F_2M + F_2N + MN = (|F_2M| + |F_1M|) + (|F_2N| + |F_1N|) = 2a + 2a = 4a = 4\sqrt{6}$, 故选项 D 不正确.

13. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ 14. $-\frac{3}{4}$ 或 $\frac{4}{3}$ 15. $3\sqrt{2} + 3$ 16. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

16 【解】 设 $Q(x_0, y_0)$, $P(x, y)$, 则 $|PA| = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$, $|PQ| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

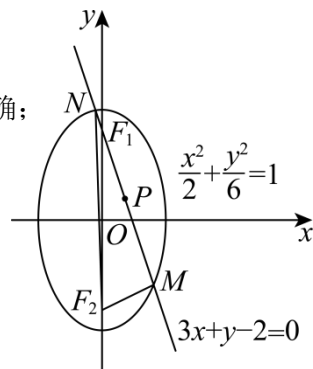
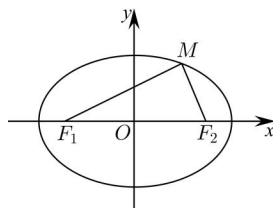
若在直线 AO 上存在异于 A 的定点 Q , 使得对圆 O 上任意一点 P , 都有 $\frac{|PA|}{|PQ|} = \lambda$ (λ 为常数),

等价于 $\frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = \lambda$ 对圆 O 上任意点 $P(x, y)$ 恒成立, 即 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = \lambda^2(x-x_0)^2 + \lambda^2(y-y_0)^2$,

整理得 $(1 - \lambda^2)(x^2 + y^2) + (2 + 2\lambda^2x_0)x + (2 + 2\lambda^2y_0)y + 2 - \lambda^2(x_0^2 + y_0^2) = 0$,

因为点 Q 在直线 AO 上, 所以 $x_0 = y_0$, 由于 P 在圆 O 上, 所以 $x^2 + y^2 = 1$,

故 $(2 + 2\lambda^2x_0)(x + y) + 3 - \lambda^2 - 2\lambda^2x_0^2 = 0$ 恒成立, 其中点 $P(x, y)$ 在圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上, 令 $x + y = m$, 则 $x + y - m = 0$,



所以直线 $x+y-m=0$ 与圆有交点,

所以圆心到直线的距离小于等于半径, 即 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1^2+1^2}} \leq 1$, 解得 $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$, 即 $x+y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$,

所以 $\begin{cases} 2+2\lambda^2x_0=0 \\ 3-\lambda^2-2\lambda^2x_0^2=0 \end{cases}$, 显然 $\lambda \neq 0$, 所以 $x_0 = -\frac{1}{\lambda^2}$, 故 $3-\lambda^2-\frac{2}{\lambda^2}=0$, 因为 $\lambda > 0$, 解得 $\lambda = \sqrt{2}$ 或 $\lambda = 1$.

当 $\lambda = 1$ 时, $Q(-1, -1)$, 此时 Q, A 重合, 舍去. 当 $\lambda = \sqrt{2}$ 时, $Q\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,

综上, 存在满足条件的定点 $Q\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, 此时 $\lambda = \sqrt{2}$.

17. 【解】(1) 以 D 为坐标原点, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DP}$ 的方向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系 (如图), 设 $AD = a$, 则 $D(0, 0, 0)$, $B(a, a, 0)$, $C(0, a, 0)$, $E\left(a, \frac{a}{2}, 0\right)$, $P(0, 0, a)$, $F\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$,

所以 $\overrightarrow{EF} = \left(-\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{DC} = (0, a, 0)$, 所以 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DC} = \left(-\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right) \cdot (0, a, 0) = 0$, 所以 $EF \perp CD$.

(2) 因为 $G \in$ 平面 PAD , 设 $G(x, 0, z)$, 所以 $\overrightarrow{FG} = \left(x - \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, z - \frac{a}{2}\right)$.

由 (1), 知 $\overrightarrow{CB} = (a, 0, 0)$, $\overrightarrow{CP} = (0, -a, a)$. 因为 $GF \perp$ 平面 PCB ,

所以 $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{CB} = \left(x - \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, z - \frac{a}{2}\right) \cdot (a, 0, 0) = a\left(x - \frac{a}{2}\right) = 0$,

$\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{CP} = \left(x - \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, z - \frac{a}{2}\right) \cdot (0, -a, a) = \frac{a^2}{2} + a\left(z - \frac{a}{2}\right) = 0$, 所以 $x = \frac{a}{2}$, $z = 0$, 所以 G 坐标 $\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$, 即为 AD 中点.

18. 【解】(1) 由 $y = kx + k - 1$, 得 $y + 1 = k(x + 1)$. 由直线方程的点斜式可知, 直线 l 过定点 $(-1, -1)$;

(2) 设直线 l 与 x 轴的交点为 A , 与 y 轴的交点为 B , 坐标原点为 O .

当 $x = 0$ 时, 得 $|OB| = |k - 1|$, 当 $y = 0$ 时, 得 $|OA| = \frac{|k - 1|}{|k|}$,

所以 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|OA||OB| = \frac{1}{2}|k - 1| \times \frac{|k - 1|}{|k|}$, 即 $\frac{1}{2}|k - 1|^2 \times \frac{1}{|k|} = 1$, 解得 $k = 2 + \sqrt{3}$ 或 $2 - \sqrt{3}$,

所以直线 l 的方程为 $y = (2 + \sqrt{3})x + 1 + \sqrt{3}$ 或 $y = (2 - \sqrt{3})x + 1 - \sqrt{3}$.

19 【解】(1) 分别以 AD , AB 为 x , y 轴, 建立平面直角坐标系, 则 $E(0, 2)$, $F(0, 4)$,

设点 $M(x, y)$, 可得 $\frac{|MF|}{2v} = \frac{|ME|}{v}$, 即 $\frac{\sqrt{x^2 + (y - 2)^2}}{v} = \frac{\sqrt{x^2 + (y - 4)^2}}{2v}$,

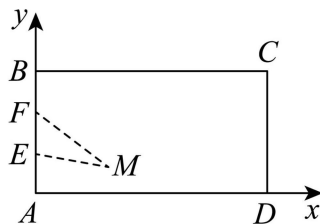
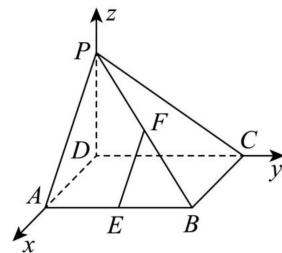
化简得 $x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$, 因为 M 在矩形场地内, 所以 $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$, 故所求轨迹方程为 $x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \left(0 \leq x \leq \frac{4}{3}\right)$.

(2) 当线段 FP 与 (1) 中圆相切时, 则 $\sin \angle AFP = \frac{\frac{4}{3}}{4 - \frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$, 所以 $\angle AFP = 30^\circ$, 所以 $|AP| = 4 \tan 30^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

若电子狗在线段 FP 上都能逃脱, P 点的横坐标取值范围是 $\left[\frac{4\sqrt{3}}{3}, 10\right]$.

20. 【解】(1) 取 GD 中点为 Q , 连接 NQ , MQ .

因 M 为 CF 的中点, N 为 EG 的中点, Q 为 GD 中点,



由三角形及梯形中位线定理, 可得 $NQ \parallel ED, MQ \parallel DC$.

又注意到, $ED, DC \subset \text{平面 } EDC, NQ, MQ \not\subset \text{平面 } EDC$,

$NQ, MQ \subset \text{平面 } MNQ, NQ \cap MQ = Q$, 则平面 $MNQ \parallel \text{平面 } CDE$.

又 $MN \subset \text{平面 } MNQ$, 则 $MN \parallel \text{平面 } CDE$.

(2) 因 $DG \perp \text{平面 } ABCD, DA, DC \subset \text{平面 } ABCD$,

则 $DG \perp DC, DG \perp DA$, 又 $AD \perp DC$, 则如图建立以 D 为原点的空间坐标系.

则 $D(0, 0, 0), A(2, 0, 0), C(0, 2, 0), G(0, 0, 2), B(1, 2, 0), E(2, 0, 2), F(0, 1, 2)$.

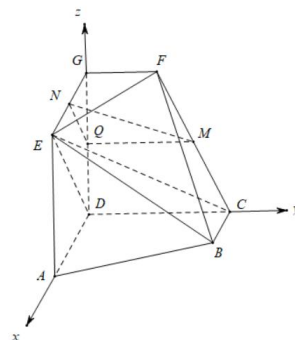
$\overrightarrow{BC} = (-1, 0, 0), \overrightarrow{BE} = (1, -2, 2), \overrightarrow{BF} = (-1, -1, 2)$.

设平面 BCE 和平面 BCF 的法向量分别为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n}_1 = -x_1 = 0 \\ \overrightarrow{BE} \cdot \vec{n}_1 = x_1 - 2y_1 + 2z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{n}_1 = (0, 1, 1); \begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n}_2 = -x_2 = 0 \\ \overrightarrow{BF} \cdot \vec{n}_2 = -x_2 - y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{n}_2 = (0, 2, 1).$$

设平面 BCE 和平面 BCF 夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \left| \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle \right| = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

则平面 BCE 和平面 BCF 夹角的正弦值为 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.



21. 【解】(1) 设点 $P(x, y)$ 为曲线上任意一点, P 是弦 AB 的中点, 且 $\angle AOB = 90^\circ$,

圆 $O: x^2 + y^2 = 8$ 的半径 $r = 2\sqrt{2}$, 则 $|OP| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{8+8} = 2$, 故点 P 的轨迹方程为: $x^2 + y^2 = 4$.

(2) 不妨取 $C(-2, 0), D(2, 0)$, 设 $E(4, t) (t \neq 0)$,

则直线 CE 的方程为 $y = \frac{t}{6}(x+2)$, 直线 DE 的方程为 $y = \frac{t}{2}(x-2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{t}{6}(x+2) \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}, \text{ 得 } \frac{t^2+36}{36}x^2 + \frac{4t^2}{36}x + \frac{4t^2}{36} - 4 = 0,$$

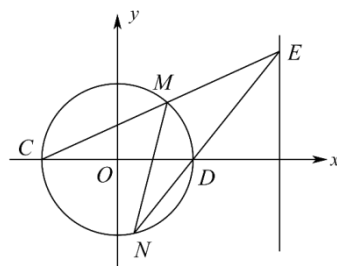
则 $x_M - 2 = -\frac{4t^2}{t^2+36}$, 即 $x_M = \frac{72-2t^2}{t^2+36}$, $y_M = \frac{t}{6}(x_M+2) = \frac{24t}{t^2+36}$, 所以 $M\left(\frac{72-2t^2}{t^2+36}, \frac{24t}{t^2+36}\right)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{t}{2}(x-2) \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}, \text{ 得 } \frac{t^2+4}{4}x^2 - t^2x + t^2 - 4 = 0,$$

则 $x_N + 2 = \frac{4t^2}{t^2+4}$, 即 $x_N = \frac{2t^2-8}{t^2+4}$, $y_N = \frac{t}{2}(x_N-2) = \frac{-8t}{t^2+4}$, 所以 $N\left(\frac{2t^2-8}{t^2+4}, \frac{-8t}{t^2+4}\right)$.

① 当 $t \neq \pm 2\sqrt{3}$ 时, 直线 MN 的斜率 $k_{MN} = \frac{\frac{24t}{t^2+36} - \frac{-8t}{t^2+4}}{\frac{72-2t^2}{t^2+36} - \frac{2t^2-8}{t^2+4}} = \frac{8t}{12-t^2}$,

则直线 MN 的方程为 $y - \frac{-8t}{t^2+4} = \frac{8t}{12-t^2}\left(x - \frac{2t^2-8}{t^2+4}\right)$, 即 $y = \frac{8t}{12-t^2}(x-1)$, 直线过定点 $(1, 0)$, 所以 $Q(1, 0)$;



②当 $t = \pm 2\sqrt{3}$ 时, 直线 MN 垂直于 x 轴, 方程为 $x = 1$, 也过定点 $Q(1, 0)$.

综上所述: 直线 MN 恒过定点 $Q(1, 0)$.

22. 【解】(1) 证明: 设 $P(x_0, y_0)$, ($0 < x_0 < 3, 0 < y_0 < 1$), 则 $\frac{x_0^2}{9} + y_0^2 = 1$, 即 $x_0^2 + 9y_0^2 = 9$,

直线 $PA: y = \frac{y_0}{x_0 - 3}(x - 3)$, 令 $x = 0$, 则 $y_M = -\frac{3y_0}{x_0 - 3}$, 故 $|BM| = |1 + \frac{3y_0}{x_0 - 3}|$;

直线 $PB: y = \frac{y_0 - 1}{x_0}x + 1$, 令 $y = 0$, 则 $x_N = \frac{-x_0}{y_0 - 1}$, 故 $|AN| = |3 + \frac{x_0}{y_0 - 1}|$;

所以 $|AN| \cdot |BM| = |3 + \frac{x_0}{y_0 - 1}| \cdot |1 + \frac{3y_0}{x_0 - 3}| = |\frac{x_0 + 3y_0 - 3}{y_0 - 1}| \cdot |\frac{x_0 + 3y_0 - 3}{x_0 - 3}|$

$= |\frac{(x_0 + 3y_0 - 3)^2}{(x_0 - 3)(y_0 - 1)}| = |\frac{x_0^2 + 9y_0^2 + 9 + 6x_0y_0 - 6x_0 - 18y_0}{x_0y_0 - x_0 - 3y_0 + 3}| = |\frac{6x_0y_0 - 6x_0 - 18y_0 + 18}{x_0y_0 - x_0 - 3y_0 + 3}| = 6$, 即 $|AN| \cdot |BM|$ 为定值 6;

(2) $\triangle MON$ 面积 $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} |ON| \cdot |OM| = \frac{1}{2} (3 + |AN|)(1 + |BM|)$

$= \frac{1}{2} (|AN| \cdot |BM| + |AN| + 3|BM| + 3) \geq \frac{1}{2} (6 + 2\sqrt{3|AN| \cdot |BM|} + 3) = \frac{9 + 6\sqrt{2}}{2}$,

当且仅当 $|AN| = 3|BM|$, 结合 $|AN| \cdot |BM| = 6$, 即 $|AN| = 3\sqrt{2}, |BM| = \sqrt{2}$ 时取等号,

即 $\triangle MON$ 面积的最小值为 $\frac{9 + 6\sqrt{2}}{2}$.

