

凉山州 2023—2024 学年度上期期末检测试卷

高二数学

全卷共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、座位号、准考证号用 0.5 毫米的黑色签字笔填写在答题卡上,并检查条形码粘贴是否正确。
2. 选择题使用 2B 铅笔涂在答题卡对应题目标号的位置上;非选择题用 0.5 毫米黑色签字笔书写在答题卡的对应框内,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试卷上答题无效。
3. 考试结束后,将答题卡收回。

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、单项选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项符合要求)

1. 直线 $x+2y-1=0$ 的一个方向向量是(▲)

A. $(1,-2)$

B. $(1,2)$

C. $(2,1)$

D. $(-2,1)$

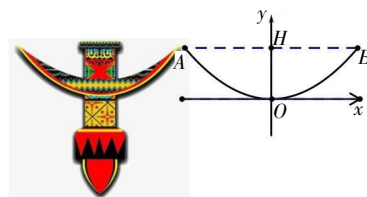
2. “牛角拱”是凉山彝族民房檐枋装饰艺术中的重要特色之一,如图,已知牛角拱外侧弧线部分为抛物线的一部分,宽度 $AB=1m$,高度 $OH=0.5m$ 根据图中的坐标系,则这条抛物线方程为(▲)

A. $y^2=2x$

B. $y^2=\frac{1}{2}x$

C. $x^2=2y$

D. $x^2=\frac{1}{2}y$



3. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=2$, $a_4=12$, 则 a_6 的值为(▲)

A. 18

B. 20

C. 22

D. 24

4. 经过两条直线 $2x-3y+10=0$ 和 $3x+4y-2=0$ 的交点,且垂直于直线 $2x-y-1=0$ 的直线方程为(▲)

A. $x-2y-6=0$

B. $x+2y-2=0$

C. $2x-y-3=0$

D. $2x+y-2=0$

5. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果.哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”,如 $30=7+23$.在不大于 10 的素数中,选两个不同的数,和为偶数的概率为(▲)

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

6. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 4 的正方形, $PC=PD=4$, $\angle PCA=45^\circ$, 则直线 PB 与 AD 所成角的正弦值为(▲)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

7. 过点(3,1)的直线与圆 $C: x^2+y^2-4x-1=0$ 交于 A, B 两点, 则当 AB 弦长最短时 $\triangle ABC$ 的面积为(▲)

- A. $\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{6}$

8. 空间四边形 $ABCD$ 中, 点 M 在 AD 上, 且 $\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{MA}$, N 为 BC 中点, 则 $\overrightarrow{MN}$ 等于(▲)

- A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

二、多项选择题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.)

9. 下列结论正确的是(▲)

- A. 若向量 $\vec{a}=(0,1,1)$, $\vec{b}=(2,-2,1)$, $\vec{c}=(2,-1,2)$, 则 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面
B. 已知平面 α, β 不重合, 平面 α 和平面 β 的一个法向量均为 $\vec{n}=(1,0,-2)$, 则 $\alpha//\beta$
C. 若直线 l 的方向向量为 $\vec{a}=(1,1,2)$, 平面 α 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,1,-1)$, 则 $l//\alpha$
D. 若向量 $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(1,-1,1)$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 则下列说法正确的是(▲)

- A. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 60°
B. 点 B 与平面 ACB_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. 平面 ACD_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°
D. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 30°

11. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , $a_2=1, a_4=2$, 数列 $\{(2n-1)a_{2n}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则(▲)

- A. $q=\sqrt{2}$ B. $a_{10}=16$
C. 数列 $\{a_n^2\}$ 是等比数列 D. $T_n=(2n-3)\times 2^n+4$

12. 我们把离心率为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 的双曲线叫做理想双曲线, 若双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 (a>0, b>0)$ 是理想双曲线, 左右顶点分别为 A_1, A_2 , 虚轴端点为 B_1, B_2 , 右焦点为 F , 离心率为 e , 则(▲)

- A. 当 $b^2=1$ 时, $a^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
B. 当 $b^2=1$ 时, 则 A_1 到渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
C. $\overrightarrow{A_2B_1} \perp \overrightarrow{FB_2}$
D. $\triangle A_1FB_1$ 的外接圆的面积为 $\frac{2+\sqrt{5}}{4}\pi$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共计 20 分.)

13. 过点(1,2)且在两坐标轴上的截距互为相反数的直线方程为_____▲_____.

14. 已知点 $A(1,-1,1), B(1,-2,-1), C(3,-2,1)$, 则点 A 到直线 BC 的距离为_____▲_____.

15. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $2S_3=3S_2+3a_1$, 则 $\frac{a_1}{d}$ _____▲_____.

16. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作圆 $C:(x+2)^2+y^2=4$ 的两条切线, 切点分别为 P, Q , 若 $\triangle FPQ$ 为等边三角形, 则 p 的值为_____▲_____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共计 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算过程)

17. (10 分) 已知直线 $l: kx-y+1-2k=0(k \in \mathbb{R})$.

(1) 求证: 直线 l 经过一个定点;

(2) 若直线 l 交 x 轴的正半轴于点 A , 交 y 轴的正半轴于点 B , O 为坐标原点, 设 $\triangle AOB$ 的面积为 S , 求 S 的最小值及此时直线 l 的方程.

18. (12 分) 为参加凉山州第八届“学宪法讲宪法”演讲比赛, 某校组织选拔活动, 通过两轮比赛最终决定参加州级比赛人选, 已知甲同学晋级第二轮的概率为 $\frac{1}{3}$, 乙同学晋级第二轮的概率为 m . 若甲、乙能进入第二轮, 在第二轮比赛中甲、乙两人能胜出的概率均为 $\frac{1}{3}$. 假设甲、乙第一轮是否晋级和在第二轮中能否胜出互不影响.

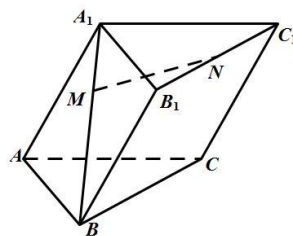
(1) 若甲、乙有且只有一人能晋级第二轮的概率为 $\frac{5}{12}$, 求 m 的值;

(2) 在(1)的条件下, 求甲、乙两人中有且只有一人能参加州级比赛的概率.

19. (12分)三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, N 为 B_1C_1 中点, $3A_1M=A_1B$. 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$

(1) 试用 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{MN}$;

(2) 若 $\angle BAC = \angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 60^\circ$, $AB=AC=AA_1=1$, 求 MN 的长.



20. (12分)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1$.

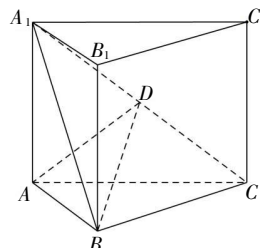
(1) 证明: $\{a_n+1\}$ 为等比数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (12分)如图 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱, $BC \perp AB$, $BC=AB=AA_1$, 设 D 为 A_1C 的中点.

(1) 证明 $A_1B \perp BC$;

(2) 求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.



22. (12分)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>b>0$) 的离心率是 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 点 $A(-3,0)$ 在 C 上.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过直线 $x = -\frac{9\sqrt{5}}{5}$ 上一点 P 作椭圆的切线, 切点为 M, N , 证明: 直线 MN 过定点.