



题型 2 等差数列性质的应用

例 2 已知等差数列的前三项依次为 a , $4, 3a$, 前 n 项和为 S_n , 且 $S_k = 110$.

(1) 求 a 及 k 的值;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = \frac{S_n}{n}$, 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 并求其前 n 项和 T_n .

变式 2 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{3}{5}$, $a_n =$

$$2 - \frac{1}{a_{n-1}} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*), \text{ 数列 } \{b_n\} \text{ 满足 } b_n =$$

$$\frac{1}{a_n - 1} (n \in \mathbf{N}^*).$$

(1) 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 中的最大项和最小项, 并说明理由.



题型 3 等差数列求和的应用

例3 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=8, a_4=2$,且满足 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $S_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$,求 S_n .

变式 3 某人用分期付款的方式购买一

台家电,价格为 1150 元,购买当天先付 150 元,以后每月的这一天都交付 50 元,并加付欠款利息,月利率为 1%,20 个月还清.若交付 150 元后的一个月开始算分期付款的第一个月,则分期付款的第 10 个月该交付多少钱?全部贷款付清后,买这台家电实际花费多少钱?



四、备选例题

例1 记正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $1, \sqrt{S_n}, a_n$ 成等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设集合 $A = \left\{ k \mid a_k = \frac{a_{n+1}a_{n+3}}{a_n}, k \in \mathbf{N}^* \right\}$, 求集合 A .

例2 在项数为 $2n+1$ 的等差数列中, 所有奇数项的和为 165, 所有偶数项的和为 150, 求 n 的值.

五、小结与反思





§ 4.2.3 等差数列综合应用

一、课标要求

1. 掌握等差数列的通项公式与前 n 项和公式.
2. 能在具体的问题情境中识别数列的等差关系,并能用等差数列的有关知识解决相应的问题.

二、知识要点

1. 等差数列的概念

(1) 定义: 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一项的差都等于 _____, 那么这个数列就叫做等差数列.

数学语言表达式: $a_{n+1} - a_n = d (n \in \mathbf{N}^*, d \text{ 为常数})$.

(2) 等差中项: 由三个数 a, A, b 组成的等差数列可以看成是最简单的等差数列, 这时 _____ 叫做 a 与 b 的等差中项, 根据等差数列的定义可以知道, $2A =$ _____.

2. 等差数列的通项公式与前 n 项和公式

(1) 若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1 , 公差是 d , 则其通项公式为 $a_n =$ _____.

(2) 前 n 项和公式: $S_n =$ _____.

3. 等差数列的性质

(1) 通项公式的推广: $a_n = a_m +$ _____
($n, m \in \mathbf{N}^*$).

(2) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $k + l = m + n$
($k, l, m, n \in \mathbf{N}^*$), 则 _____.

(3) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差为 d , 则 a_k ,
 $a_{k+m}, a_{k+2m}, \dots (k, m \in \mathbf{N}^*)$ 是公差为 _____
的等差数列.

(4) 若 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则
数列 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \dots$ 也是等差

数列.

(5) 若 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则
数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也为等差数列.

常用结论:

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = pn + q$ (其中 p, q 为常数), 则数列 $\{a_n\}$ 一定是等差数列, 且公差为 p .

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 > 0, d < 0$, 则 S_n 存在最大值; 若 $a_1 < 0, d > 0$, 则 S_n 存在最小值.

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的单调性: 当 $d > 0$ 时, $\{a_n\}$ 是递增数列; 当 $d < 0$ 时, $\{a_n\}$ 是递减数列; 当 $d = 0$ 时, $\{a_n\}$ 是常数列.

4. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列 $\Leftrightarrow S_n = An^2 + Bn$
(A, B 为常数).

三、典型例题

例1 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,
若 $S_{11} = 33$, 则 $a_2 + a_7 + a_9 =$ ()
A. 18 B. 12 C. 9 D. 6

变式1 若前 n 项和为 S_n 的等差数列
 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 + a_{12} = 12 - a_8$, 则 $S_{17} =$ _____.

例2 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 > 0, S_{17} < S_{14}, S_{30} > 0$, 则当满足 $S_n < 0$ 成立时, n 的最小值为 _____.



变式 2 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 能取到最大值, 且满足: $a_{10} + a_{11} < 0, a_{10} \cdot a_{11} < 0$ 对于以下几个结论:

①数列 $\{a_n\}$ 是递减数列; ②数列 $\{S_n\}$ 是递减数列; ③数列 $\{S_n\}$ 的最大项是 S_{10} ; ④数列 $\{S_n\}$ 的最小的正数是 S_{19} .

其中正确的序号是_____.

例 3 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差 $d \neq 0$, 前 n 项和为 S_n , 且 $\frac{S_n}{S_{2n}}$ 为常数.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = \frac{n}{a_n a_{n+1}} - \frac{n+1}{a_{n+1} a_{n+2}}$, 证明: $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n < \frac{1}{3}$.

变式 3 已知正项数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n} + 1.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记数列 $b_n = \frac{2\sqrt{a_n} + 1}{a_n a_{n+1}}$ 的前 n 项和 S_n ,

求满足 $S_n < \frac{99}{100}$ 的正整数 n 的集合.



四、备选例题

例1 设等差数列 $\{a_n\}$ 满足：

$$\frac{\sin^2 a_3 - \cos^2 a_3 + \cos^2 a_3 \cos^2 a_6 - \sin^2 a_3 \sin^2 a_6}{\sin(a_2 + a_7)} =$$

1, 公差 $d \in (-1, 0)$. 若当且仅当 $n=10$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 取得最大值, 则首项 a_1 的取值范围是 ()

A. $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$

B. $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$

C. $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right]$

D. $\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right]$

例2 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = |a_1 + 1| + |a_2 + 1| + \cdots + |a_n + 1| = |a_1 - 1| + |a_2 - 1| + \cdots + |a_n - 1| = 2021$, 则正整数 n 的最大值为_____.

五、小结与反思

