



$$\therefore a_n = 11 - n.$$

$$(2) \because a_1 = 10, a_n = 11 - n,$$

$$\therefore S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = -\frac{1}{2}n^2 + \frac{21}{2}n = -\frac{1}{2}\left(n - \frac{21}{2}\right)^2 + \frac{441}{8}.$$

故当 $n = 10$ 或 11 时, S_n 取得最大值, 其最大值为 55.

$$10. \text{解} \quad (1) \because \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = -2S_n S_{n-1}, \textcircled{1} \therefore S_n(1 + 2S_{n-1}) = S_{n-1}.$$

由上式, 若 $S_{n-1} \neq 0$, 则 $S_n \neq 0$.

$$\therefore S_1 = a_1 \neq 0, \text{由递推关系知 } S_n \neq 0 (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{由} \textcircled{1} \text{ 式得 } \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2 (n \geq 2). \therefore \left\{ \frac{1}{S_n} \right\} \text{ 是等差数列,}$$

其中首项为 $\frac{1}{S_1} = \frac{1}{a_1} = 2$, 公差为 2.

$$(2) \because \frac{1}{S_n} = \frac{1}{S_1} + 2(n-1) = \frac{1}{a_1} + 2(n-1), \therefore S_n = \frac{1}{2n}.$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = -\frac{1}{2n(n-1)},$$

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$ 不适合上式,

$$\therefore a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=1, \\ -\frac{1}{2n(n-1)}, & n \geq 2. \end{cases}$$

提升探究

$$11. \text{解} \quad (1) a_1 = 2, a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 1 (n \geq 2),$$

$$\text{故 } b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} (n \geq 2) \\ \frac{2}{3} (n=1). \end{cases}$$

$$(2) \because c_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{2n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1},$$

$$\therefore c_{n+1} - c_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{-n-1}{(2n+2)(2n+3)(n+1)} < 0.$$

$$\therefore \{c_n\} \text{ 是递减数列. } \therefore \lambda \geq c_1 = \frac{5}{6}.$$

$$12. (1) \text{证明} \quad \text{因为 } 2S_n - na_n = \frac{1}{2}n, \text{ 则有:}$$

若 $n = 1$, 则 $2a_1 - a_1 = \frac{1}{2}$, 即 $a_1 = \frac{1}{2}$; 且 $2S_{n+1} - (n+1)$

$$1) a_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1),$$

两式相减得 $2a_{n+1} - (n+1)a_{n+1} + na_n = \frac{1}{2}$, 即 $na_n =$

$$(n-1)a_{n+1} + \frac{1}{2}, \text{ 则 } (n+1)a_{n+1} = na_{n+2} + \frac{1}{2},$$

两式相减得 $2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n$, 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列.

(2) 解 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{由题意可知: } \begin{cases} a_6 > 0 \\ a_7 < 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{1}{2} + 5d > 0 \\ \frac{1}{2} + 6d < 0 \end{cases}, \text{ 解得 } -\frac{1}{10} <$$

$$d < -\frac{1}{12}, \text{ 则 } a_9 + a_5 = 2a_1 + 12d = 1 + 12d < 0, \text{ 且}$$

$$a_5 > 0, \text{ 所以 } \frac{a_9}{a_5} < -1.$$

$$13. \text{解} \quad (1) \text{由题意可得} \begin{cases} x+z=1+y \\ 2+z=x+y, \text{ 所以 } x+y+ \\ x+3=y+z \end{cases}$$

$$z=6;$$

(2) 证明: 条件②可叙述为: 在所述棱形中, 两相邻顶点上放置的数的差与另两个相邻顶点上放置的数的差相等,

由此在图 2 中同一条线上的三个连续的结点上放置的数成等差数列 (因为有两个结点既与这三个连续结点的前两个构成菱形, 也与后两个构成菱形),

所以 $x+z=2y$;

由于等差数列的每一项都是首项与另一项的一次式, 所以各结点上放置的数都是 a, b, c 的一次式, 若 $a=b=c=1$, 那么所放置的数均相等, 所以 $r=0$,

若 a, b, c 不相等, 设 a 最大, c 最小, 由于等差数列中, 最大(最小)的项是首项或末项, 所以在所放置的数中也是 a 最大, c 最小, 所以 $r=1$.

综上, $a=b=c=1, r=0$; a, b, c 不相等, $r=1$;

(3) 解: 当 a, b, c 任意两个字母互换时, 相当于改变三角形的位置, 所以总和 S 保持不变, 即 S 是 a, b, c 的对称式 (对称函数), 因此 a, b, c 的系数相等, 即

$$S = k(a+b+c) + h, \text{ 其中 } k, h \text{ 为选定系数,}$$

令 $a=b=c=0$, 这时所有结点上的数为 0, $S=0$, 从而 $h=0$,



令 $a=b=c=1$, 这时所有结点上的数为 1, S 等于结点的个数为 $1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$,

从而 $k=\frac{(n+1)(n+2)}{6}$,

所以 $S=\frac{(n+1)(n+2)}{6}(a+b+c)$.

§ 4.2.3 等差数列综合应用

二、知识要点

1. (1) 同一个常数 (2) $A \quad a+b$

2. (1) $a_1+(n-1)d$

(2) $na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

3. (1) $(n-m)d$ (2) $a_k+a_l=a_m+a_n$ (3) md

三、典型例题

例 1 答案 C

解析 方法 1: $\because \{a_n\}$ 为等差数列,

$$\therefore S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=\frac{11 \times 2a_6}{2}=11a_6=33,$$

$$\therefore a_6=3, \therefore a_2+a_7+a_9=3a_6=9.$$

方法 2: $\because \{a_n\}$ 为等差数列,

$$\therefore S_{11}=11a_1+\frac{11 \times 10}{2}d=11(a_1+5d)=33,$$

$$\therefore a_1+5d=3,$$

$$\therefore a_2+a_7+a_9=a_1+d+a_1+6d+a_1+8d=3(a_1+5d)=9.$$

故选 C.

变式 1 答案 68

解析 解: 由等差数列的性质知 $a_7+a_{12}=a_9+a_{10}$, 因为前 n 项和为 S_n 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7+a_{12}=12-a_8$, 所以 $a_7+a_{12}=a_9+a_{10}=12-a_8$, 即 $a_8+a_9+a_{10}=12$, 所以 $a_9=4$,

$$\text{所以 } S_{17}=\frac{17(a_1+a_{17})}{2}=\frac{17 \times 2a_9}{2}=17a_9=68. \text{ 故答案: } 68$$

例 2 答案 31

解析 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 > 0$, 由 $S_{17} < S_{14}$ 得: $3a_{16}=a_{15}+a_{16}+a_{17}=S_{17}-S_{14} < 0$, 即

$a_{16} < 0$, 数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=\frac{a_{16}-a_1}{16-1} < 0$, 因此, 数列

$\{a_n\}$ 是首项为正的递减数列, 又 $S_{30} > 0$, 则当 $n \leq 30, n \in \mathbf{N}^*$ 时, $S_n > 0$, 而 $S_{31}=\frac{a_1+a_{31}}{2} \times 31=31a_{16} < 0$, 因此, 当 $n \geq 31, n \in \mathbf{N}^*$ 时, $S_n < 0$,

所以当满足 $S_n < 0$ 成立时, n 的最小值为 31. 故答案为: 31

变式 2 答案 ①③④

解析 $\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 能取到最大值,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是递减数列, 且 $d < 0$, 故①正确;

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n, \because d < 0,$$

$\therefore$ 数列 $\{S_n\}$ 先增后减, 故②错误;

由 $a_{10}+a_{11} < 0, a_{10} \cdot a_{11} < 0$, 得 $a_{10} > 0, a_{11} < 0, \therefore$ 数列 $\{S_n\}$ 的最大项是 S_{10} , 故③正确;

$$\text{由 } S_{19}=19a_{10} > 0, S_{20}=\frac{(a_{10}+a_{11})20}{2} < 0, \text{ 得数列}$$

$\{S_n\}$ 的最小的正数是 S_{19} , 故④正确.

$\therefore$ 正确的序号是①③④. 故答案为: ①③④.

$$\begin{aligned} \text{例 3 解} \quad (1) \text{ 依题意, 得: } \frac{S_1}{S_2} &= \frac{S_2}{S_4}, \text{ 即 } \frac{a_1}{a_1+a_2} \\ &= \frac{a_1+a_2}{a_1+a_2+a_3+a_4} \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \frac{1}{2+d} = \frac{2+d}{4+6d}, \text{ 化简得: } d(d-2)=0 \text{ 因为 } d \neq 0, \text{ 所以 } d=2$$

$$\text{所以 } a_n=1+2(n-1)=2n-1 \text{ 经检验: } \frac{S_n}{S_{2n}}=\frac{n^2}{4n^2}=$$

$$\frac{1}{4} \text{ 成立}$$

(2) 因为 $a_n=2n-1$ 所以

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{4n}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{4(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) - \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\frac{1}{4} \left[\left(1-\frac{1}{5} \right) + \right.$$

$$\left. \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9} \right) + \cdots + \frac{1}{2n-5} - \frac{1}{2n-1} + \right.$$



$$\left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) < \frac{1}{3}.$$

变式 3 解 (1) 由 $a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n} + 1$, 有 $a_{n+1} = (\sqrt{a_n} + 1)^2$, 即 $\sqrt{a_{n+1}} = (\sqrt{a_n} + 1)$, 因为数列 $\{a_n\}$ 是正项数列, 所以 $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + 1$, 即 $\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = 1$, 可得数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 所以 $\sqrt{a_n} = \sqrt{a_1} + n - 1 = n$, 故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2$;

$$(2) \text{ 由 (1) 可得 } b_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

$$\text{所以 } S_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)^2},$$

$$\text{故不等式 } S_n < \frac{99}{100} \text{ 可化为 } 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{99}{100}, \text{ 解得 } 0 < n < 9,$$

所以满足 $S_n < \frac{99}{100}$ 的正整数 n 的集合为 $\{n \in \mathbf{N}^* \mid 1 \leq n \leq 8\}$.

四、备选例题

例 1 答案 A

解析 由

$$\frac{\sin^2 a_3 - \cos^2 a_3 + \cos^2 a_3 \cos^2 a_6 - \sin^2 a_3 \sin^2 a_6}{\sin(a_2 + a_7)} = 1, \text{ 得}$$

$$\frac{-\cos 2a_3 + \cos(a_3 + a_6)\cos(a_3 - a_6)}{\sin(a_2 + a_7)} = 1,$$

由积化和差公式, 得

$$\frac{\frac{1}{2}\cos 2a_3 + \frac{1}{2}\cos 2a_6 - \cos 2a_3}{\sin(a_2 + a_7)} = 1,$$

$$\text{整理, 得 } \frac{\frac{1}{2}(\cos 2a_6 - \cos 2a_3)}{\sin(a_2 + a_7)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(-2)\sin(a_6 + a_3)\sin(a_6 - a_3)}{\sin(a_6 + a_3)} = 1,$$

所以 $\sin(3d) = -1$, 因为公差 $d \in (-1, 0)$, 所以 $3d \in (-3, 0)$,

$$\text{则 } 3d = -\frac{\pi}{2}, d = -\frac{\pi}{6}.$$

$$\text{所以 } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{12}n^2 + \left(a_1 + \frac{\pi}{12}\right)n,$$

$$\text{设 } f(n) = -\frac{\pi}{12}n^2 + \left(a_1 + \frac{\pi}{12}\right)n, \text{ 其图像的对称轴方程为 } n = \frac{6}{\pi} \left(a_1 + \frac{\pi}{12}\right).$$

由题意, 当且仅当 $n = 10$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 取得最大值,

$$\text{所以 } \frac{19}{2} < \frac{6}{\pi} \left(a_1 + \frac{\pi}{12}\right) < \frac{21}{2}, \text{ 解得 } \frac{3\pi}{2} < a_1 < \frac{5\pi}{3}. \text{ 则首}$$

项 a_1 的取值范围是 $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$. 故 B, C, D 错误. 故选 A.

例 2 答案 62

解析 由题意知: 等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = |a_1 + 1| + |a_2 + 1| + \cdots + |a_n + 1|$

$$= |a_1 - 1| + |a_2 - 1| + \cdots + |a_n - 1| = 2021, \text{ 故等差数列不是常数列, 且 } \{a_n\} \text{ 中的项一定满足}$$

$$\begin{cases} a_n > 0 \\ a_{n-1} < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_n < 0 \\ a_{n-1} > 0 \end{cases}, \text{ 且项数为偶数, 设 } n = 2k, k \in$$

$$\mathbf{N}^+, \text{ 等差数列的公差为 } d, \text{ 不妨设 } \begin{cases} a_{k+1} > 0 \\ a_k < 0 \end{cases}, \text{ 则 } a_1 <$$

$$0, d > 0, \text{ 且 } a_k + 1 \leq 0, \text{ 即 } a_k \leq -1,$$

$$\text{由 } a_{k+1} - 1 \geq 0, \text{ 则 } -1 + kd \geq a_1 + kd \geq 1, \text{ 即 } kd \geq 2, \text{ 即有 } d \geq 2,$$

$$\text{则 } |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

$$= -a_1 - a_2 - \cdots - a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{2k}$$

$$= -\left[ka_1 + \frac{k(k-1)d}{2}\right] + k(a_1 + kd) + \frac{k(k-1)}{2}d =$$

$$k^2d = 2021,$$

$$\text{可得 } 2021 \geq 2k^2, \text{ 解得 } k \leq \sqrt{\frac{2021}{2}} \approx 31.7, \text{ 即有 } k \text{ 的}$$

最大值为 31, n 的最大值为 62.



故答案为:62.

五、小结与反思

略

练习

基础巩固

1. 答案 B

解析 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n + \lambda - [(n-1)^2 + (n-1) + \lambda] = 2n$,

故可知当 $n \geq 2$ 时, $\{a_n\}$ 单调递增, 故 $\{a_n\}$ 为递增数列只需满足 $a_2 > a_1$, 即 $4 > 2 + \lambda \Rightarrow \lambda < 2$.

故选 B

2. 答案 ABC

解析 $S_4 = \frac{4 \times (a_1 + a_4)}{2} = 0$,

$\therefore a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = 0$, A 正确;

$a_5 = a_1 + 4d = 5$, ①

$a_1 + a_4 = a_1 + a_1 + 3d = 0$, ②

联立①②得 $\begin{cases} d=2, \\ a_1=-3. \end{cases}$

$\therefore a_n = -3 + (n-1) \times 2 = 2n - 5$, B 正确, D 错误;

$S_n = -3n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - 4n$, C 正确, 故

选 ABC.

3. 答案 B

解析 令 $m=1$, 由 $a_{m+n} = a_m + a_n$ 可得 $a_{n+1} = a_1 + a_n$, 所以 $a_{n+1} - a_n = 3$,

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1 = 3$, 公差为 3 的等差数列,

$a_n = 3 + 3(n-1) = 3n$,

所以 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k = \frac{k(a_1 + a_k)}{2} =$

$\frac{k(3+3k)}{2} = 135$.

整理可得 $k^2 + k - 90 = 0$, 解得 $k=9$ 或 $k=-10$ (舍).

4. 答案 A

解析 : 由题意可得: $\therefore$ 等差数列 $\{a_n\}$ 共有 $2n+1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 项, 它的奇数项构成了一个新的等差数列, 项数为 $n+1$, 偶数项也构成了一个新的等差数列, 项数为 n , $\therefore$ 由等差数列求和公式, 奇数项和为

$$\frac{(n+1)(a_1 + a_{2n+1})}{2} = 310, (1)$$

$$\text{偶数项和为 } \frac{n(a_2 + a_{2n})}{2} = 300, (2)$$

由等差数列的性质可得: $a_1 + a_{2n+1} = a_2 + a_{2n}$, (1) $\div$

(2) 可得: $\frac{n+1}{n} = \frac{31}{30}$, 解得: $n=30$, 故选 A.

5. 答案 BD

解析 由题意可知, 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

由题意可得 $a_1 = 5$, $30a_1 + \frac{30 \times 29d}{2} = 390$, 解得

$$d = \frac{16}{29},$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = \frac{16n+129}{29}.$$

$$\therefore b_n = 2^{a_n}, \therefore \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2^d \text{ (非零常数)},$$

则数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, B 正确;

$$\therefore 5d = 5 \times \frac{16}{29} = \frac{80}{29} \neq 3, \frac{b_{10}}{b_5} = (2^d)^5 = 2^{5d} \neq 2^3,$$

$\therefore b_{10} \neq 8b_5$, A 错误;

$$a_{30} = a_1 + 29d = 5 + 16 = 21,$$

$$\therefore a_1 b_{30} = 5 \times 2^{21} > 105, \text{C 错误};$$

$$a_4 = a_1 + 3d = 5 + 3 \times \frac{16}{29} = \frac{193}{29}, a_5 = a_1 + 4d = 5 + 4 \times$$

$$\frac{16}{29} = \frac{209}{29},$$

$$\text{所以 } \frac{a_3 + a_5 + a_7}{a_2 + a_4 + a_6} = \frac{3a_5}{3a_4} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{209}{193}, \text{D 正确. 故选 BD.}$$

6. 答案 9

解析 在等差数列中, $S_6, S_{12} - S_6, S_{18} - S_{12}$ 成等差数列, $\therefore S_6 = 1, S_{12} = 4, \therefore 1, 3, S_{18} - 4$ 成公差为 2 的等差数列, 即 $S_{18} - 4 = 5, \therefore S_{18} = 9$.

7. 答案 $\frac{37}{27}$

$$\text{解析 } \frac{a_7}{b_7} = \frac{2a_7}{2b_7} = \frac{a_1 + a_{13}}{b_1 + b_{13}} = \frac{\frac{a_1 + a_{13}}{2} \times 13}{\frac{b_1 + b_{13}}{2} \times 13} = \frac{S_{13}}{T_{13}} =$$

$$\frac{3 \times 13 - 2}{2 \times 13 + 1} = \frac{37}{27}.$$

8. 答案 2016



解析
$$\begin{cases} (a_2-1)^3+2016(a_2-1)=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ (a_{2015}-1)^3+2016(a_{2015}-1)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{又}$$

$f(x)=x^3+2016x$ 为单调递增的奇函数,

所以 $a_2-1=-(a_{2015}-1)$, 即 $a_2+a_{2015}=2$,

$$S_{2016}=\frac{2016(a_1+a_{2016})}{2}=1008(a_1+a_{2016})=1008$$

$(a_2+a_{2015})=2016$. 故答案为: 2016.

9. (1) 解 设该等差数列为 $\{a_n\}$, 则 $a_1=a, a_2=4$,

$$a_3=3a,$$

由已知有 $a+3a=8$, 得 $a_1=a=2$, 公差 $d=4-2=2$,

$$\text{所以 } S_k=ka_1+\frac{k(k-1)}{2} \cdot d=2k+\frac{k(k-1)}{2} \times 2=k^2+k,$$

由 $S_k=110$, 得 $k^2+k-110=0$, 解得 $k=10$ 或 $k=-11$ (舍去), 故 $a=2, k=10$.

(2) 证明 由 (1) 得 $S_n=\frac{n(2+2n)}{2}=n(n+1)$, 则

$$b_n=\frac{S_n}{n}=n+1,$$

故 $b_{n+1}-b_n=(n+2)-(n+1)=1$, 即数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2, 公差为 1 的等差数列,

$$\text{所以 } T_n=\frac{n(2+n+1)}{2}=\frac{n(n+3)}{2}.$$

10. 解 (1) 设公差为 d . $\because \{a_n\}$ 为等差数列, $\therefore a_1+a_5=a_2+a_4=18$, 又 $a_2a_4=65$,

$\therefore a_2, a_4$ 是方程 $x^2-18x+65=0$ 的两个根,

又公差 $d>0$, $\therefore a_2<a_4$, $\therefore a_2=5, a_4=13$.

$$\therefore \begin{cases} a_1+d=5, \\ a_1+3d=13, \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} a_1=1, \\ d=4, \end{cases}$$

$$\therefore a_n=4n-3.$$

(2) 由 (1) 知, $S_n=n+\frac{n(n-1)}{2} \times 4=2n^2-n$, 假设存在常数 k , 使数列 $\{\sqrt{S_n+kn}\}$ 为等差数列. 由

$$\begin{aligned} \sqrt{S_1+k}+\sqrt{S_3+3k} &= 2\sqrt{S_2+2k}, \text{ 得 } \sqrt{1+k}+\sqrt{15+3k}=2\sqrt{6+2k}, \text{ 解得 } k=1. \therefore \sqrt{S_n+kn} \\ &= \sqrt{2n^2}=\sqrt{2}n, \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } \sqrt{2}n-\sqrt{2}(n-1)=\sqrt{2}, \text{ 为常数,} \end{aligned}$$

$\therefore$ 数列 $\{\sqrt{S_n+kn}\}$ 为等差数列. 故存在常数 $k=1$,

使得数列 $\{\sqrt{S_n+kn}\}$ 为等差数列.

提升探究

11. 答案 -4

解析 由题意知 $a_1>0, d<0, S_{2k-1}=\frac{a_1+a_{2k-1}}{2}$

$$(2k-1)=(2k-1)S_n, \text{ 则 } S_n=\frac{a_1+a_{2k-1}}{2}=a_k, \text{ 当 } n=$$

1 时 $S_1=a_1=a_k, \therefore k=1$,

当 $n=2$ 时 $S_2=a_1+a_2=a_k, 2a_1+d=a_1+(k-1)d$,

$$a_1=(k-2)d, d=\frac{a_1}{k-2},$$

又 $a_1>0, d<0$, 则 $k-2<0$, 则 $k<2, \therefore k=1$,

$$\therefore d=-a_1, \therefore S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}(-a_1)=a_k=a_1+$$

$$(k-1)(-a_1),$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}(n^2-3n+4),$$

$$\therefore k-2n=\frac{1}{2}(n^2-7n+4), \therefore n=3 \text{ 或 } 4 \text{ 时 } k-2n \text{ 取}$$

最小值为 -4.

故答案为: -4

12. 解 (1) $\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d<0, a_2+a_6=-8$,

$$\therefore a_2+a_6=a_3+a_5=-8, \text{ 又 } \because a_3a_5=7,$$

$\therefore a_3, a_5$ 是一元二次方程 $x^2+8x+7=0$ 的两个根,

且 $a_3>a_5$,

解方程 $x^2+8x+7=0$, 得 $a_3=-1, a_5=-7$,

$$\therefore \begin{cases} a_1+2d=-1, \\ a_1+4d=-7, \end{cases} \text{ 解得 } a_1=5, d=-3.$$

$$\therefore a_n=5+(n-1) \times (-3)=-3n+8.$$

(2) 由 (1) 知 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=5n+\frac{n(n-1)}{2} \times$

$$(-3)=-\frac{3}{2}n^2+\frac{13}{2}n.$$

$$\because b_n=|a_n|, \therefore b_1=5, b_2=2, b_3=|-1|=1, b_4=|-4|=4,$$

当 $n \geq 3$ 时, $b_n=|a_n|=3n-8$.

当 $n < 3$ 时, $T_1=5, T_2=7$;

$$\text{当 } n \geq 3 \text{ 时, } T_n=-S_n+2S_2=\frac{3n^2}{2}-\frac{13n}{2}+14.$$



$$\because T_n \geq 1464, \therefore T_n = \frac{3n^2}{2} - \frac{13n}{2} + 14 \geq 1464,$$

$$\text{即 } (3n-100)(n+29) \geq 0, \text{ 解得 } n \geq \frac{100}{3},$$

$\therefore n$ 的最小值为 34.

13. 解 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 而 $b_n =$

$$\begin{cases} a_n - 6, n = 2k - 1 \\ 2a_n, n = 2k \end{cases}, k \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{则 } b_1 = a_1 - 6, b_2 = 2a_2 = 2a_1 + 2d, b_3 = a_3 - 6 = a_1 + 2d - 6,$$

$$\text{于是 } \begin{cases} S_4 = 4a_1 + 6d = 32 \\ T_3 = 4a_1 + 4d - 12 = 16 \end{cases}, \text{ 解得 } a_1 = 5, d = 2,$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 2n + 3,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 2n + 3$.

(2) 方法 1: 由 (1) 知,

$$S_n = \frac{n(5+2n+3)}{2} = n^2 + 4n, b_n = \begin{cases} 2n-3, n=2k-1 \\ 4n+6, n=2k \end{cases},$$

$$k \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } b_{n-1} + b_n = 2(n-1) - 3 + 4n + 6 =$$

$$6n+1, T_n = \frac{13+(6n+1)}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n,$$

$$\text{当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n \right) - (n^2 + 4n) = \frac{1}{2}n(n-1) > 0, \text{ 因此 } T_n > S_n,$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } T_n = T_{n+1} - b_{n+1} = \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{7}{2}$$

$$(n+1) - [4(n+1) + 6] = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 5,$$

$$\text{当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 5 \right) - (n^2 + 4n) = \frac{1}{2}(n+2)(n-5) > 0,$$

因此 $T_n > S_n$, 所以当 $n > 5$ 时, $T_n > S_n$.

$$\text{方法 2: 由 (1) 知, } S_n = \frac{n(5+2n+3)}{2} = n^2 + 4n, b_n =$$

$$\begin{cases} 2n-3, n=2k-1 \\ 4n+6, n=2k \end{cases}, k \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } T_n = (b_1 + b_3 + \cdots + b_{n-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_n) = \frac{-1+2(n-1)-3}{2} \cdot \frac{n}{2} + \frac{14+4n+6}{2} \cdot \frac{n}{2} =$$

$$\frac{n}{2} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n,$$

$$\text{当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n \right) - (n^2 + 4n) =$$

$$\frac{1}{2}n(n-1) > 0, \text{ 因此 } T_n > S_n,$$

当 n 为奇数时, 若 $n \geq 3$,

$$\text{则 } T_n = (b_1 + b_3 + \cdots + b_n) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{n-1}) =$$

$$\frac{-1+2n-3}{2} \cdot \frac{n+1}{2} + \frac{14+4(n-1)+6}{2} \cdot \frac{n-1}{2} =$$

$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 5$$

显然 $T_1 = b_1 = -1$ 满足上式, 因此当 n 为奇数时,

$$T_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 5,$$

$$\text{当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 5 \right) - (n^2 + 4n) = \frac{1}{2}(n+2)(n-5) > 0, \text{ 因此 } T_n > S_n, \text{ 所以当 } n >$$

5 时, $T_n > S_n$.

4.3 等比数列

§ 4.3.1 等比数列的概念(1)

二、知识要点

1.2 比 公比 q

$$2. a_n = a_1 q^{n-1}$$

3. 等比中项 $\pm \sqrt{ab}$

三、典型例题

例 1 解 (1) 由等比数列的通项公式, 得

$$a_6 = 3 \times (-2)^{6-1} = -96.$$

(2) 设等比数列的公比为 q ,

$$\text{那么 } \begin{cases} a_1 q^2 = 20, \\ a_1 q^5 = 160, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} q = 2, \\ a_1 = 5. \end{cases}$$

$$\therefore a_n = a_1 q^{n-1} = 5 \times 2^{n-1}.$$

方法规律: 等比数列的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 中有四个量 a_1, q, n, a_n . 已知其中三个量可求得第四个量, 简称“知三求一”.

变式 1 解 (1) 法一: 因为 $\begin{cases} a_4 = a_1 q^3, \\ a_7 = a_1 q^6, \end{cases}$ 所以

$$\begin{cases} a_1 q^3 = 2, & \text{①} \\ a_1 q^6 = 16. & \text{②} \end{cases} \text{ 由 } \frac{\text{②}}{\text{①}} \text{ 得 } q^3 = 8, \text{ 从而 } q = 2, \text{ 而 } a_1 q^3 = 2,$$