



$$\because m \neq n, \therefore a_1 + \frac{m+n-1}{2}d = -1.$$

$$\therefore S_{m+n} = (m+n)a_1 + \frac{(m+n)(m+n-1)}{2}d$$

$$= (m+n) \left(a_1 + \frac{m+n-1}{2}d \right)$$

$$= -(m+n).$$

法二: 设 $S_n = An^2 + Bn (n \in \mathbb{N}^*)$,

$$\text{则} \begin{cases} Am^2 + Bm = n, & \textcircled{3} \\ An^2 + Bn = m, & \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \text{ 得 } A(m^2 - n^2) + B(m - n) = n - m.$$

$$\because m \neq n, \therefore A(m+n) + B = -1,$$

$$\therefore A(m+n)^2 + B(m+n) = -(m+n),$$

$$\text{即 } S_{m+n} = -(m+n).$$

四、备选例题

例 1 答案 $\frac{4n-5}{8n-7} \quad \frac{5}{11}$

$$\text{解 } \because S_{2n-1} = \frac{(a_1 + a_{2n-1}) \cdot (2n-1)}{2}$$

$$= \frac{2a_n \cdot (2n-1)}{2} = (2n-1)a_n$$

$$\text{同理 } T_{2n-1} = (2n-1)b_n,$$

$$\therefore \frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{2(2n-1)-3}{4(2n-1)-3} = \frac{4n-5}{8n-7},$$

$$\therefore \frac{a_5}{b_5} = \frac{4 \times 5 - 5}{8 \times 5 - 7} = \frac{5}{11}.$$

例 2 解 $\because 2\sqrt{S_n} = a_n + 1,$

$$\therefore 2\sqrt{a_1} = a_1 + 1,$$

$$\text{解出 } a_1 = 1.$$

$$\text{又 } 4S_n = (a_n + 1)^2 \quad \textcircled{1}$$

$$4S_{n-1} = (a_{n-1} + 1)^2 (n \geq 2) \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \quad 4a_n = (a_n + 1)^2 - (a_{n-1} + 1)^2,$$

$$\therefore (a_n - 1)^2 - (a_{n-1} + 1)^2 = 0,$$

$$\therefore (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 2) = 0,$$

$$\because a_n > 0,$$

$$\therefore a_n - a_{n-1} = 2,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列.

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1.$$

五、小结与反思

1. 等差数列的前 n 项和公式 2 的一般形式: $S_n =$

$An^2 + Bn (A, B \text{ 为常数})$, 当 $d \neq 0$ 时, S_n 是关于 n 的二次函数, 且不含常数项. 反之若一个数列的前 n 项和 $S_n = An^2 + Bn (A, B \text{ 为常数})$, 则这个数列一定是等差数列.

2. 研究等差数列 $\{a_n\}$ 中, 有关 S_n 的最值问题, 可以先求出 S_n 的表达式, 再利用二次函数的知识求最值, 也可以直接利用 $\{a_n\}$ 的通项公式, 结合等差数列的单调性求取得最值时的项数 n .

练习

基础巩固

1. 答案 C

解析 $\because a_3 + a_4 + a_5 = 12, \therefore a_4 = 4$, 所以 $a_1 + a_2 + \dots + a_7 = \frac{7(a_1 + a_7)}{2} = 7a_4 = 28$, 故选 C.

2. 答案 A

解析 设该数列的公差为 d , 则 $a_4 + a_6 = 2a_1 + 8d = 2 \times (-11) + 8d = -6$, 解得 $d = 2$, 所以 $S_n = -11n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - 12n = (n-6)^2 - 36$, 所以当 $n = 6$ 时, S_n 取最小值.

3. 答案 B

解析 由 $a_1 + a_2 + \dots + a_{98} + a_{99} = 99$,

$$\text{得 } 99a_1 + \frac{99 \times 98}{2} = 99.$$

$$\therefore a_1 = -48, \therefore a_3 = a_1 + 2d = -46.$$

又 $\because \{a_{3n}\}$ 是以 a_3 为首项, 以 3 为公差的等差数列.

$$\therefore a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{99} = 33a_3 + \frac{33 \times 32}{2} \times 3$$

$$= 33(48 - 46) = 66.$$

4. 答案 B

解析 “ $S_{3n} - S_{2n} < S_{2n} - S_n$ ”, 即 $S_n + S_{3n} < 2S_{2n}$,

$$\text{则 } na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} + 3na_1 + \frac{3n(3n-1)d}{2} <$$

$$2 \left[2na_1 + \frac{2n(2n-1)d}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)d}{2} + \frac{3n(3n-1)d}{2} < 2n(2n-1)d$$

$$\Leftrightarrow (n^2 - n + 9n^2 - 3n - 8n^2 + 4n)d < 0$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 d < 0 \Leftrightarrow d < 0.$$



则“ $d < 0$ ”是“ $S_{3n} - S_{2n} < S_{2n} - S_n$ ”的充要条件.

故选 B

5. 答案 ACD

解析 解: 三角形数构成数列 $\{a_n\}: 1, 3, 6, 10, \dots$,

易发现 $a_2 - a_1 = 2, a_3 - a_2 = 3, a_4 - a_3 = 4, \dots, a_n - a_{n-1} = n (n \geq 2)$,

累加得 $a_n - a_1 = 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{(n-1)(2+n)}{2}$,

$\therefore a_n = \frac{n(n+1)}{2} (n \geq 2)$,

显然 $a_1 = 1$ 满足上式, $\therefore a_n = \frac{n(n+1)}{2}$,

正方形数构成数列 $\{b_n\}: 1, 4, 9, 16, \dots$,

易发现 $b_2 - b_1 = 3, b_3 - b_2 = 5, b_4 - b_3 = 7, \dots, b_n - b_{n-1} = 2n - 1 (n \geq 2)$,

累加得 $b_n - b_1 = \frac{(2n+2)(n-1)}{2}, \therefore b_n = n^2 (n \geq 2)$,

显然 $b_1 = 1$, 满足上式, $\therefore b_n = n^2$,

对于 A, $\therefore \frac{b_n}{2a_n} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \frac{b_1}{2a_1} \cdot \frac{b_2}{2a_2} \cdot \frac{b_3}{2a_3} \cdot \dots \cdot \frac{b_n}{2a_n} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$, 故 A

正确;

对于 B, 令 $a_n = \frac{n(n+1)}{2} = 1849$, 得 $n(n+1) = 3698$,

$\therefore 60 \times 61 = 3660 < 3698, 61 \times 62 = 3844 > 3698, \therefore n(n+1) = 3698$ 无正整数解, 即 1849 不是三角形数, 令 $b_n = n^2 = 1849, \therefore n = 43$, 即 1849 是正方形数, 故 B 错误;

对于 C, $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{n^2} \leq \frac{4}{4n^2 - 1} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$,

$\therefore \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots + \frac{1}{b_n} = 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) <$

$\frac{5}{4} + 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$

$\frac{5}{4} + 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{33}{20} - \frac{2}{2n+1} < \frac{33}{20}$, 故 C 正确;

对于 D, 取 $m = p = q$, 且 $m \in \mathbf{N}^*$, 令 $m^2 = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2}$, 有 $b_m = a_m + a_{m-1}$,

故 $\forall m \in \mathbf{N}^*, m \geq 2$, 总存在 $p, q \in \mathbf{N}^*$, 使得 $b_m = a_p + a_q$ 成立, 故 D 正确.

6. 答案 35

解 法一: 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的公差分别为 d_1, d_2 ,

因为 $a_3 + b_3 = (a_1 + 2d_1) + (b_1 + 2d_2) = (a_1 + b_1) + 2(d_1 + d_2) = 7 + 2(d_1 + d_2) = 21$, 所以 $d_1 + d_2 = 7$.

所以 $a_5 + b_5 = (a_3 + b_3) + 2(d_1 + d_2) = 21 + 2 \times 7 = 35$.

法二: $\because 2a_3 = a_1 + a_5, 2b_3 = b_1 + b_5$,

$\therefore a_5 + b_5 = 2(a_3 + b_3) - (a_1 + b_1)$

$= 2 \times 21 - 7 = 35$.

7. 答案 10

解析 由题 $2a_m - a_m^2 = 0, \therefore a_m = 0$ 或 2.

$S_{2m-1} = \frac{(2m-1)(a_1 + a_{2m-1})}{2} = (2m-1)a_m = 38$.

$\therefore m = 10$.

8. 答案 $\frac{21}{32}$

解析 $\because \frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}, \therefore \frac{a_{11}}{b_{11}} = \frac{S_{21}}{T_{21}} = \frac{2 \times 21}{3 \times 21 + 1} = \frac{21}{32}$.

9. 解 由于等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n = 6n - n^2$, 故 $a_1 = S_1 = 5$,

$\therefore a_2 = S_2 - S_1 = 8 - 5 = 3$, 故公差 $d = -2$,

故 $a_n = 5 + (n-1)(-2) = 7 - 2n$.

$\therefore n \leq 3$ 时, $a_n > 0$.

$n > 3$ 时, $a_n < 0$.

$\therefore \{ |a_n| \}$ 的前 10 项和为: $a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 - \dots - a_{10} = S_3 - (S_{10} - S_3) = 2S_3 - S_{10} = 58$.

10. 解 (1) 设数列首项为 a_1 , 公差为 d , 由题意可

$$\text{得, } \begin{cases} S_{12} = 12a_1 + \frac{1}{2} \times 12 \times (12-1)d > 0 \\ S_{13} = 13a_1 + \frac{1}{2} \times 13 \times (13-1)d < 0. \end{cases}$$

将 $a_1 = a_3 - 2d = 12 - 2d$ 代入, 得

$$\begin{cases} 24 + 7d > 0, \\ 3 + d < 0, \end{cases} \text{ 即 } -\frac{24}{7} < d < -3.$$

(2) 法一: $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = (12 - 2d)n +$

$\frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 - \left(\frac{5}{2}d - 12\right)n$, 其中 $-\frac{24}{7} < d < -3$.

由二次函数知识可得 S_6 最大.



法二: $\because a_n = a_1 + (n-1)d = 12 + (n-3)d$,

$$\text{由} \begin{cases} a_n \geq 0, \\ a_{n+1} \leq 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} 12 + (n-3)d \geq 0, \\ 12 + (n-2)d \leq 0. \end{cases}$$

$$\therefore -\frac{12}{d} + 2 \leq n \leq -\frac{12}{d} + 3.$$

$$\text{而} -\frac{24}{7} < d < -3,$$

$$\therefore \frac{11}{2} < n < 7. \therefore n = 6.$$

$\therefore$ 前 6 项和 S_6 最大.

法三: 由 $S_{13} = 13a_7 < 0, S_{12} = 6(a_6 + a_7) > 0$,

$\therefore a_7 < 0, a_6 > 0. \therefore$ 前 6 项和 S_6 最大.

提升探究

11. 解 (1) 由数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 32 - n^2 + 1$,

① 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 32 - 1 + 1 = 32$;

② 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (32n - n^2 + 1) - [32(n-1) - (n-1)^2 + 1] = 33 - 2n$;

当 $n=1$ 时, $a_1 = 32$ 不满足 $a_n = 33 - 2n$, 所以数列

$$a_n = \begin{cases} 32, & (n=1) \\ 33 - 2n, & (n \geq 2) \end{cases}.$$

(2) 因为 $S_n = 32n - n^2 + 1 = -(n^2 - 32n) + 1 = -(n-16)^2 + 257$; 因为 $n \in \mathbf{N}^*$,

所以当 $n=16$ 时, S_n 有最大值为 257.

12. 解 方法 1: 设等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的公差分别为 d_1, d_2 , 则

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d_1}{nb_1 + \frac{n(n-1)}{2}d_2} = \frac{a_1 + \frac{n-1}{2}d_1}{b_1 + \frac{n-1}{2}d_2},$$

$$\text{所以} \frac{a_1 + \frac{n-1}{2}d_1}{b_1 + \frac{n-1}{2}d_2} = \frac{7n+2}{n+3}. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{又因为} \frac{a_5}{b_5} = \frac{a_1 + 4d_1}{b_1 + 4d_2}, \quad \textcircled{2}$$

观察①②, 可在①中取 $n=9$, 得 $\frac{a_1 + 4d_1}{b_1 + 4d_2} = \frac{7 \times 9 + 2}{9 + 3} =$

$$\frac{65}{12}. \text{故} \frac{a_5}{b_5} = \frac{65}{12}.$$

方法 2: 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n, B_n , 则有

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{7n+2}{n+3}, \text{其中} A_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

由于 $a_1 + a_9 = 2a_5$, 即 $\frac{a_1 + a_9}{2} = a_5$, 故 $A_9 =$

$$\frac{(a_1 + a_9) \times 9}{2} = a_5 \times 9.$$

$$\text{同理, } B_9 = \frac{(b_1 + b_9) \times 9}{2} = b_5 \times 9.$$

$$\text{故} \frac{A_9}{B_9} = \frac{a_5 \times 9}{b_5 \times 9}. \text{故} \frac{a_5}{b_5} = \frac{A_9}{B_9} = \frac{7 \times 9 + 2}{9 + 3} = \frac{65}{12}.$$

方法 3: 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n, B_n .

因为等差数列的前 n 项和 $S_n = an^2 + bn =$

$$an\left(n + \frac{b}{a}\right),$$

根据已知, 可令 $A_n = (7n+2)kn, B_n = (n+3)kn$.

所以 $a_5 = A_5 - A_4 = (7 \times 5 + 2)k \times 5 - (7 \times 4 + 2)k \times 4 = 65k$.

$b_5 = B_5 - B_4 = (5+3)k \times 5 - (4+3)k \times 4 = 12k$.

$$\text{所以} \frac{a_5}{b_5} = \frac{65k}{12k} = \frac{65}{12}.$$

【点睛】若两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别

为 S_n 和 T_n , 则由结论: $\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$.

13. 解 (1) $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 有 100 项, $a_1 = a$, 对任意 $n \in$

$[2, 100]$, 存在 $a_n = a_i + d, i \in [1, n-1]$,

$\therefore$ 若 $a_1 = 1, d = 2$, 则当 $n=2$ 时, $a_2 = a_1 + d = 3$

当 $n=3$ 时, $i \in [1, 2]$, 则 $a_3 = a_1 + d = 3$ 或 $a_3 = a_2 + d = 5$,

当 $n=4$ 时, $i \in [1, 3]$, 则 $a_4 = a_1 + d = 3$ 或 $a_4 = a_2 + d = 5$ 或 $a_4 = a_3 + d = (a_1 + d) + d = 5$

或 $a_4 = a_3 + d = (a_2 + d) + d = 7$

$\therefore a_4$ 的所有可能的值为 3, 5, 7.

(2) 命题等价于: 数列 $\{a_n\}$ 中不存在具有性质 P 的项, 则 $\{a_n\}$ 是等差数列,

证明: $a_1 = a, a_2 = a_1 + d = a + d, a_3 = a_i + d (i=1, 2)$

当 $i=1$ 时, $a_3 = a_1 + d = a + d = a_2$, 则 a_3 满足了性质 P , 矛盾,

当 $i=2$ 时, $a_3 = a_2 + d = a + 2d$, 不矛盾. $\therefore a_3 = a + 2d$

以此类推, $a_n = a_i + d (i=1, 2, 3, \dots, n-1)$

当 $i=1, 2, 3, \dots, n-2$ 时, a_n 分别等于 $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$,

则 a_n 满足了性质 P , 矛盾. 所以, 只能 $i=n-1$, 即

$a_n = a_{n-1} + d$, 不矛盾, 即 $\{a_n\}$ 是等差数列,



所以,若 $\{a_n\}$ 不是等差数列,则数列 $\{a_n\}$ 中存在某些项具有性质 P .

(3)将数列 $\{a_n\}$ 中具有性质 P 的三项去掉,得到一个新的数列 $\{b_n\}$, $b_1 = a_1 = a, n \in [2, 97]$,

$b_n = b_i + d (i \in [1, n-1])$, 且 $\{b_n\}$ 中没有满足性质 P 的项,

由(2)可知,数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,所以 $b_1 + b_2 +$

$$b_3 + \cdots + b_{97} = 97b_1 + \frac{97 \times 96}{2}d = 97a + 4656d,$$

又因为数列 $\{a_n\}$ 中去掉的三项和为 c , 所以 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 97a + 4656d + c$.

§ 4.2.2 等差数列的前 n 项和公式(2)

二、知识要点

$$1. \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n. \quad 3. (2)m^2d$$

三、典型例题

例 1 (1)答案 C

(2)答案 D

变式 1 解 方法一在等差数列中, $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}$ 成等差数列.

$$\therefore 30, 70, S_{3m} - 100 \text{ 成等差数列.}$$

$$\therefore 2 \times 70 = 30 + (S_{3m} - 100), \therefore S_{3m} = 210.$$

方法二在等差数列中, $\frac{S_m}{m}, \frac{S_{2m}}{2m}, \frac{S_{3m}}{3m}$ 成等差数列,

$$\therefore \frac{2S_{2m}}{2m} = \frac{S_m}{m} + \frac{S_{3m}}{3m}.$$

$$\text{即 } S_{3m} = 3(S_{2m} - S_m) = 3 \times (100 - 30) = 210.$$

例 2 解 (1)设该等差数列 $\{a_n\}$, 则 $a_1 = a, a_2 = 4, a_3 = 3a$,

由已知有 $a + 3a = 8$, 得 $a_1 = a = 2$, 公差 $d = 4 - 2 = 2$,

$$\text{所以 } S_k = ka_1 + \frac{k(k-1)}{2} \cdot d = 2k + \frac{k(k-1)}{2} \times 2 = k^2 + k.$$

$$\text{由 } S_k = 110, \text{ 得 } k^2 + k - 110 = 0,$$

$$\text{解得 } k = 10 \text{ 或 } k = -11 (\text{舍去}),$$

$$\text{故 } a = 2, k = 10.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } S_n = \frac{n(2+2n)}{2} = n(n+1),$$

$$\text{则 } b_n = \frac{S_n}{n} = n+1,$$

$$\text{故 } b_{n+1} - b_n = (n+2) - (n+1) = 1, \text{ 又 } b_1 = S_1 = 2,$$

即数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2, 公差为 1 的等差数列,

$$\text{所以 } T_n = \frac{n(2+n+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}.$$

变式 2 (1)证明 因为 $a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$,

$$b_n = \frac{1}{a_n - 1} (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{所以 } b_{n+1} - b_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{a_n}\right) - 1} -$$

$$\frac{1}{a_n - 1} = \frac{a_n}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n - 1} = 1.$$

$$\text{又 } b_1 = \frac{1}{a_1 - 1} = -\frac{5}{2}, \text{ 所以数列 } \{b_n\} \text{ 是以 } -\frac{5}{2} \text{ 为首}$$

项, 1 为公差的等差数列.

$$(2) \text{ 解 由 (1) 知 } b_n = n - \frac{7}{2},$$

$$\text{则 } a_n = 1 + \frac{1}{b_n} = 1 + \frac{2}{2n-7}.$$

$$\text{设 } f(x) = 1 + \frac{2}{2x-7}, \text{ 则 } f(x) \text{ 在区间 } \left(-\infty, \frac{7}{2}\right) \text{ 和}$$

$$\left(\frac{7}{2}, +\infty\right) \text{ 上为减函数.}$$

所以当 $n=3$ 时, a_n 取得最小值 -1 , 当 $n=4$ 时, a_n 取得最大值 3.

方法规律: 等差数列的四个判定方法

(1)定义法: 证明对任意正整数 n 都有 $a_{n+1} - a_n$ 等于同一个常数.

(2)等差中项法: 证明对任意正整数 n 都有 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 后, 可递推得出 $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = \cdots = a_2 - a_1$, 根据定义得出数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

(3)通项公式法: 得出 $a_n = pn + q$ 后, 得 $a_{n+1} - a_n = p$ 对任意正整数 n 恒成立, 根据定义判定数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

(4)前 n 项和公式法: 得出 $S_n = An^2 + Bn$ 后, 根据 S_n, a_n 的关系, 得出 a_n , 再使用定义法证明数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

$$\text{例 3 解 (1)} \because a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0.$$

$$\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n = \cdots = a_2 - a_1.$$

$$\therefore \{a_n\} \text{ 是等差数列且 } a_1 = 8, a_4 = 2,$$



$$\therefore d = -2, a_n = a_1 + (n-1)d = 10 - 2n.$$

$$(2) T_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(8+10-2n)}{2} = 9n - n^2.$$

$$\therefore a_n = 10 - 2n, \text{ 令 } a_n = 0, \text{ 得 } n = 5.$$

当 $n > 5$ 时, $a_n < 0$; 当 $n = 5$ 时, $a_n = 0$;

当 $n < 5$ 时, $a_n > 0$.

$$\therefore \text{当 } n \geq 6 \text{ 时, } S_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_5 - (a_6 + a_7 + \cdots + a_n)$$

$$= T_5 - (T_n - T_5) = 2T_5 - T_n$$

$$= 2 \times (9 \times 5 - 25) - 9n + n^2$$

$$= n^2 - 9n + 40,$$

$$\text{当 } n \leq 5 \text{ 时, } S_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = T_n = 9n - n^2.$$

$$\therefore S_n = \begin{cases} 9n - n^2, & (n \leq 5) \\ n^2 - 9n + 40, & (n > 5) \end{cases} \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

变式 3 解 设每次交款数额(单位:元)依次为 a_1 ,

$$a_2, \dots, a_{20},$$

$$\text{则 } a_1 = 50 + 1000 \times 1\% = 60(\text{元}),$$

$$a_2 = 50 + (1000 - 50) \times 1\% = 59.5(\text{元}),$$

.....

$$a_{10} = 50 + (1000 - 9 \times 50) \times 1\% = 55.5(\text{元}),$$

即第 10 个月应付款 55.5 元.

由上知 $\{a_n\}$ 是以 60 为首项, 以 -0.5 为公差的等差数列,

$$\text{所以 } S_{20} = \frac{60 + (60 - 19 \times 0.5)}{2} \times 20 = 1105(\text{元}),$$

即全部付清后实际付款 $1105 + 150 = 1255(\text{元})$.

四、备选例题

例 1 解 (1) $\because 1, \sqrt{S_n}, a_n$ 成等差数列, $\therefore a_n + 1 =$

$$2\sqrt{S_n}, 4S_n = (a_n + 1)^2 \text{ ①}, 4S_{n+1} = (a_{n+1} + 1)^2 \text{ ②},$$

$$\text{②} - \text{①} \Rightarrow 4a_{n+1} = a_{n+1}^2 - a_n^2 + 2a_{n+1} - 2a_n,$$

$$\therefore a_{n+1}^2 = a_n^2 - 2a_{n+1} - 2a_n,$$

$$(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) - 2(a_{n+1} + a_n) = 0,$$

因为 $a_n > 0$, 所以 $a_{n+1} - a_n = 2$, 且 $4a_1 = (a_1 + 1)^2$,

$$\therefore a_1 = 1,$$

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 以 2 为公差的等差数列,

$$\therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1.$$

(2) 由(1)得,

$$a_k = \frac{a_{n+1}a_{n+3}}{a_n} = \frac{(2n+1)(2n+5)}{2n-1} =$$

$$\frac{(2n-1)^2 + 8(2n-1) + 12}{2n-1} = 2n+7 + \frac{12}{2n-1}$$

$\therefore a_k$ 为正奇数, 又 $2n-1$ 为正奇数,

$\therefore \frac{12}{2n-1}$ 为正整数.

所以 $2n-1 = 1, 3, \therefore n = 2$ 或 $n = 1$,

当 $n = 1$ 时, $2k-1 = 21, k = 11$; 当 $n = 2$ 时, $2k-1 = 15$,

$k = 8, \therefore A = \{8, 11\}$.

例 2 解 解法一: $\because$ 等差数列共有 $2n+1$ 项,

$$\therefore S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_{n+1} \text{ ①}, S_{\text{奇}} + S_{\text{偶}} = (2n+1)a_{n+1} \text{ ②}.$$

$$\text{由 ①② 可得 } \begin{cases} a_{n+1} = 15, \\ (2n+1)a_{n+1} = 315, \end{cases}$$

$$\therefore 2n+1 = 21, \therefore n = 10.$$

$$\text{解法二: } \frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n+1}{n} = \frac{165}{150}, \text{ 解得 } n = 10.$$

方法规律: (1) 项数为奇数 $2n+1$ 时, $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n+1}{n}$,

$S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_{n+1}$; (2) 项数为偶数 $2n$ 时, $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$,

$$S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd.$$

五、小结与反思

1. 公式 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 并非对所有的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立, 而只对 $n \geq 2$ 的正整数才成立. 由 S_n 求通项公式 $a_n = f(n)$ 时, 要分 $n = 1$ 和 $n \geq 2$ 两种情况分别计算, 然后验证两种情况可否用统一解析式表示, 若不能, 则用分段函数的形式表示.

2. 求等差数列前 n 项和的最值

(1) 二次函数法: 用求二次函数的最值方法来求其前 n 项和的最值, 但要注意 $n \in \mathbf{N}^*$, 结合二次函数图象的对称性来确定 n 的值, 更加直观.

(2) 通项法: 当 $a_1 > 0, d < 0$, $\begin{cases} a_n \geq 0, \\ a_{n+1} \leq 0 \end{cases}$ 时, S_n 取得最

大值; 当 $a_1 < 0, d > 0$, $\begin{cases} a_n \leq 0, \\ a_{n+1} \geq 0 \end{cases}$ 时, S_n 取得最小值.

3. 求等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的绝对值之和, 关键是找到数列 $\{a_n\}$ 的正负项的分界点.

4. 等差数列运算问题的通法: 等差数列的通项公式及前 n 项和公式中, 共涉及五个量, 知三可求二, 如



果已知两个条件,就可以列出方程组求解,体现了用方程思想解决问题的方法.如果利用等差数列的性质、几何意义去考虑也可以.

5. 运用配方法转化为二次函数,借助二次函数的单调性以及数形结合的思想,从而求等差数列前 n 项和的最值.

练习

基础巩固

1. 答案 C

解析 $\because \{a_n\}$ 是等差数列, $\therefore a_3 + a_5 = 2a_4 = 0, a_4 = 0, a_4 - a_1 = 3d = -6, d = -2, \therefore S_6 = 6a_1 + 15d = 6 \times 6 + 15 \times (-2) = 6$.

2. 答案 A

解析 由于 $S_{17} = \frac{a_1 + a_{17}}{2} \times 17 = 17a_9 = 51$, 所以 $a_9 = 3$.

3. 根据等差数列的性质 $a_5 + a_{13} = a_7 + a_{11}$, 所以 $a_5 - a_7 + a_9 - a_{11} + a_{13} = a_9 = 3$.

3. 答案 A

解析 方法一 $\frac{S_3}{S_6} = \frac{3a_1 + 3d}{6a_1 + 15d} = \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = 2d$,

$$\frac{S_6}{S_{12}} = \frac{6a_1 + 15d}{12a_1 + 66d} = \frac{12d + 15d}{24d + 66d} = \frac{3}{10}.$$

方法二由 $\frac{S_3}{S_6} = \frac{1}{3}$, 得 $S_6 = 3S_3$. $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6$,

$S_{12} - S_9$ 仍然是等差数列, 公差为 $(S_6 - S_3) - S_3 = S_3$, 从而 $S_9 - S_6 = S_3 + 2S_3 = 3S_3 \Rightarrow S_9 = 6S_3$,

$$S_{12} - S_9 = S_3 + 3S_3 = 4S_3 \Rightarrow S_{12} = 10S_3, \text{ 所以 } \frac{S_6}{S_{12}} = \frac{3}{10}.$$

4. 答案 A

解析 由 $a_{n+1} - a_n^2 + a_{n-1} = 0 (n \geq 2)$ 可得 $2a_n - a_n^2 = 0$, 解得 $a_n = 2$ (零解舍去), 故 $S_{2n-1} - 4n = 2 \times (2n-1) - 4n = -2$.

5. 答案 AD

解析 A: 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 > 0, a_{10} + a_{11} > 0, a_{10} \cdot a_{11} > 0$,

则 $a_{10} > 0, a_{11} < 0$, 所以 $d = a_{11} - a_{10} < 0$, 故 A 正确;

B: $S_{21} = \frac{21(a_1 + a_{21})}{2} = 21a_{11} < 0$, 故 B 错误;

C: 由 $\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d = \frac{d}{2}n + (a_1 - \frac{d}{2})$ 可得 $\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = \frac{d}{2}$,

所以数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 首项为 a_1 , 公差为 $\frac{d}{2}$, 故

C 错误;

D: 因为 $a_{10} = a_1 + 9d > 0, a_{11} = a_1 + 10d < 0, a_{10} + a_{11} = 2a_1 + 19d > 0$,

令 $b_n = \frac{d}{2}n + (a_1 - \frac{d}{2})$, 则 $b_{20} = a_1 + \frac{19}{2}d > 0, b_{21} = \frac{21}{2}$

$$d + a_1 - \frac{1}{2}d = a_1 + 10d < 0,$$

所以 $n = 20$ 时, T_n 最大, 故 D 正确;

故选 AD.

6. 答案 49

7. 答案 $\frac{16}{29}$ 尺

8. 答案 20

解析 方法一 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $S_n \leq S_k$ 成立, 即 S_k 为 S_n 的最大值.

因为 $a_1 + a_4 + a_7 = 99, a_2 + a_5 + a_8 = 93$, 所以 $a_4 = 33, a_5 = 31$, 故公差 $d = -2, a_n = a_4 + (n-4)d = 41 - 2n$,

当 S_n 取得最大值时, 满足 $\begin{cases} a_n \geq 0, \\ a_{n+1} \leq 0 \end{cases}$, 解得 $n = 20$.

即满足对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $S_n \leq S_k$ 成立的 k 的值为 20.

方法二 同方法一可得公差 $d = -2$,

$a_n = a_4 + (n-4)d = 41 - 2n$, 则 $n = 1$ 时, $a_1 = 39$,

$$\text{所以 } S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n = -n^2 + 40n = -(n-20)^2 + 400,$$

即当 $n = 20$ 时, S_n 取得最大值, 从而满足对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $S_n \leq S_k$ 成立的 k 的值为 20.

9. 解 (1) $\because \{a_n\}$ 为等差数列,

$$\therefore a_2 + a_5 = a_3 + a_4, \therefore \begin{cases} a_2 + a_5 = 15, \\ a_2 a_5 = 54, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_2 = 6, \\ a_5 = 9, \end{cases} \text{ (因 } d < 0, \text{ 舍去) 或 } \begin{cases} a_2 = 9, \\ a_5 = 6. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 + d = 9, \\ a_1 + 4d = 6, \end{cases} \therefore \begin{cases} d = -1, \\ a_1 = 10, \end{cases}$$