

# 凉山州 2024—2025 学年度下期期末统一检测

## 高二数学参考答案

### 一、单项选择题（共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分）

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 选项 | C | B | A | B | C | C | D | A |

### 二、多项选择题（共 3 个小题，每小题 6 分，共 18 分）

|    |    |    |     |
|----|----|----|-----|
| 题号 | 9  | 10 | 11  |
| 选项 | BC | AC | ABD |

### 三、填空题（共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分）

12.  $\frac{3}{2}$     13. 3    14.  $\frac{1}{4}$

### 四、解答题（5 个小题，共 77 分，15 题 13 分，16 题、17 题各 15 分，18 题、19 题各 17 分，解答过程需写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。）

15.解:(1) 由题意知  $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ , 则 .....1 分

$$f(1) = \ln 2, f'(1) = \frac{1}{2}, \text{ .....3 分}$$

所以在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为:  $y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$ , .....4 分

即:  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \ln 2$ . .....5 分

(2)由题意知  $g(x) = ax - \ln(x+1)$  的定义域为  $(-1, +\infty)$ , .....6 分

则  $g'(x) = a - \frac{1}{x+1}$ , .....7 分

所以  $g(x)$  在  $(-1, +\infty)$  上无极值; .....8 分

②当  $a > 0$  时, 令  $g'(x) = a - \frac{1}{x+1} > 0$ , 则  $x > \frac{1}{a} - 1$ , .....9 分

|         |                                    |                   |                                         |
|---------|------------------------------------|-------------------|-----------------------------------------|
| $x$     | $\left(-1, \frac{1}{a} - 1\right)$ | $\frac{1}{a} - 1$ | $\left(\frac{1}{a} - 1, +\infty\right)$ |
| $f'(x)$ | -                                  | 0                 | +                                       |
| $f(x)$  | 单调递减                               | 极小值               | 单调递增                                    |

所以当  $x > \frac{1}{a} - 1$  时,  $g(x)$  为增函数, 当  $-1 < x < \frac{1}{a} - 1$  时,  $g(x)$  为减函数, .....10 分

所以  $g(x)$  在  $x = \frac{1}{a} - 1$  时, 取得极小值  $g(\frac{1}{a} - 1) = 1 - a + \ln a$ , 无极大值. ....11 分

综上所述: 当  $a \leq 0$  时,  $g(x)$  在  $(-1, +\infty)$  上无极值;

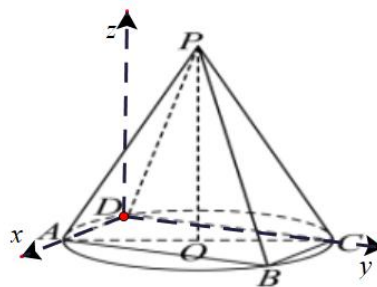
当  $a > 0$  时,  $g(x)$  在  $(-1, +\infty)$  上有极小值  $g(\frac{1}{a} - 1) = 1 - a + \ln a$ , 无极大值 .....13 分

16.解:(1)证明  $\because AD \parallel BC, AD \not\subset \text{平面} PBC, BC \subseteq \text{平面} PBC$  .....3 分

$\therefore AD \parallel \text{平面} PBC$  .....5 分

$\because \text{平面} PAD \cap \text{平面} PBC = l$  .....6 分

$\therefore AD \parallel l$  .....7 分



(2)由题意知  $PA = PC = 2\sqrt{2}, BC = AD = 2, \angle ACB = \frac{\pi}{3}$ , .....8 分

$\therefore AC = 4, AB = CD = 2\sqrt{3}, \angle ADC = \angle ABC = \frac{\pi}{2}, PO = 2$ , .....9 分

方法一: 向量法

$\therefore ABCD$  为矩形, 因此可建立如图所示空间直角坐标系, 过点  $D$  平行于  $PO$  竖直向上为  $z$  轴,

$\therefore D(0,0,0), A(2,0,0), B(2,2\sqrt{3},0), C(0,2\sqrt{3},0), P(1,\sqrt{3},2)$ , .....10 分

$\therefore \overrightarrow{DA} = (2,0,0), \overrightarrow{DP} = (1,\sqrt{3},2), \overrightarrow{CB} = (2,0,0), \overrightarrow{CP} = (1,-\sqrt{3},2)$ , .....11 分

设平面  $PAB$  的法向量为  $\vec{m}$ , 平面  $PBC$  的法向量为  $\vec{n}$ . .....12 分

则  $\begin{cases} \overrightarrow{DA} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{DP} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{m} = (0, -2, \sqrt{3}), \begin{cases} \overrightarrow{CB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{CP} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = (0, 2, \sqrt{3})$ , .....13 分

$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = -\frac{1}{7}$  .....14 分

$\therefore$  平面  $PAB$  与平面  $PBC$  所成角的正弦值为  $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ . .....15 分

方法二: 几何法:

过点 $P$ 分别向 $AD$ 、 $BC$ 引垂线,垂足分别为 $M$ 、 $N$ ,连接 $MN$ ,.....10分

由(1)知 $AD \parallel l$ ,所以 $PM \perp l, PN \perp l$ ,.....11分

$\therefore \angle MPN$ 为平面 $PAB$ 与平面 $PBC$ 所成角的平面角,.....12分

$\therefore PM = PN = \sqrt{7}, MN = 2\sqrt{3}$ ,.....13分

$\therefore$ 根据余弦定理得:  $\cos \angle MPN = \frac{|PM|^2 + |PN|^2 - |MN|^2}{2|PM||PN|} = \frac{1}{7}$ ,.....14分

$\therefore$ 平面 $PAB$ 与平面 $PBC$ 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ......15分

17.解:(1)由 $b=1$ 及 $2c-a=2\sin(C-\frac{\pi}{6})$ 得:  $2c-a=2b\sin(C-\frac{\pi}{6})$ ,.....1分

结合正弦定理得:  $2\sin C - \sin A = 2\sin B\sin(C-\frac{\pi}{6})$ ,.....2分

因为 $A+B+C=\pi$ ,且 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,.....3分

所以:  $2\sin C - \sin(B+C) = 2\sin B\sin(C-\frac{\pi}{6})$ ,.....4分

即:  $2\sin C - \sin C \cos B = \sqrt{3}\sin B\sin C$ ,.....5分

因此:  $\frac{1}{2}\cos B + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B = \sin(B+\frac{\pi}{6}) = 1$ ,.....6分

故:  $B = \frac{\pi}{3}$ ;.....7分

(2)由余弦定理知:  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ ,.....8分

即:  $1 = a^2 + c^2 - ac = (a+c)^2 - 3ac \geq (a+c)^2 - 3\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a+c)^2$ ,.....10分

所以:  $a+c \leq 2$ ,.....13分

因此:  $\triangle ABC$ 周长为 $a+b+c \leq 3$ ,即周长最大值为3. ....15分

18.解(1)零假设 $H_0$ : 学生对套餐的满意程度与套餐的优化相互独立. ....2分

$$\chi^2 = \frac{100(35 \times 10 - 15 \times 40)^2}{50 \times 50 \times 75 \times 25} = \frac{4}{3} \approx 1.33 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\because \chi^2 \approx 1.33 < 10.828 = \chi_{0.001} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$\therefore$  没有充分理由证明  $H_0$  不成立，即学生对套餐的满意程度与套餐的优化无关.  $\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 由题意知：小李同学选择荤菜种数  $X = 2$  的概率为： $P(X=2) = \frac{C_2^2 C_n^2}{C_{n+2}^4} \dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\because P(X=2) = \frac{C_2^2 C_n^2}{C_{n+2}^4} = \frac{3 \times 4}{(n+1)(n+2)} = \frac{12}{n^2 + 3n + 2} = \frac{12}{\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

由于  $n (n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*)$ ，所以  $P(X=2)$  在  $n=3$  处取得最大值  $\frac{3}{5}$ .  $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

(3) 同学小李第  $n$  天选择套餐  $B$  的概率为  $P_n$ ，则

第  $n-1$  天选择套餐  $B$  的概率为  $P_{n-1}$ ， $n \geq 2$ ,  $\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)(1 - P_{n-1}) + \left(1 - \frac{1}{3}\right)P_{n-1} = \frac{1}{6}P_{n-1} + \frac{1}{2}, \quad n \geq 2 \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$P_n - \frac{3}{5} = \frac{1}{6} \left(P_{n-1} - \frac{3}{5}\right) \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

当  $n=1$  时， $P_1 = \frac{1}{2}$ ，所以  $\left\{P_n - \frac{3}{5}\right\}$  是以  $-\frac{1}{10}$  为首项， $\frac{1}{6}$  为公比的等比数列， $\dots\dots\dots 16 \text{ 分}$

$$\text{因此 } P_n = \frac{3}{5} - \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$$

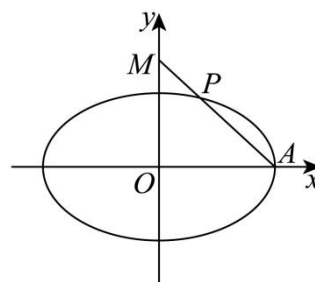
19. 解：(1) 由题意知， $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ ，则  $b^2 = 3$ ， $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$\text{离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

根据  $a^2 = b^2 + c^2$  得： $a^2 = 4$ ， $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

所以椭圆  $C$  标准方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .  $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 由题意  $A(2,0), M(0,m)$ ， $P(x_P, y_P)$   $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$



由  $\overline{PA} = 2\overline{MP}$  得,  $\begin{cases} 2-x_p = 2x_p \\ -y_p = 2y_p - 2m \end{cases}$ , .....6 分

解得  $P(\frac{2}{3}, \frac{2m}{3})$ , 代入  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , .....7 分

得  $\frac{1}{9} + \frac{4m^2}{27} = 1$ , 解得  $m = \pm\sqrt{6}$ . .....8 分

(3) 由线段  $AM$  的中垂线  $l$  的斜率为 2, 所以直线  $AM$  的斜率为  $-\frac{1}{2}$ , .....9 分

则  $\frac{m-0}{0-a} = -\frac{1}{2}$ , 解得  $m = \frac{a}{2}$ ,

由  $A(a, 0), M(0, \frac{a}{2})$  得  $AM$  中点坐标为  $(\frac{a}{2}, \frac{a}{4})$ , .....10 分

故直线  $l: y = 2x - \frac{3}{4}a$ , 显然直线  $l$  过椭圆内点  $(\frac{3}{8}a, 0)$ ,

故直线与椭圆恒有两不同交点,

设  $S(x_1, y_1), T(x_2, y_2)$ ,

由  $\begin{cases} y = 2x - \frac{3}{4}a \\ 3x^2 + a^2y^2 = 3a^2 \end{cases}$  消  $y$  得  $(4a^2 + 3)x^2 - 3a^3x + \frac{9}{16}a^4 - 3a^2 = 0$ ,

由韦达定理得  $x_1 + x_2 = \frac{3a^3}{4a^2 + 3}, x_1x_2 = \frac{\frac{9}{16}a^4 - 3a^2}{4a^2 + 3}$ , .....12 分

因为  $\angle SMT = \frac{\pi}{2}$ , 则  $\overline{MS} \cdot \overline{MT} = 0$ , 且  $M(0, \frac{a}{2})$ ,

则有  $x_1x_2 + (y_1 - \frac{a}{2})(y_2 - \frac{a}{2}) = 0$ , .....14 分

所以  $x_1x_2 + \left(2x_1 - \frac{5a}{4}\right)\left(2x_2 - \frac{5a}{4}\right) = 5x_1x_2 - \frac{5}{2}a(x_1 + x_2) + \frac{25}{16}a^2 = 0$ , .....15 分

即  $5\left(\frac{9}{16}a^4 - 3a^2\right) - \frac{5a}{2} \times 3a^3 + \frac{25}{16}a^2(4a^2 + 3) = 0$ , 解得  $a^2 = \frac{33}{5} > 3$  或  $a^2 = 0$  (舍去), ...16 分

故存在这样的椭圆, 使得  $\angle SMT = \frac{\pi}{2}$ ,  $a = \frac{\sqrt{165}}{5}$ . .....17 分