

专题 圆锥曲线的光学性质与应用

一. 基本原理

1. 抛物线的光学性质:

如图 1 所示, 从抛物线的焦点 F 发出的光线, 被抛物线反射后, 得到的是一系列的与抛物线对称轴平行(或重合)的光线; 如图 2 所示, 设抛物线在 P 处的切线 l 交对称轴于点 Q , $PM \perp l$ 交对称轴于点 M , 则焦点 F 是 QM 的中点.

2. 椭圆的光学性质:

如图 3 所示, 从椭圆的一个焦点发出的光线, 被椭圆反射后, 必定经过另一个焦点; 如图 4 所示, 椭圆在点 P 处的切线为 l , 直线 $PQ \perp l$ 交直线 F_1F_2 于点 Q , 则 PQ 平分 $\angle F_1PF_2$, 由角平分线性定理,

$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|QF_1|}{|QF_2|}.$$

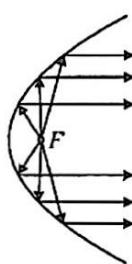


图1

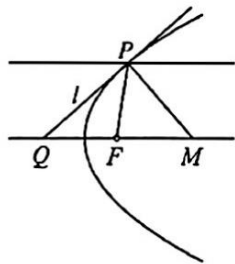


图2

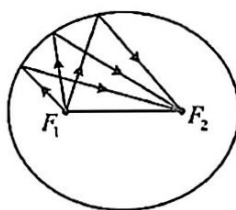


图3

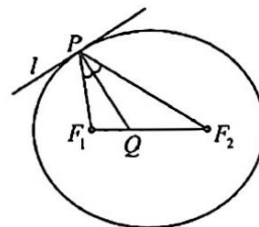


图4

3. 双曲线的光学性质:

如图 5 所示, 从双曲线一个焦点发出的光线, 被双曲线反射后, 反射光线的反向延长线交于另一个焦点; 如图 6 所示, 双曲线在点 P 处的切线 l 与直线 F_1F_2 相交于点 Q ,

则 PQ 平分 $\angle F_1PF_2$, 由角平分线性定理, $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|QF_1|}{|QF_2|}$

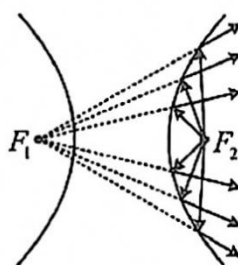


图5

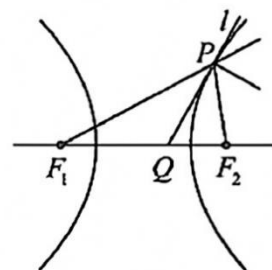


图6

二. 典例分析

例 1. 历史上第一个研究圆锥曲线的是梅纳库莫斯(公元前 375 年—325 年), 大约 100 年后, 阿波罗尼奥斯更详尽、系统地研究了圆锥曲线, 并且他还进一步研究了这些圆锥曲线的光学性质, 比如: 从抛物线的焦点发出的光线或声波在经过抛物线反射后, 反射光线平行于抛物线的对称轴; 反之, 平行于抛物线对称轴的光线, 经抛物线反射后, 反射光线经过抛物线的焦点. 设抛物线 $C: y^2 = x$, 一束平行于抛物线对称轴的光线经过 $A(5, 2)$, 被抛物线反射后, 又射到抛物线 C 上的 Q 点, 则 Q 点的坐标为 ()

- A. $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}\right)$ C. $\left(\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}\right)$ D. $\left(\frac{1}{64}, -\frac{1}{8}\right)$

例 2. 抛物线有如下光学性质：过焦点的光线经抛物线反射之后得到的光线平行于抛物线的对称轴；反之，平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点．已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，一条平行于 x 轴的光线从点 $M(2,1)$ 射出，经过抛物线上的点 A 反射后，再经抛物线上的另一点 B 射出，则 $\triangle ABM$ 的周长为（ ）

- A. $\frac{25}{4} + \sqrt{13}$ B. $\frac{7}{2} + \sqrt{29}$ C. $8 + \sqrt{13}$ D. $8 + \sqrt{29}$

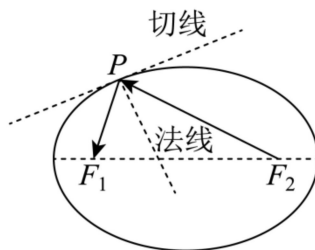
例 3. 阿波罗尼斯（约公元前 262 年～约公元前 190 年），古希腊著名数学家，主要著作有《圆锥曲线论》、《论切触》等. 尤其《圆锥曲线论》是一部经典巨著，代表了希腊几何的最高水平，此书集前人之大成，进一步提出了许多新的性质. 其中也包括圆锥曲线的光学性质，光线从双曲线的一个焦点发出，通过双曲线的反射，反射光线的反向延长线经过其另一个焦点. 已知双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，其离心率 $e = \sqrt{5}$ ，从 F_2 发出的光线经过双曲线 C 的右支上一点 E 的反射，反射光线为 EP，若反射光线与入射光线垂直，则 $\sin \angle F_1 F_2 E =$ ()

- A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

例 4. 椭圆具有如下光学性质：从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线过椭圆的另一个焦点（如图）. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过点 F_2 的直线与 E 交于点 A，

B ，过点 A 作 E 的切线 l ，点 B 关于 l 的对称点为 M ，若 $|AB| = \frac{8a}{5}$ ， $\frac{|BF_1|}{|MF_1|} = \frac{2}{3}$ ，则 $\frac{S_{\triangle MF_1F_2}}{S_{\triangle AF_1F_2}} =$ ()

注: S 表示面积.



- A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. $\frac{7}{2}$

例 5. 抛物线有如下光学性质: 由其焦点射出的光线经抛物线反射后, 沿平行于抛物线对称轴的方向射出. 反之, 平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点. 已知抛物线 $C: y^2 = x$, O 为坐

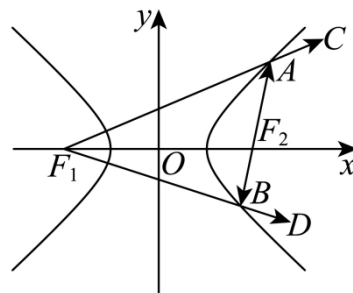
标原点，一束平行于 x 轴的光线 l_1 从点 $P\left(\frac{41}{16}, 1\right)$ 射入，经过 C 上的点 $A(x_1, y_1)$ 反射后，再经 C 上另一点

$B(x_2, y_2)$ 反射后，沿直线 l_2 射出，经过点 Q ，则下列结论正确的是 ()

A. $y_1 y_2 = -\frac{1}{2}$ B. $|AB| = \frac{25}{16}$ C. PB 平分 $\angle ABQ$

D. 延长 AO 交直线 $x = -\frac{1}{4}$ 于点 C . 则 C, B, Q 三点共线

例 6. 双曲线具有光学性质：从双曲线一个焦点发出的光线经过双曲线镜面反射，其反射光线的反向延长线经过双曲线的另一个焦点. 如图，双曲线 $E: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，从 F_2 发出的两条光线经过 E 的右支上的 A, B 两点反射后，分别经过点 C 和 D ，其中 $\overline{AF_2}, \overline{BF_2}$ 共线，则 ()



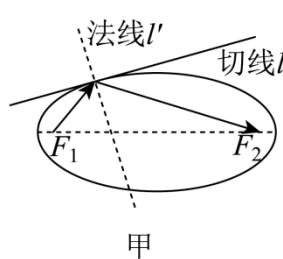
A. 若直线 AB 的斜率 k 存在，则 k 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right)$

B. 当点 C 的坐标为 $(2\sqrt{10}, \sqrt{10})$ 时，光线由 F_2 经过点 A 到达点 C 所经过的路程为 6

C. 当 $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB}^2$ 时， $\triangle BF_1 F_2$ 的面积为 12

D. 当 $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB}^2$ 时， $\cos \angle F_1 F_2 A = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

例 7. 如图甲，从椭圆的一个焦点发出的光线或声波，经椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点，其中法线 l' 表示与椭圆 C 的切线垂直且过相应切点的直线，如图乙，椭圆 C 的中心在坐标原点，焦点为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0) (c > 0)$ ，

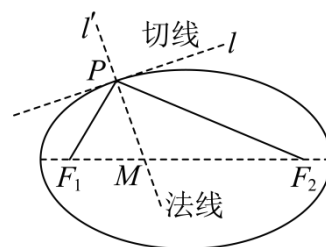


由 F_1 发出的光经椭圆两次反射后回到 F_1 经过的路程为

8c. 利用椭圆的光学性质解决以下问题：

椭圆 C 的离心率为_____；点 P 是椭圆 C 上除顶点外的任意一点，椭圆在点 P 处的切线为 l ， F_2 在 l 上的射影 H 在圆 $x^2 + y^2 = 8$ 上，则椭圆 C 的方程为_____.

例 8. 如图所示，由圆锥曲线的光学性质知道：从椭圆的一个焦点发出的光线，经椭圆反射（即经椭圆在该点处的切线反射）后，反射光线经过椭圆的另一个



焦点. 已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 直线 l 与椭圆 C 相切于点 $P(1, y_0)$,

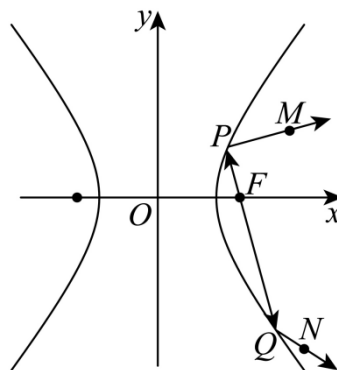
过点 P 且与直线 l 垂直的直线 l' 与椭圆长轴交于点 M , 则 $|F_1M| : |F_2M| =$ _____.

例 9. 双曲线具有如下光学性质: 从一个焦点发出的光线经双曲线反射后, 反射光线的反向延长线一定经过另一个焦点. 已知双曲线

$C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$, 如图从 C 的一个焦点 F 射出的光线, 经过 P, Q 两

点反射后, 分别经过点 M 和 N . 若 $|\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PQ}|$, $\cos \angle PQN = -\frac{12}{13}$,

则 C 的离心率为 _____.



例 10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上、下顶点分别为 A, B , 且短轴长为 $2\sqrt{3}$, T 为椭圆上 (除 A, B

外) 任意一点, 直线 TA, TB 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$, F_1, F_2 分别为左、右焦点.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) “天眼”是世界上最大、最灵敏的单口径射电望远镜, 它的外形像一口“大锅”, 可以接收到百亿光年外的电磁信号. 在“天眼”的建设中, 用到了大量的圆锥曲线的光学性质, 请以上面的椭圆 C 为代表, 证明:

由焦点 F_1 发出的光线射到椭圆上任意一点 M 后反射, 反射光线必经过另一焦点 F_2 . (提示: 光线射到曲线上某点并反射时, 法线垂直于该点处的切线)

仅供会东县中学使用