变式 3　解　$\because a_1=\frac{1}{2},a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}(n\in\mathbf{N}^*),b_n=\frac{1}{1-a_n}$，$\therefore b_{n+1}=\frac{1}{1-a_{n+1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2-a_n}}=\frac{2-a_n}{1-a_n}=\frac{1}{1-a_n}+1=b_n+1$，又$\because b_1=\frac{1}{1-a_1}=2$，$\therefore$数列$\{b_n\}$是以 2 为首项，以 1 为公差的等差数列. $\therefore b_n=2+(n-1)\times1=n+1$，$\therefore a_n=1-\frac{1}{b_n}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

四、备选例题

例 1　答案　$12n-10(n\leqslant16,n\in\mathbf{N}^*)$

解析　两个等差数列的公共项为 2，14，26，…即新数列的首项为 2，公差为 12. 故 $a_n=2+(n-1)\times12=12n-10(n\leqslant16,n\in\mathbf{N}^*)$.

例 2　解　(1)由已知条件可知，由于 $\cos a_n>0$，

故 $a_{n+1}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\tan^2 a_{n+1}=\frac{1}{\cos^2 a_n}=\frac{\sin^2 a_n+\cos^2 a_n}{\cos^2 a_n}=1+\tan^2 a_n$，

则 $\tan^2 a_{n+1}-\tan^2 a_n=1$，

故数列$\{\tan^2 a_n\}$是以 1 为公差的等差数列，且首项为 $\tan^2 a_1=\tan^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}$，

故 $\tan^2 a_n=n-1+\frac{1}{3}=\frac{3n-2}{3}$，

即 $\tan a_n=\sqrt{\frac{3n-2}{3}}$.

(2)$\sin a_1\cdot\sin a_2\cdots\cdots\sin a_m$

$=\tan a_1\cos a_1\tan a_2\cos a_2\cdots\cdots\tan a_m\cos a_m$

$=\frac{\tan a_1}{\tan a_2}\cdot\frac{\tan a_2}{\tan a_3}\cdots\cdots\frac{\tan a_m}{\tan a_{m+1}}$

$=\frac{\tan a_1}{\tan a_{m+1}}=\sqrt{\frac{1}{3m+1}}$，

由$\sqrt{\frac{1}{3m+1}}=\frac{1}{100}$，得 $m=3333$.

五、小结与反思

1. 注意公式的变形使用，如：求项数：$n=\frac{a_n-a_1}{d}+1$；求公差：$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$.

2. 若三个数成等差数列时，常设为 $a-d,a,a+d$，若四数成等差数列且和一定时，常设为 $a-3d,a-d,a+d,a+3d$.

3. 证明$\{a_n\}$是等差数列的方法有两种，即证明$a_n-a_{n-1}=d(n\geqslant2)$或证明 $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}(n\geqslant2)$.

练　习

基础巩固

1. 答案　D

2. 答案　B

3. 答案　C

4. 答案　B

解析　由已知可得$\frac{1}{a_3+1}=\frac{1}{3},\frac{1}{a_7+1}=\frac{1}{2}$是等差数列$\left\{\frac{1}{a_n+1}\right\}$的第 3 项和第 7 项，其公差 $d=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{7-3}=\frac{1}{24}$，由此可得$\frac{1}{a_{11}+1}=\frac{1}{a_7+1}+(11-7)d=\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{24}=\frac{2}{3}$，解之得 $a_{11}=\frac{1}{2}$.

5. 答案　ABD

解析　本题考查了定义法求等差数列的基本量.

法一：设数列$\{a_n\}$的公差为 d，则由题意知，$d=1$. 设 $c_n=a_{2n-1}+2a_{2n}$，则由上式得 $c_{n+1}=a_{2n+1}+2a_{2n+2}$，$c_{n+1}-c_n=a_{2n+1}+2a_{2n+2}-a_{2n-1}-2a_{2n}=6d=6$. 所以 ABD 错误.

法二：利用特殊数列. 令 $a_n=n$，则 $c_n=a_{2n-1}+2a_{2n}=2n-1+2\times2n=6n-1$，$\therefore c_n-c_{n-1}=6$. 所以 ABD 错误.

6. 答案　$a_n=2n-3$

7. 答案　$2n-1$

解析　设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，由已知得$\begin{cases}a_1=1,\\a_3=(a_1+d)^2-4,\end{cases}$即$\begin{cases}a_1=1,\\1+2d=(1+d)^2-4,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=\pm2.\end{cases}$由于等差数列$\{a_n\}$是递增的等差数列，因此$\begin{cases}a_1=1,\\d=2.\end{cases}$所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$.

8. 答案　$\frac{19-n}{n+5}$

解　令 $b_n=\frac{1}{a_n+1}$，由题$\{b_n\}$是等差数列，且 $b_3=$

$\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$，$b_7=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，$\therefore d=\frac{b_7-b_3}{7-3}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{4}=\frac{1}{24}$，$\therefore b_n=b_3+(n-3)d=\frac{1}{3}+(n-3)\cdot\frac{1}{24}=\frac{n+5}{24}$，

即 $b_n=\frac{1}{a_n+1}=\frac{n+5}{24}$，得 $a_n+1=\frac{24}{n+5}$，$\therefore a_n=\frac{19-n}{n+5}$.

9. 解 设$\{a_n\}$表示梯子自上而上各级宽度所成的等差数列，由已知条件，可知：$a_1=33$，$a_{12}=110$，$n=12$，$\therefore a_{12}=a_1+(12-1)d$，即 $110=33+11d$ 解得：$d=7$，因此，$a_2=33+7=40$，$a_3=40+7=47$，$a_4=54$，$a_5=61$，$a_6=68$，$a_7=75$，$a_8=82$，$a_9=89$，$a_{10}=96$，$a_{11}=103$，

答：梯子中间各级的宽度从上到下依次是 40 cm，47 cm，54 cm，61 cm，68 cm，75 cm，82 cm，89 cm，96 cm，103 cm.

10. 解 令 $b_n=\log_2(a_n-1)$.

则 $b_1=\log_2(3-1)=1$，$b_3=\log_2(9-1)=3$，

由题$\{b_n\}$是等差数列，$\therefore b_n=n$.

$\therefore \log_2(a_n-1)=n$. $\therefore a_n=2^n+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

提升探究

11. 解 设新数列为$\{b_n\}$，则 $b_1=a_1=2$，$b_5=a_2=3$，根据 $b_n=b_1+(n-1)d$，有 $b_5=b_1+4d$，即 $3=2+4d$，$\therefore d=\frac{1}{4}$，$\therefore b_n=2+(n-1)\times\frac{1}{4}=\frac{n+7}{4}$，又$\because a_n=a_1+(n-1)\times1=n+1=\frac{(4n-3)+7}{4}$，$\therefore a_n=b_{4n-3}$，

即原数列的第 n 项为新数列的第 $4n-3$ 项.

(1)当 $n=12$ 时，$4n-3=4\times12-3=45$，故原数列的第 12 项为新数列的第 45 项；

(2)由 $4n-3=29$，得 $n=8$，故新数列的第 29 项是原数列的第 8 项.

小结：此题关键在于找到原数列的第 n 项是新数列的第几项，即找出新、旧数列的对应关系. 一般地，在公差为 d 的等差数列每相邻两项之间插入 m 个数，构成一个新的等差数列，则新数列的公差为$\frac{d}{m+1}$.

原数列的第 n 项是新数列的第 $n+(n-1)m=(m+1)n-m$ 项.

12. 解 (1)记该等差数列为$\{a_n\}$，公差为 d，由 $a_1=8$，$d=5-8=-3$，得数列的通项公式是 $a_n=8-3(n-1)=-3n+11$，

该数列的第 20 项 $a_{20}=-3\times20+11=-49$.

(2)由第一问，$a_n=-3n+11$，如果 -121 是这个数列的项，则方程 $-3n+11=-121$ 有正整数解. 解这个方程，得 $n=44$，故 -121 是该等差数列的第 44 项.

(3)由第一问，$a_n=-3n+11$，解不等式 $-200\leqslant-3n+11\leqslant0$，得$\frac{11}{3}\leqslant n\leqslant\frac{211}{3}$.

由此，该数列位于区间$[-200,0]$内的项从第 4 项起直至第 70 项，共有 67 项.

13. 解 (1)等差数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=16$，公差$d=-\frac{3}{4}$，

则 $a_n=16-\frac{3}{4}(n-1)=-\frac{3}{4}n+\frac{67}{4}<0$，

由 $-\frac{3}{4}n+\frac{67}{4}<0$，得 $n>\frac{67}{3}$，即从第 23 项开始出现负数.

(2)由等差数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=-\frac{3}{4}n+\frac{67}{4}$

可得 $|a_n|=\left|-\frac{3}{4}n+\frac{67}{4}\right|=\begin{cases}-\frac{3}{4}n+\frac{67}{4}, n\leqslant22,\\ \frac{3}{4}n-\frac{67}{4}, n\geqslant23.\end{cases}$

$m(n)=-\frac{3}{4}n+\frac{67}{4}$，$(n\leqslant22, n\in\mathbf{N}^*)$在 $n=22$ 时取最小值为$\frac{1}{4}$，

$t(n)=\frac{3}{4}n-\frac{67}{4}$，$(n\geqslant23, n\in\mathbf{N}^*)$在 $n=23$ 时取最小值为$\frac{1}{2}$，

则 $|a_n|=\left|-\frac{3}{4}n+\frac{67}{4}\right|=\begin{cases}-\frac{3}{4}n+\frac{67}{4}, n\leqslant22,\\ \frac{3}{4}n-\frac{67}{4}, n\geqslant23.\end{cases}$

在 $n=22$ 时取最小值为$\frac{1}{4}$.

§4.2.1 等差数列的概念(2)

二、知识要点

2. $a_n+a_m=a_p+a_q$ $a_m+a_n=2a_p$ **3.** 等差数列 kd ①$2d$. ②$3d$ **4.** ①$a_n-a_{n-1}=d(n\geqslant2)$

②$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geqslant2)$ ③$a_n=pn+q$(p,q为常数).

三、典型例题

例1 答案 A

解析 因为$a_3+a_9=4a_5$,所以根据等差数列的性质可得$a_6=2a_5$,所以$a_1+5d=2a_1+8d$,即$a_1+3d=0$.又$a_2=-8$,即$a_1+d=-8$,所以公差$d=4$.

变式1 答案 B

解析 $\because a_1+a_2+a_3=15,\therefore 3a_2=15,\therefore a_2=5$,又$a_1a_2a_3=80,\therefore(a_2-d)a_2(a_2+d)=80$,将$a_2=5$代入,得$d=3$,从而$a_{11}+a_{12}+a_{13}=3a_{12}=3(a_2+10d)=3\times(5+30)=105$.

例2 答案 B

解 前三项和为12,$\therefore a_1+a_2+a_3=12,\therefore 3a_2=12,\therefore a_2=4,\therefore a_1+a_3=8$,又$a_1\cdot a_2\cdot a_3=48,\therefore a_1\cdot a_3=12$,把$a_1,a_3$作为方程的两根且$a_1<a_3,\therefore x^2-8x+12=0,x_1=6,x_2=2,\therefore a_1=2,a_3=6,\therefore$选B.

变式2 解 由题$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4=26,\\a_2\cdot a_3=40,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}2(a_2+a_3)=26,\\a_2\cdot a_3=40,\end{cases}\therefore\begin{cases}a_2+a_3=13,\\a_2\cdot a_3=40,\end{cases}$

$\therefore a_2,a_3$是一元二次方程$x^2-13x+40=0$的两根.

$\therefore\begin{cases}a_2=5\\a_3=8\end{cases}$或$\begin{cases}a_2=8\\a_3=5\end{cases},\therefore d=\pm3$.

所以这四个数为:2,5,8,11或11,8,5,2.

例3 答案 100

变式3 答案 22

四、备选例题

例1 答案 C

解析 因为$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=1$,所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以1为公差的等差数列,又$\frac{S_1}{1}=a_1=2$,

所以$\frac{S_n}{n}=2+(n-1)=n+1$,即$S_n=n^2+n$,则当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$,

又$a_1=2$符合上式,故$a_n=2n$,

则$\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+8}}=\frac{n}{2(n+1)(n+8)}$

$=\frac{n}{2(n^2+9n+8)}=\frac{1}{2\left(n+\frac{8}{n}+9\right)}$,

令$y=n+\frac{8}{n}$,由对勾函数性质可得:y在$n\in(0,2\sqrt{2})$上单调递减,在$n\in(2\sqrt{2},+\infty)$上单调递增,当$n=2$时,$\frac{a_2}{a_3a_{10}}=\frac{1}{30}$,当$n=3$时,$\frac{a_3}{a_4a_{11}}=\frac{3}{88}$,故数列$\{\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+8}}\}$的最大项为$\frac{3}{88}$.故选C.

例2 解 (1)证明:$\because b_n=\frac{a_n}{2^{n-1}},\therefore b_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{2^n}$,

$\therefore b_{n+1}-b_n=\frac{a_{n+1}}{2^n}-\frac{a_n}{2^{n-1}}=\frac{a_{n+1}-2a_n}{2^n}$,

又由已知$a_{n+1}=2a_n+2^n$,

$\therefore a_{n+1}-2a_n=2^n$,

$\therefore b_{n+1}-b_n=\frac{a_{n+1}}{2^n}-\frac{a_n}{2^{n-1}}=\frac{a_{n+1}-2a_n}{2^n}=\frac{2^n}{2^n}=1$,

$\therefore\{b_n\}$是等差数列,首项$b_1=\frac{a_1}{1}=1$,公差为1.

(2)由(1)可知$b_n=1+(n-1)\cdot1=n$,

即$\frac{a_n}{2^{n-1}}=n$,

$\therefore a_n=n\cdot2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$

五、小结与反思

1. 等差数列具对称性,即若$m+n=p+q$,则$a_n+a_m=a_p+a_q$,特别地若$m+n=2p$,则$a_m+a_n=2a_p$

2. 将一个等差数列"等距离"地选择一部分项按照原有顺序排列,所组成新数列也是等差数列.即若$\{a_n\}$是等差数列,则$\{a_{kn+p}\}$也是等差数列,其公差为kd.

练 习

基础巩固

1. 答案 B

解析 由等差数列的性质可得:$a_1+a_9=a_3+a_7=2a_5$,又$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=10$,

故$5a_5=10$,即$a_5=2$.同理可得$5a_6=20,a_6=4$.

再由等差中项可知:$a_4=2a_5-a_6=0$,故选B.

2. 答案 B

解析 $\because a_1+a_8-(a_4+a_5)=2a_1+7d-(2a_1+7d)=0$，$\therefore a_1+a_8=a_4+a_5$，∴故选 B.

3. 答案 D

解析 $\because\{a_n\}$为等差数列，$\therefore a_2+a_5=a_3+a_4$，

$\therefore\begin{cases}a_2+a_5=15,\\a_2\cdot a_5=54,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_2=6,\\a_5=9,\end{cases}$（因 $d<0$，舍去）

$\begin{cases}a_2=9\\a_5=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=-1,\\a_1=10,\end{cases}$ $\therefore a_n=11-n$. 选 D.

4. 答案 C

5. 答案 AD

解析 由等差数列下标和性质，以及 p,q 都是正整数，

若 $q>p$，则 $q-p,q+p$ 都是正整数，且满足 $q-p+q+p=2q$，所以 $a_{q-p}+a_{q+p}=2a_q$，即 A 正确；

当数列$\{a_n\}$是非零的常数列时，例如 $a_n=1$ 满足$\{a_n\}$是等差数列，也是等比数列，即 B 错误；

不妨设数列$\{a_n\}$的公差为 d，易知 $(a_n+a_{n+1})-(a_{n-1}+a_n)=a_n-a_{n-1}+a_{n+1}-a_n=2d$ 为定值，

所以$\{a_n+a_{n+1}\}$是公差为 $2d$ 的等差数列，即 C 错误；

由 a_p+2a_{p+3} 可得 $a_p+a_{p+2}+a_{p+4}=3a_{p+2}=3$，可得 $a_{p+2}=1$，即 D 正确；

故选 AD

6. 答案 18

7. 答案 $-n$(答案不唯一)

解析 假设数列为等差数列，设其公差为 d，

由性质②可得：$a_1+(m+n-1)d=a_1+(m-1)d+a_1+(n-1)d$，所以 $a_1=d$，

再根据①$\{a_n\}$是递减数列，可知 $d<0$，取 $d=-1$，则 $a_1=d=-1$，

此时 $a_n=a_1+(n-1)d=-n$，满足题意.

故答案为：$-n$.（答案不唯一）

8. 答案 -4

解析 设 $a_n=23+(n-1)d$，

则$\begin{cases}a_6>0,\\a_7<0,\end{cases}$即$\begin{cases}23+5d>0,\\23+6d<0,\end{cases}$

解得 $-4\frac{3}{5}<d<-3\frac{5}{6}$，

又因为 $d\in\mathbf{Z}$，所以 $d=-4$.

9. 解 设此三个数依次为 $a-d,a,a+d$. 则 $3a=9$，$a=3$.

又$(3-d)^2+3^2+(3+d)^2=35$，解之得$d=\pm2$，

所以这三个数依次为 1,3,5 或 5,3,1.

10. 解 分析一：利用等差数列的通项公式求解.

解法一：设所求的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$，

则$\begin{cases}(a_1+2d)+(a_1+7d)+(a_1+12d)=12,\\(a_1+2d)(a_1+7d)(a_1+12d)=28,\end{cases}$

即$\begin{cases}a_1+7d=4,\\(a_1+2d)(a_1+7d)(a_1+12d)=28,\end{cases}$①

代入②得$(a_1+2d)(a_1+12d)=7$③

$\because a_1=4-7d$，代入③，

$\therefore(4-5d)(4+5d)=7$，

即 $16-25d^2=7$，解得 $d=\pm\frac{3}{5}$.

当 $d=\frac{3}{5}$时，$a_1=-\frac{1}{5}$，$a_n=-\frac{1}{5}+(n-1)\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}n-\frac{4}{5}$，

当 $d=-\frac{3}{5}$时，$a_1=\frac{41}{5}$，$a_n=\frac{41}{5}+(n-1)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{3}{5}n+\frac{44}{5}$.

分析二：视 a_3,a_8,a_{13} 作为一个整体，再利用性质：若 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$ 解题.

解法二：$\because a_3+a_{13}=a_8+a_8=2a_8$，又 $a_3+a_8+a_{13}=12$，故知 $a_8=4$

代入已知得$\begin{cases}a_3+a_{13}=8,\\a_3\cdot a_{13}=7,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_3=1,\\a_{13}=7,\end{cases}$或$\begin{cases}a_3=7,\\a_{13}=1,\end{cases}$

由 $a_3=1,a_{13}=7$ 得 $d=\frac{a_{13}-a_3}{13-3}=\frac{7-1}{10}=\frac{3}{5}$.

$\therefore a_n=a_3+(n-3)\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}n-\frac{4}{5}$.

由 $a_3=7,a_{13}=1$，仿上可得：$a_n=-\frac{3}{5}n+\frac{44}{5}$.

提升探究

11. 解 当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2-3n+$

$k)-[2(n-1)^2-3(n-1)+k]=4n-5$,

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=k-1$,

若 $k=0$,则 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n=4n-5(n\in\mathbf{N}^*)$,$\{a_n\}$ 是等差数列.

若 $k\neq0$,则 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n=\begin{cases}k-1,(n=1)\\4n-5,(n\geqslant2)\end{cases}$,

此时 $\{a_n\}$ 不是等差数列.

12. 解 (1)因为 $S_n=\dfrac{(3+a_n)n}{2}$,即 $2S_n=n(a_n+3)$,

当 $n\geqslant2$ 时,$2S_{n-1}=(n-1)(a_{n-1}+3)$,

由 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant2)$ 得 $2a_n=n(a_n+3)-(n-1)(a_{n-1}+3)$,

即 $(n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}=-3$,当 $n\geqslant3$ 时,$\dfrac{a_n}{n-1}-\dfrac{a_{n-1}}{n-2}=\dfrac{-3}{(n-1)(n-2)}$,

即 $\dfrac{a_n}{n-1}-\dfrac{a_{n-1}}{n-2}=3\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n-2}\right)$,

所以 $\dfrac{a_3}{2}-\dfrac{a_2}{1}=3\left(\dfrac{1}{2}-1\right)$,$\dfrac{a_4}{3}-\dfrac{a_3}{2}=3\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)$,$\dfrac{a_5}{4}-\dfrac{a_4}{3}=3\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\right)$,……,

$\dfrac{a_n}{n-1}-\dfrac{a_{n-1}}{n-2}=3\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n-2}\right)$,

分别相加,得 $\dfrac{a_n}{n-1}-\dfrac{a_2}{1}=3\left(\dfrac{1}{n-1}-1\right)$,又 $a_2=5$,所以 $\dfrac{a_n}{n-1}-5=3\left(\dfrac{1}{n-1}-1\right)$,

即 $a_n=2n+1(n\geqslant3)$,

因为 $a_2=5$,$S_n=\dfrac{(3+a_n)n}{2}$,当 $n=2$ 时,$S_2=a_1+a_2=\dfrac{(3+a_2)\times2}{2}$,解得 $a_1=3$,

所以 $a_1=3$,$a_2=5$,符合 $a_n=2n+1$,故 $\{a_n\}$ 得通项公式为 $a_n=2n+1$,$n\in\mathbf{N}^*$;

(2)假设存在正整数 m,n 使得 $\dfrac{1}{a_n},\dfrac{1}{a_m},\dfrac{1}{a_{3n+1}}$ 成等差数列,则满足 $\dfrac{2}{a_m}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{3n+1}}$,即 $\dfrac{2}{2m+1}=\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{6n+3}=\dfrac{4}{3(2n+1)}$,化简得 $2(2m+1)=3(2n+1)$,因为 $m,n\in\mathbf{N}^*$,

所以 $2(2m+1)$ 为偶数,$3(2n+1)$ 为奇数,故 $2(2m+1)\neq3(2n+1)$,则假设不成立,

即可推出不存在 m,n,使得 $\dfrac{1}{a_n},\dfrac{1}{a_m},\dfrac{1}{a_{3n+1}}$ 成等差数列.

13. 解 (1)已知 $a_n=n,b_n=2n-1$,

$a_1=1,a_2=2,a_3=3,b_1=1,b_2=3,b_3=5$,

当 $n=1$ 时,$c_1=\max\{b_1-a_1\}=\max\{0\}=0$,

当 $n=2$ 时,$c_2=\max\{b_1-2a_1,b_2-2a_2\}=\max\{-1,-1\}=-1$,

当 $n=3$ 时,$c_3=\max\{b_1-3a_1,b_2-3a_2,b_3-3a_3\}=\max\{-2,-3,-4\}=-2$,

(2)设 $a_n=a$(a 为常数),$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=dn+(b_1-d)$.

$c_n=\max\{b_1-an,b_2-an,\cdots,b_n-an\}(n=1,2,3\cdots)$,

先考虑 $b_n-a_nn=dn+(b_1-d)-an=(d-a)n+(b_1-d)$,则 $n\geqslant2$ 时,

$b_{n-1}-a_{n-1}(n-1)=(d-a)(n-1)+(b_1-d)$,所以 $(b_n-a_nn)-(b_{n-1}-a_{n-1}n)=(d-a)$.

当 $d-a>0$ 时,则 $c_n=b_n-an$,$c_{n-1}=b_{n-1}-a(n-1)$,此时 $c_n-c_{n-1}=(d-a)$ 为常数,所以 $\{c_n\}$ 是等差数列;

当 $d-a\leqslant0$ 时,则,$c_n=c_{n-1}=\cdots=c_1=b_1-a$,此时 $\{c_n\}$ 是常数列,也是等差数列;

综上所述:$\{c_n\}$ 是等差数列;

§4.2.2 等差数列的前 n 项和公式(1)

三、典型例题

例 1 解 (1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,则 $a_n=a_1+(n-1)d(n\geqslant1,n\in\mathbf{N}^*)$.

由 $a_1=1$,$a_3=-3$,可得 $1+2d=-3$,

解得 $d=-2$.

从而,$a_n=1+(n-1)\times(-2)=3-2n$.

(2)由(1)知 $a_n=3-2n$,

所以 $S_n=\dfrac{n(1+3-2n)}{2}=2n-n^2$.

进而由 $S_k=-35$,可得 $2k-k^2=-35$,

即 $k^2-2k-35=0$,解得 $k=7$ 或 $k=-5$.

又 $k\in\mathbf{N}^*$,故 $k=7$.

变式 1 答案 B

解 由题 $6a_4+6a_{10}=24$，$\therefore a_4+a_{10}=4$

$\therefore S_{13}=\frac{(a_1+a_{13})\cdot 13}{2}=\frac{(a_4+a_{10})\cdot 13}{2}=\frac{4\times 13}{2}=26$，故选 B.

例 2 解答：(1) $\because S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}$，

$S_{22}=a_1+a_2+\cdots+a_{22}$，

又 $S_{10}=S_{22}$，$\therefore a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{22}=0$，

即 $\frac{12(a_{11}+a_{22})}{2}=0$，即 $a_{11}+a_{22}=2a_1+31d=0$.

又 $a_1=31$，$\therefore d=-2$.

$\therefore S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=31n-n(n-1)=32n-n^2$.

(2)法一：由(1)知，$S_n=32n-n^2=-(n-16)^2+256$，

$\therefore$ 当 $n=16$ 时，S_n 有最大值 256.

法二：由(1)知，

$$\begin{cases}a_n=31+(n-1)\cdot(-2)=-2n+33\geqslant 0\\ a_{n+1}=31+n\cdot(-2)=-2n+31\leqslant 0\end{cases}(n\in\mathbf{N}^*)，$$

解得 $\frac{31}{2}\leqslant n\leqslant\frac{33}{2}$，

$\because n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore n=16$ 时，S_n 有最大值 256.

变式 2 解 法一：$\because a_1=20$，$S_{10}=S_{15}$，

$\therefore 10\times 20+\frac{10\times 9}{2}d=15\times 20+\frac{15\times 14}{2}d$，

解得 $d=-\frac{5}{3}$.

$\therefore a_n=20+(n-1)\times\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{5}{3}n+\frac{65}{3}$.

$\therefore a_{13}=0$，即当 $n\leqslant 12$ 时，$a_n>0$，$n\geqslant 14$ 时，$a_n<0$.

$\therefore$ 当 $n=12$ 或 13 时，S_n 取得最大值，且最大值为

$S_{12}=S_{13}=12\times 20+\frac{12\times 11}{2}\times\left(-\frac{5}{3}\right)=130$.

法二：同法一求得 $d=-\frac{5}{3}$.

$\therefore S_n=20n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{5}{6}n^2+\frac{125}{6}n$

$=-\frac{5}{6}\left(n-\frac{25}{2}\right)^2+\frac{3125}{24}$.

$\because n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore$ 当 $n=12$ 或 13 时，S_n 有最大值，

且最大值为 $S_{12}=S_{13}=130$.

法三：同法一得 $d=-\frac{5}{3}$.

又由 $S_{10}=S_{15}$，得 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=0$.

$\therefore 5a_{13}=0$，即 $a_{13}=0$.

$\therefore$ 当 $n=12$ 或 13 时，S_n 有最大值，

且最大值为 $S_{12}=S_{13}=130$.

例 3 解 (1)因为 $b_n-b_{n-1}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n-1}-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{a_{n-1}}-1}-\frac{1}{a_{n-1}-1}=1(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$

又 $b_1=\frac{1}{a_1-1}=-\frac{25}{2}$，$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是 $-\frac{25}{2}$ 为首项，1 为公差的等差数列.

$\therefore b_n=b_1+(n-1)\times 1=n-\frac{27}{2}$.

(2)由 $b_n=n-\frac{27}{2}\geqslant 0$，得 $n\geqslant\frac{27}{2}$，即 $n\leqslant 13$ 时，$b_n<0$；$n\geqslant 14$ 时，$b_n>0$，

$\therefore |b_1|+|b_2|+|b_3|+\cdots+|b_{20}|=-(b_1+b_2+\cdots+b_{13})+b_{14}+b_{14}+\cdots+b_{20}$

$=-\left[13\times\left(-\frac{25}{2}\right)+\frac{13\times 12}{2}\times 1\right]+7\times\left(14-\frac{27}{2}\right)+\frac{7\times 6}{2}\times 1=109$

(3)由 $b_n=\frac{1}{a_n-1}=n-\frac{27}{2}$，得 $a_n=\frac{2}{2n-27}+1(n\in\mathbf{N}^*)$

又函数 $f(x)=\frac{2}{2x-27}+1$ 在 $\left(-\infty,\frac{27}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{27}{2},+\infty\right)$ 上均是单调递减.

由函数 $f(x)=\frac{2}{2x-27}+1$ 的图象，可得：$(a_n)_{\max}=a_{14}=3$，$(a_n)_{\min}=a_{13}=-1$.

变式 3 答案 $-(m+n)$

解析 法一：设$\{a_n\}$的公差为 d，

则由 $S_n=m$，$S_m=n$，

得$\begin{cases}S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=m，①\\ S_m=ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d=n.②\end{cases}$

②－①得 $(m-n)a_1+\frac{(m-n)(m+n-1)d}{2}=n-m$，