

双曲线 课后作业 (12.4)

基础巩固

1. 答案 B

解析 直线与双曲线有唯一公共点时, 直线与双曲线不一定相切(直线与双曲线的渐近线平行时); 直线与双曲线相切时, 直线与双曲线一定有唯一公共点.

2. 答案 C

解析 设点 $P(x, y)$, 由题意知 $k_1 \cdot k_2 = \frac{y}{x-a} \cdot \frac{y}{x+a} = \frac{y^2}{x^2 - a^2} = \frac{\frac{y^2}{a^2}}{\frac{x^2 - a^2}{a^2}} = \frac{b^2}{a^2} = 3$, 所以其渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$.

3. 答案 B

解析 双曲线 $x^2 - y^2 = 8$ 的右焦点为 $(4, 0)$, 经过双曲线 $x^2 - y^2 = 8$ 的右焦点且斜率为 2 的直线方程为 $y = 2(x - 4)$, 代入 $x^2 - y^2 = 8$ 并整理得 $3x^2 - 32x + 72 = 0$, 设交点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{32}{3}$, $x_1 x_2 = 24$, 所以直线被双曲线截得的线段的长为 $\sqrt{1+4} \times \sqrt{\frac{32^2}{9} - 96} = \frac{20\sqrt{2}}{3}$.

4. 答案 C

解析 双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$, 过 F_1 的直线 l 垂直于 x 轴时, $|AB| = \frac{2b^2}{a} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$,

双曲线两个顶点的距离为 $2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 满足 $|AB| = 3\sqrt{2}$ 的直线 l 有 3 条, 一条是通径所在的直线, 另两条与右支相交.

5. 答案 D

解析 设 $F_1(-c, 0)$, $A(-c, y_0)$, 则 $\frac{c^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{2} = 1$, $\therefore \frac{y_0^2}{2} = \frac{c^2}{a^2} - 1 = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{2}{a^2}$,

$\therefore y_0^2 = \frac{4}{a^2}$, $\therefore |AB| = 2|y_0| = \frac{4}{a}$. 又 $S_{\triangle ABF_2} = 2\sqrt{6}$, $\therefore \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot \frac{4}{a} = \frac{4c}{a} = 2\sqrt{6}$,

$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\therefore \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\therefore$ 该双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

6. 答案 AC

解析 由双曲线 $C: \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{m} = 1$ 过点 $(3, \sqrt{2})$, 可得 $m = 1$, 则双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$. 所以 $a = \sqrt{3}$,

$b = 1$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$, 因为双曲线 C 的焦距为 $2c = 4$, 所以选项 A 正确;

因为双曲线 C 的离心率为 $\frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以选项 B 不正确;

因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 所以选项 C 正确;

将直线 $2x - \sqrt{3}y - 1 = 0$ 与双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 联立, 消去 y 可得 $3x^2 - 4x + 4 = 0$, $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 4 = -$

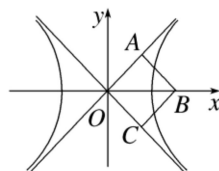
$32 < 0$, 所以直线 $2x - \sqrt{3}y - 1 = 0$ 与双曲线 C 没有公共点, 所以选项 D 不正确.

7. 答案 2

解析 设 B 为双曲线的右焦点, 如图所示.

$\because$ 四边形 $OABC$ 为正方形且边长为 2, $\therefore c = |OB| = 2\sqrt{2}$.

又 $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$, $\therefore \frac{b}{a} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$, 即 $a = b$. 又 $\because a^2 + b^2 = c^2 = 8$, $\therefore a = 2$.



8. 答案 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x + 3$

解析 由题意可知直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = kx + 3$,

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} y = kx + 3, \\ \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 1, \end{cases}$ 消去 y 可得

$(3k^2 - 2)x^2 + 18kx + 21 = 0$, 则 $3k^2 - 2 \neq 0$, 解得 $k \neq \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$.

又 $\Delta = (18k)^2 - 4 \times 21 \times (3k^2 - 2) = 72k^2 + 168 > 0$,

且 $x_1 + x_2 = -\frac{18k}{3k^2 - 2}$, $x_1x_2 = \frac{21}{3k^2 - 2}$.

故 $y_1y_2 = (kx_1 + 3)(kx_2 + 3) = \frac{21k^2}{3k^2 - 2} - \frac{54k^2}{3k^2 - 2} + 9 = \frac{-6k^2 - 18}{3k^2 - 2}$,

因为以 AB 为直径的圆过坐标原点 O , 所以 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$,

即 $x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{21}{3k^2 - 2} + \frac{-6k^2 - 18}{3k^2 - 2} = 0$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故直线 l 的方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x + 3$.

9. 解 (1) 显然直线 AB 的斜率存在, 设直线 AB 的方程为 $y - 2 = k(x - 1)$,

即 $y = kx + 2 - k$. 由 $\begin{cases} y = kx + 2 - k, \\ x^2 - \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$

消去 y , 整理得 $(2 - k^2)x^2 - 2k(2 - k)x - k^2 + 4k - 6 = 0$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则 $1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k(2-k)}{2-k^2}$ ($2-k^2 \neq 0$), 解得 $k=1$. 当 $k=1$ 时, 满足 $\Delta > 0$,

$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $y = x + 1$.

(2) 由(1)得 $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 x_2 = -3$, $\therefore |AB| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$

$= \sqrt{2} \times \sqrt{4 + 12} = 4\sqrt{2}$. 又点 O 到直线 AB 的距离 $d = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$.

10. 解 双曲线方程可化为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 故 $a^2 = 1$, $b^2 = 3$, $c^2 = a^2 + b^2 = 4$, $\therefore c = 2$. $\therefore F_2(2, 0)$,

又直线 l 的倾斜角为 45° , $\therefore$ 直线 l 的斜率 $k = \tan 45^\circ = 1$,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y = x - 2$, 代入双曲线方程, 得 $2x^2 + 4x - 7 = 0$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\therefore x_1 \cdot x_2 = -\frac{7}{2} < 0$,

$\therefore A, B$ 两点不位于双曲线的同一支上. $\therefore x_1 + x_2 = -2$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{7}{2}$,

$\therefore |AB| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(-2)^2 - 4 \times \left(-\frac{7}{2}\right)} = 6$.

综合运用

11. 答案 B

解析 由已知条件易得直线 l 的斜率 $k = \frac{-15 - 0}{-12 - 3} = 1$,

设双曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$), $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

则 $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, ①

$\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1$, ②

$x_1 + x_2 = -24$, $y_1 + y_2 = -30$,

由①②得 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4b^2}{5a^2}$, 从而 $\frac{4b^2}{5a^2} = 1$,

又因为 $a^2 + b^2 = c^2 = 9$,

故 $a^2 = 4$, $b^2 = 5$, 所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

12. 答案 C

解析 设双曲线的半焦距为 c ,

则 $F(c, 0)$, 将 $x = c$ 代入双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 不妨取 $C(c, \frac{b^2}{a})$, $B(c, -\frac{b^2}{a})$,

又 $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, 故 $k_{A_1B} = \frac{-\frac{b^2}{a}}{c+a} = -\frac{b^2}{a(a+c)}$, $k_{A_2C} = \frac{\frac{b^2}{a}}{c-a} = \frac{b^2}{a(c-a)}$.

因为 $A_1B \perp A_2C$, 故 $-\frac{b^2}{a(a+c)} \times \frac{b^2}{a(c-a)} = -1$, 即 $\frac{b^4}{a^2(c^2 - a^2)} = 1$, 即 $\frac{b^4}{a^2b^2} = 1$,

所以 $a = b$, 故渐近线方程是 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 即 $y = \pm x$.

13. 答案 5

解析 双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - x^2 = 1 (a > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

所以 $e^2 = 1 + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4}$, 解得 $a = 2$,

所以 $F_1(0, -\sqrt{5})$, $F_2(0, \sqrt{5})$, 双曲线方程为 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$,

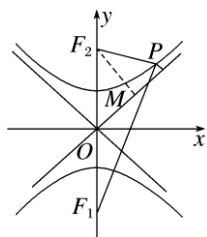
由 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 0$ 得双曲线的渐近线方程为 $y = \pm 2x$,

由 P 为该双曲线上支上的一个动点,

根据双曲线的定义可得 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 4$,

所以 $|PF_1| = 4 + |PF_2|$, 设点 P 到渐近线 $y = 2x$ 的距离为 d ,

则 $|PF_1| + d = 4 + |PF_2| + d$, 过 F_2 作渐近线 $y = 2x$ 的垂线, 垂足为 M , 如图.



所以 $|F_2M| = \frac{|\sqrt{5}|}{\sqrt{1+2^2}} = 1$, 所以 $|PF_1| + d = 4 + |PF_2| + d \geq 4 + |F_2M| = 5$,

同理 $|PF_1|$ 与 P 到渐近线 $y = -2x$ 的距离之和的最小值也为5.

☑ 拓广探究

14. 答案 $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ 3π

解析 $\because$ 双曲线 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore c = \frac{2\sqrt{3}}{3}a,$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = \frac{4}{3}a^2,$$

$$\therefore b^2 = \frac{1}{3}a^2,$$

$\therefore$ 双曲线的方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\frac{1}{3}a^2} = 1$ 过点 $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$,

$$\text{即} \frac{12}{a^2} - \frac{9}{\frac{1}{3}a^2} = 1, \quad a^2 = 3, \quad b^2 = 1,$$

$$\therefore \text{双曲线方程为} \frac{y^2}{3} - x^2 = 1,$$

则渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$,

取直线 $x = m (0 \leq m \leq 1)$,

$$\text{代入} \frac{y^2}{3} - x^2 = 1, \text{ 得 } y = \sqrt{3 + 3m^2},$$

$$\text{代入 } y = \sqrt{3}x, \text{ 得 } y = \sqrt{3}m,$$

$\therefore$ 直线 $x = m$ 与阴影部分旋转一周所得圆环的面积 $S = (3 + 3m^2)\pi - 3m^2\pi = 3\pi$.

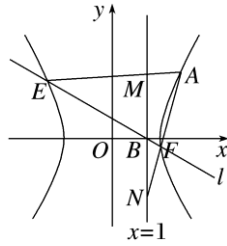
又高度为1,

故根据祖暅原理, 该图形绕 x 轴旋转一周所得几何体与底面半径为 $\sqrt{3}$, 高为1的圆柱“幂势相同”, 故它绕 x 轴旋转一圈所得几何体的体积为 3π .

$$15. (1) \text{解} \quad \text{由题知} \begin{cases} e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}, \\ S_{\triangle AF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 2c \times 2 = 2\sqrt{6}, \\ a^2 + b^2 = c^2, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = \sqrt{2}, \\ b = 2, \\ c = \sqrt{6}, \end{cases}$$

$\therefore$ 双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$.

(2)证明 将 $l: x = my + 1$ 代入双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$,



$$\text{得 } (2m^2 - 1)y^2 + 4my - 2 = 0.$$

设 $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } 2m^2 - 1 \neq 0, \Delta = 32m^2 - 8 > 0,$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{4m}{2m^2 - 1},$$

$$y_1 y_2 = -\frac{2}{2m^2 - 1}.$$

$$\text{直线 } AE \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1 - 2}{x_1 - 2}(x - 2) + 2,$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 得 } y_M = \frac{2 - y_1}{x_1 - 2} + 2;$$

$$\text{直线 } AF \text{ 的方程为 } y = \frac{y_2 - 2}{x_2 - 2}(x - 2) + 2,$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 得 } y_N = \frac{2 - y_2}{x_2 - 2} + 2.$$

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{2 - y_1}{x_1 - 2} + \frac{2 - y_2}{x_2 - 2} \\ &= \frac{-2my_1y_2 + (2m + 1)(y_1 + y_2) - 4}{(my_1 - 1)(my_2 - 1)} = -4, \end{aligned}$$

$$\therefore y_M + y_N = 0,$$

又 $B(1, 0)$,

$\therefore |BM| = |BN|$, 即 B 是 MN 的中点.

$$\therefore y_M + y_N = 0,$$

又 $B(1, 0)$, $\therefore |BM| = |BN|$, 即 B 是 MN 的中点.