

椭圆与双曲线

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分

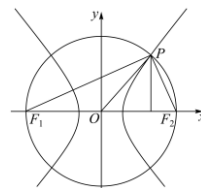
1. 【答案】B 2. 【答案】C 3. 【答案】A 4. 【答案】C 5. 【答案】C 6. 【答案】D
7. 【答案】B

【解析】解法一：设 $|PF_1|=m$ ， $|PF_2|=n$ ，则 $m>n$ 。

由双曲线定义知， $m-n=4$ ，又 $mn=12$ ，故 $m=6$ ， $n=2$

由于 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上，所以 $PF_1 \perp PF_2$ ，故有 $\tan \angle PF_1F_2 = \frac{1}{3}$

从而 $\tan \angle POF_2 = \tan 2\angle PF_1F_2 = \frac{2 \tan \angle PF_1F_2}{1 - \tan^2 \angle PF_1F_2} = \frac{3}{4}$



解法二：同解法一，得到 $m=6$ ， $n=2$ ，则 $|F_1F_2|=2\sqrt{10}$ ，从而得到双曲线方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ 。

设 $P(x_0, y_0)$ ($y_0 > 0$)，联立 $\begin{cases} \frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{6} = 1 \\ x_0^2 + y_0^2 = 10 \end{cases}$ ，解得 $\frac{y_0}{x_0} = \frac{3}{4}$ ，即 $\tan \angle POF_2 = \frac{y_0}{x_0} = \frac{3}{4}$ 。因此，选项 B 正确。

8. 【答案】A 【详解】在椭圆 $\frac{4x^2}{25} + \frac{y^2}{3} = 1$ 中， $a = \frac{5}{2}$ ， $b = \sqrt{3}$ ， $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ， $\therefore |F_1F_2| = 2c = \sqrt{13}$ ，

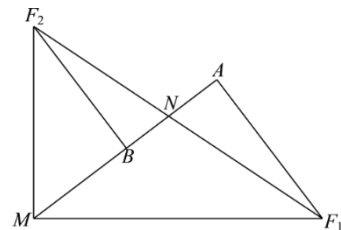
因为 $MF_1 \perp MF_2$ ，且点 M 为第一象限内的点，则 $\begin{cases} |MF_1| + |MF_2| = 2a = 5 \\ |MF_1|^2 + |MF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 13 \end{cases}$ ，可得 $\begin{cases} |MF_1| = 3 \\ |MF_2| = 2 \end{cases}$ ，
 $|MF_1| > |MF_2|$

翻折前，过点 F_1 作 $F_1A \perp MN$ ，垂足为点 A ，过点 F_2 作 $F_2B \perp MN$ ，垂足为点 B ，

设 $\angle NMF_2 = \theta$ ，其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，

则 $|BF_2| = 2 \sin \theta$ ， $|BM| = 2 \cos \theta$ ， $|AF_1| = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 3 \cos \theta$ ，

$|AM| = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 3 \sin \theta$ ，所以， $|AB| = ||AM| - |BM|| = |3 \sin \theta - 2 \cos \theta|$ ，



翻折后，如下图所示：因为平面 $MNF_2 \perp$ 平面 MNF_1 ，平面 $MNF_1 \cap$ 平面 $MNF_2 = MN$ ， $BF_2 \subset$ 平面 MNF_2 ， $BF_2 \perp MN$ ， $\therefore BF_2 \perp$ 平面 MNF_1 ，

$\therefore BF_1 \subset$ 平面 MNF_1 ， $\therefore BF_2 \perp BF_1$ ，又因为 $AF_1 \perp MN$ ，

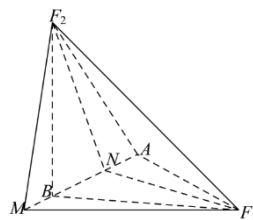
$\therefore |F_1F_2|^2 = |BF_1|^2 + |BF_2|^2 = |AF_1|^2 + |AB|^2 + |BF_2|^2$

$= 9 \cos^2 \theta + (3 \sin \theta - 2 \cos \theta)^2 + 4 \sin^2 \theta = 13 - 12 \sin \theta \cos \theta = 13 - 6 \sin 2\theta$ ，

$\therefore 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，则 $0 < 2\theta < \pi$ ，故当 $2\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，即当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时， $|F_1F_2|$ 取得最小值 $\sqrt{7}$ ，

则在翻折前，在 $\triangle MF_1F_2$ 中， MN 为 $\angle F_1MF_2$ 的角平分线，

所以， $\frac{S_{\triangle MNF_1}}{S_{\triangle MNF_2}} = \frac{|NF_1|}{|NF_2|} = \frac{|MF_1|}{|MF_2|} = \frac{3}{2}$ ，即 $\lambda = \frac{3}{2}$ 。因此，选项 A 正确。



二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

9. 【答案】ACD； 10. 【答案】CD；

11. 【答案】AD

因为椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，所以 $a^2 = 4$ ， $b^2 = 1$ ，所以 $a = 2$ ， $b = 1$ ， $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ ，所以

$F_1(-\sqrt{3}, 0)$ ， $F_2(\sqrt{3}, 0)$ ， $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故 A 正确；设 $P(x, y)$ ，所以 $\overrightarrow{PF_2} = (\sqrt{3} - x, -y)$ ，所以

$$|\overrightarrow{PF_2}|^2 = (x - \sqrt{3})^2 + y^2 = (x - \sqrt{3})^2 + 1 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} - 2\sqrt{3}x + 4 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2, \text{ 因为 } -2 \leq x \leq 2,$$

所以当 $x = -2$ 时 $\left(|\overrightarrow{PF_2}|^2\right)_{\max} = 7 + 4\sqrt{3}$, 即 $|\overrightarrow{PF_2}|_{\max} = 2 + \sqrt{3}$, 故 B 错误;

因为 $S_{\Delta PF_1 F_2} = \frac{1}{2}|y| \cdot 2c = \frac{1}{2}|y| \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}|y|$, 又 $-1 \leq y \leq 1$, 所以当 $y = \pm 1$ 时, 即 P 在短轴的顶点时

$\Delta PF_1 F_2$ 面积的取得最大值, $(S_{\Delta PF_1 F_2})_{\max} = \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$, 故 C 错误;

对于 D: $|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| = 2|\overrightarrow{PO}| = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{\frac{3x^2}{4} + 1}$, 因为 $-2 \leq x \leq 2$, 所以 $1 \leq \frac{3x^2}{4} + 1 \leq 4$,

所以 $2 \leq |\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| \leq 4$, 故 D 正确;

12. 【答案】ACD

【解析】在椭圆里, 焦点 $\Delta F_1 P F_2$ 的面积 $S = S_{\Delta F_1 P F_2} = b^2 \tan \frac{\theta}{2} = 3 \times \tan \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, 故 A 正确;

在双曲线里, 焦点 $\Delta F_1 P F_2$ 的面积 $S = S_{\Delta F_1 P F_2} = n^2 \cot \frac{\theta}{2} = 3 \times \cot \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}$, 故 B 错误;

设共同的焦点为 $(-c, 0)$, $(c, 0)$, 设 $|PF_1| = s$, $|PF_2| = t$,

由椭圆和双曲线的定义可得 $s + t = 2a$, $s - t = 2m$, 解得 $s = a + m$, $t = a - m$,

在 $\Delta PF_1 F_2$ 中, $\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{3}$, 可得 $|F_1 F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \cos \angle F_1 P F_2$,

即为 $4c^2 = (a + m)^2 + (a - m)^2 - (a + m)(a - m) = a^2 + 3m^2$,

即有 $\frac{a^2}{c^2} + \frac{3m^2}{c^2} = 4$, 即为 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} = 4$, 当 $e_2 = \sqrt{3}$ 时, 则 $e_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 C 正确;

由 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} \geq 2\sqrt{\frac{3}{e_1^2 e_2^2}}$, 可得 $e_1 \cdot e_2 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 当且仅当 $e_2 = \sqrt{3}e_1$ 时, 取得最小值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 D 正确.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13. 【答案】4 或 $\frac{1}{4}$; 14. 【答案】 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$;

15. 【答案】3 【解析】 $\because e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$, $\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = e^2 - 1 = 3 - 1 = 2$, $\therefore \frac{b}{a} = \sqrt{2}$, 因为渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

所以渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{2}x$, 故设 $C_2: y^2 - 2x^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$, 又过点 $(2, \sqrt{6})$, 那么 $\lambda = -2$,

故双曲线 $C_2: x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$, 则同支焦点弦里通径长 4 最短, 异支焦点弦里实轴长 2 最短, 因为

$|AB| = 4 > 2$, 再结合对称性, 故这样的这样有 3 条, 一条为通径所在直线, 两条为异支焦点弦所在直线.

16. 【答案】13

【解析】圆 $C_1: (x+4)^2 + y^2 = 4$ 的圆心为 $(-4, 0)$, 半径为 $r_1 = 2$;

圆 $C_2: (x-4)^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $(4, 0)$, 半径为 $r_2 = 1$,

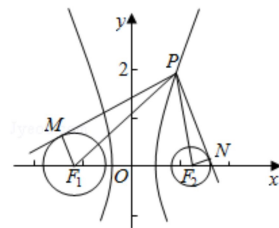
设双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$ 的左右焦点为 $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$,

连接 PF_1 , PF_2 , F_1M , F_2N , 可得

$$\begin{aligned} |PM|^2 - |PN|^2 &= (|PF_1|^2 - r_1^2) - (|PF_2|^2 - r_2^2) \\ &= (|PF_1|^2 - 4) - (|PF_2|^2 - 1) = |PF_1|^2 - |PF_2|^2 - 3 = (|PF_1| - |PF_2|)(|PF_1| + |PF_2|) - 3 \\ &= 2a \times (|PF_1| + |PF_2| - 3) = 2(|PF_1| + |PF_2|) - 3 \geq 2 \times 2c - 3 = 2 \times 8 - 3 = 13. \end{aligned}$$

当且仅当 P 为右顶点时, 取得等号, 即最小值 13.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分



17. 解: 由椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 知, 椭圆 C 的长半轴长 $a = 3$, 短半轴长 $b = 2$, 则半焦距 $c = \sqrt{5}$.

由椭圆对称性不妨令焦点 $F_1(-\sqrt{5}, 0)$4 分

因点 P 在椭圆 C 上, 且 $PF_1 \perp F_1F_2$, 则由 $\begin{cases} x = -\sqrt{5} \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 \end{cases}$ 得 $|y| = \frac{4}{3}$, 即有 $|PF_1| = \frac{4}{3}$8 分

由椭圆定义得 $|PF_2| = 2a - |PF_1| = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3}$, 所以 $|PF_2|$ 的值为 $\frac{14}{3}$10 分

18. 解: (1) 将 $(0, 4)$ 代入 C 的方程得 $\frac{16}{b^2} = 1$, $\therefore b = 4$. 又 $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$, 得 $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{9}{25}$,

即 $1 - \frac{16}{a^2} = \frac{9}{25}$, $\therefore a = 5$, $\therefore C$ 的方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$6 分

(2) 过点 $(3, 0)$ 且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线方程为 $y = \frac{4}{5}(x - 3)$.

设直线与 C 的交点为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 将直线方程 $y = \frac{4}{5}(x - 3)$ 代入 C 的方程, 得 $\frac{x^2}{25} + \frac{(x-3)^2}{25} = 1$,

即 $x^2 - 3x - 8 = 0$, 解得 $x_1 + x_2 = 3$, $\therefore AB$ 的中点坐标 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2}{5}(x_1 + x_2 - 6) = -\frac{6}{5}$,

即中点坐标为 $M(\frac{3}{2}, -\frac{6}{5})$12 分

19. 解: 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$, 于是 $c = 2$.

从而 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, 所以 $|AB| = 4$. 于是线段 AB 的长度为 4.5 分

(2) 根据正弦定理得: $\frac{|AB|}{\sin C} = \frac{|BC|}{\sin A} = \frac{|AC|}{\sin B} = 2R$ (R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径),

所以 $\sin A = \frac{|BC|}{2R}$, $\sin B = \frac{|AC|}{2R}$, $\sin C = \frac{|AB|}{2R}$.

因为 $\sin B - \sin A = \frac{1}{2} \sin C$, 所以 $\frac{|AC|}{2R} - \frac{|BC|}{2R} = \frac{1}{2} \times \frac{|AB|}{2R}$.

于是 $|AC| - |BC| = \frac{1}{2}|AB| = 2 < |AB| = 4$, 所以点 C 的轨迹是以 A, B 为左右焦点的双曲线的右支,

且 $|AC| - |BC| = 2 = 2a$, $|AB| = 4 = 2c$. 从而 $a = 1$, $c = 2$. $b^2 = c^2 - a^2 = 3$.

所以顶点 C 的轨迹方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 (x > 1)$12 分

20. 解: (1) 由题意知 $b = 1$, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $a^2 = b^2 + c^2$, 所以 $a^2 = 2$, $b^2 = 1$. 故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. -5 分

(2) 易知直线 l 的斜率存在, 可设直线 l 的方程为 $y + 1 = k(x - 2)$, 即 $y = kx - 2k - 1$,

将 $y = kx - 2k - 1$ 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 得 $(1 + 2k^2)x^2 - 4k(2k + 1)x + 8k^2 + 8k = 0$,

由题设可知 $\Delta = -16k(k + 2) > 0$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{4k(2k + 1)}{1 + 2k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{8k^2 + 8k}{1 + 2k^2}$,

于是 $k_1 + k_2 = \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} = \frac{kx_1 - 2k - 2}{x_1} + \frac{kx_2 - 2k - 2}{x_2}$

$$= 2k - 2(k + 1) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) = 2k - 2(k + 1) \times \frac{\frac{4k(2k + 1)}{1 + 2k^2}}{\frac{8k^2 + 8k}{1 + 2k^2}} = 2k - (2k + 1) = -1. \quad \text{.....12 分}$$

21. 解: (1) 设椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 由题意可知 $2a = 4$, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 又 $a^2 + b^2 = c^2$, 解得 $a = 2$, $c = \sqrt{3}$, $b = 1$, 故椭圆 C 的方程为 $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$. ……5 分

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = kx + 1 \end{cases}$ 得 $(k^2 + 4)x^2 + 2kx - 3 = 0$,

故 $x_1 + x_2 = -\frac{2k}{k^2 + 4}$, $x_1 x_2 = -\frac{3}{k^2 + 4}$, ① 设 $\triangle OAB$ 的面积为 S , 由 $x_1 x_2 = -\frac{3}{k^2 + 4} < 0$,

知 $S = \frac{1}{2}(|x_1| + |x_2|) = \frac{1}{2}|x_1 - x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = 2\sqrt{\frac{k^2 + 3}{(k^2 + 4)^2}}$,

令 $k^2 + 3 = t$, 知 $t \geq 3$, $\therefore S = 2\sqrt{\frac{1}{t + \frac{1}{t} + 2}}$. 对于函数 $y = t + \frac{1}{t} (t \geq 3)$,

易知其在 $t \in [3, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore t + \frac{1}{t} \geq \frac{10}{3}$, $\therefore 0 < \frac{1}{t + \frac{1}{t} + 2} \leq \frac{3}{16}$, $\therefore 0 < S \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $\triangle OAB$ 面积的取值范围是 $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$. ……12 分

22. 解: (1) $\because e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{c^2}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2}} = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\therefore \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 因此, $a = \sqrt{3}b$; ……3 分

(2) ① 由 (1) 知, 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 即 $x^2 + 3y^2 = 3b^2$,

当 $(\frac{9}{10}, -\frac{\sqrt{3}}{15})$ 在椭圆 C 的内部时, $(\frac{9}{10})^2 + 3 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{15})^2 < 3b^2$, 可得 $b > \frac{3\sqrt{3}}{10}$. ……4 分

设点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 则 $\begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{9}{10} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{10} \end{cases}$, 所以, $\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = -\frac{\sqrt{3}}{9}$,

由已知可得 $\begin{cases} x_1^2 + 3y_1^2 = 3b^2 \\ x_2^2 + 3y_2^2 = 3b^2 \end{cases}$, 两式作差得 $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 3(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$,

所以 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{3(y_1 + y_2)} = -\frac{1}{3} \times (-\frac{9}{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}$, 所以, 直线 l 方程为 $y - (-\frac{\sqrt{3}}{10}) = \sqrt{3}(x - \frac{9}{10})$,

所以, 直线 l 的方程为 $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$; ……8 分

② 联立 $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 3b^2 \\ y = \sqrt{3}(x - 1) \end{cases}$, 消去 y 可得 $10x^2 - 18x + 9 - 3b^2 = 0$. $\Delta = 18^2 - 40(9 - 3b^2) = 120b^2 - 36 > 0$,

由韦达定理可得 $x_1 + x_2 = \frac{9}{5}$, $x_1 x_2 = \frac{9 - 3b^2}{10}$,

又 $\because OP \perp OQ$, 而 $\overrightarrow{OP} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OQ} = (x_2, y_2)$,

$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + \sqrt{3}(x_1 - 1) \cdot \sqrt{3}(x_2 - 1) = 4x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 3$

$= \frac{2(9 - 3b^2) - 27 + 15}{5} = \frac{6 - 6b^2}{5} = 0$,

解得 $b^2 = 1$ 合乎题意, 故 $a^2 = 3b^2 = 3$,

因此, 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$. ……12 分