

11.29 作业

1. 答案 C

解析 由题意知 $a^2 + 5 = 9$, 解得 $a = 2$, $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$.

2. 答案 D

解析 由题意知, 所求双曲线是等轴双曲线, 设其方程为 $x^2 - y^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$, 将点(5,3)代入方程, 可得 $\lambda = 5^2 - 3^2 = 16$,

所以双曲线方程为 $x^2 - y^2 = 16$, 即 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$.

3. 答案 B

解析 $\because e = \sqrt{3}$,

$\therefore \frac{c}{a} = \sqrt{3}$, 即 $\frac{a^2 + b^2}{a^2} = 3$,

$\therefore b^2 = 2a^2$, $\therefore$ 双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = 1$,

$\therefore$ 渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$.

4. 答案 C

解析 由双曲线的几何性质可得, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1 (a > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm\frac{3}{a}x$, 又因为渐近线方程为 $3x \pm 2y = 0$,

即 $y = \pm\frac{3}{2}x$, 故 $a = 2$.

5. 答案 AD

解析 由双曲线 C 的一个焦点为 $F(5,0)$, 且渐近线方程为 $y = \pm\frac{4}{3}x$, 可得 $c = 5$, 焦点坐标在 x 轴上, 所以 $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, 因

为 $c = 5$, 所以 $b = 4$, $a = 3$, 所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, A 正确; 离心率为 $e = \frac{5}{3}$, B 不正确;

焦点到渐近线的距离为 $d = \frac{4 \times 5}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4$, C 不正确;

$|PF|$ 的最小值为 $c - a = 2$, D 正确.

6. 答案 B

解析 $e = \frac{|F_1F_2|}{|PF_2| - |PF_1|} = \frac{5}{6 - 4} = \frac{5}{2}$.

7. 答案 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

解析 由题意得, $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$,

点 M 的横坐标为 c , 将 $x = c$ 代入双曲线 C 的方程,

得 $\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 所以 $y = \pm\frac{b^2}{a}$,

又 $y > 0$, 所以 $M\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$,

$$\text{所以 } \tan \angle MF_1F_2 = \frac{|MF_2|}{|F_1F_2|} = \frac{b^2}{2ac} = \frac{c^2 - a^2}{2ac} = \frac{e^2 - 1}{2e} = \frac{5 - 1}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

8. 答案 $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{12} = 1$

解析 椭圆 $4x^2 + y^2 = 64$ 可变形为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$,

$$a^2 = 64, \quad c^2 = 64 - 16 = 48,$$

$$\therefore \text{焦点为 } (0, 4\sqrt{3}), (0, -4\sqrt{3}), \text{ 离心率 } e = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{则双曲线的焦点在 } y \text{ 轴上, } c' = 4\sqrt{3}, \quad e' = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{从而 } a' = 6, \quad b'^2 = 12,$$

$$\text{故所求双曲线的方程为 } \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{12} = 1.$$

9. 解 (1) 由两顶点间的距离是 6, 得 $2a = 6$, 即 $a = 3$.

由两焦点所连线段被两顶点和中心四等分可得 $2c = 4a = 12$, 即 $c = 6$,

$$\text{于是有 } b^2 = c^2 - a^2 = 6^2 - 3^2 = 27.$$

由于焦点所在的坐标轴不确定, 故所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ 或 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$.

(2) 设双曲线方程为 $4x^2 - 9y^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$,

$$\text{即 } \frac{x^2}{\frac{\lambda}{4}} - \frac{y^2}{\frac{\lambda}{9}} = 1 (\lambda \neq 0), \text{ 由题意得 } a = 3.$$

$$\text{当 } \lambda > 0 \text{ 时, } \frac{\lambda}{4} = 9, \quad \lambda = 36,$$

$$\text{双曲线方程为 } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1;$$

$$\text{当 } \lambda < 0 \text{ 时, } \frac{-\lambda}{9} = 9, \quad \lambda = -81,$$

$$\text{双曲线方程为 } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{81} = 1.$$

故所求双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{ 或 } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{81} = 1.$$

10. 答案 A

解析 由题意, 得点 $P(2,1)$ 在双曲线的渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 上,

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } a = 2b.$$

$$\text{又 } 2c = 10, \therefore c = 5.$$

$$\text{由 } a^2 + b^2 = c^2, \text{ 解得 } a^2 = 20, b^2 = 5.$$

$$\text{故所求双曲线方程为 } \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

11. 答案 C

解析 设点 $P(x_0, y_0)$, 则有 $\frac{y_0^2}{4} - x_0^2 = 1$,

$$\text{所以 } y_0^2 - 4x_0^2 = 4.$$

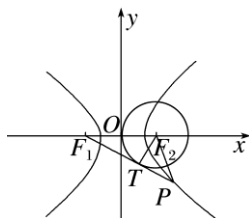
易知双曲线 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ 的渐近线方程为 $2x \pm y = 0$,

$$\text{所以 } |PA| \cdot |PB| = \frac{|2x_0 + y_0|}{\sqrt{5}} \cdot \frac{|2x_0 - y_0|}{\sqrt{5}} = \frac{|4x_0^2 - y_0^2|}{5} = \frac{4}{5}.$$

12. 答案 B

解析 由题意得 $|PF_2| = |F_1F_2| = 2c$, 设直线 PF_1 与圆 $(x - c)^2 + y^2 = c^2$ 相切于点 T , 如图, 则 $PF_1 \perp TF_2$, $|TF_2| = c$, 在

$\text{Rt}\triangle F_1TF_2$ 中, $\angle TF_2F_1 = 60^\circ \Rightarrow |PF_1| = 2\sqrt{3}c$,



则由双曲线的定义可得 $|PF_2| = |PF_1| - 2a = 2\sqrt{3}c - 2a$, 所以 $2c = 2\sqrt{3}c - 2a$, 解得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

13. 答案 $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}x$

解析 设 $P(x_0, y_0)$, $x_0 > 0, y_0 > 0$,

因为 $B(0, b), F_2(c, 0)$,

所以直线 BF_2 的方程为 $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$,

$$\text{又 } S_{\triangle BF_1F_2} = 3S_{\triangle PF_1F_2},$$

$$S_{\triangle BF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 2c \cdot b = bc,$$

$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 2c \cdot y_0 = cy_0,$$

则 $bc = 3cy_0$, 解得 $y_0 = \frac{b}{3}$,

将 $y_0 = \frac{b}{3}$ 代入 $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$ 中, 得 $x_0 = \frac{2c}{3}$,

则 $P(\frac{2c}{3}, \frac{b}{3})$,

所以 $\frac{\frac{4c^2}{9}}{a^2} - \frac{\frac{b^2}{9}}{b^2} = 1$, 又 $a^2 + b^2 = c^2$, 解得 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

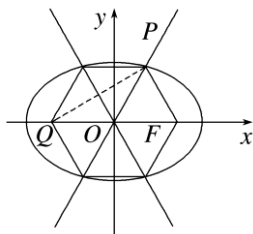
故双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}x$.

☑ 拓广探究

14. 答案 $\sqrt{3}-1$ 2

解析 椭圆、双曲线都关于 x 轴、 y 轴对称, 所以只需考虑第一象限内的情况.

记双曲线 N 的一条渐近线与椭圆 M 在第一象限的交点为 P , 椭圆左焦点为 Q , 右焦点为 F , 连接 PQ , 如图.



由题意知, $\triangle OPF$ 为正三角形, 边长设为 2, 则高为 $\sqrt{3}$,

所以椭圆半焦距为 2, $2a = |PQ| + |PF| = 2\sqrt{3} + 2$, $a = \sqrt{3} + 1$, 椭圆 M 的离心率为 $\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} - 1$.

双曲线 N 的一条渐近线斜率为 $\frac{n}{m} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$,

$$e^2 = \frac{m^2 + n^2}{m^2} = 1 + \frac{n^2}{m^2} = 4,$$

所以双曲线 N 的离心率为 2.

15. 解 因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 为双曲线右支上的任意一点,

所以 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, $|PF_1| = 2a + |PF_2|$,

所以 $\frac{|PF_1|^2}{|PF_2|^2} = \frac{(2a + |PF_2|)^2}{|PF_2|^2} = \frac{4a^2}{|PF_2|^2} + 4a + |PF_2| \geq 8a$, 当且仅当 $\frac{4a^2}{|PF_2|^2} = |PF_2|$,

即 $|PF_2| = 2a$ 时取等号,

所以 $|PF_1| = 2a + |PF_2| = 4a$,

因为 $|PF_1| - |PF_2| = 2a < 2c$, $|PF_1| + |PF_2| = 6a \geq 2c \Rightarrow e = \frac{c}{a} \leq 3$,

所以 $e \in (1, 3]$.